文章编号: 1000-5862(2012)01-0059-04

一类反向混合单调算子方程组的迭代求解

吴焱生

(五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门 529020)

摘要: 在序 Banach 空间中, 利用锥与半序理论和非对称迭代技巧, 研究一类反向混合单调算子方程组 $\begin{cases}A(x,x)=x\\B(x,x)=x\end{cases}$ 解的存在与唯一性, 给出了收敛于算子方程组解的逼近迭代序列和误差估计, 进而获得了反向混合单调算子方程 $A(x,x)=x$ 唯一解及其解的逼近迭代序列和误差估计, 并改进和推广了有关文献的相应结果.

关键词: 锥与半序; 反向混合单调算子; 算子方程组; 迭代解

中图分类号: O 177.91　　　文献标志码: A

0　引言及预备知识

在序 Banach 空间中, 混合单调算子[1]与反向混合单调算子[2]是 2 类非常重要的算子, 关于混合单调算子的研究, 已有许多较好结果[3-7], 而对于反向混合单调算子的研究较少报道. 本文仅利用锥与半序理论和非对称迭代技巧, 研究一类反向混合单调算子方程组

$$\begin{cases}A(x,x)=x\\B(x,x)=x\end{cases}\tag{1}$$

解的存在与唯一性, 对(1)式中的算子不考虑紧性条件和连续性条件, 研究方程组(1)的迭代求解问题, 给出了收敛于方程组(1)的解的逼近迭代序列和误差估计, 进而获得了反向混合单调算子方程 $A(x,x)=x$ 唯一解及其解的逼近迭代序列和误差估计, 并改进和推广了文献[8-9]的有关结果.

设 E 是实 Banach 空间, E 的零元为 θ, E 中的锥为 P, "$\leqslant$"是由 P 导出的半序, 即 $\forall\ x\in E$, $y\in E$, $x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in P$; 设 u_0,v_0 是 E 中的 2 个点, $u_0<v_0$ (即 $u_0\leqslant v_0$ 且 $u_0\neq v_0$)称 $[u_0,v_0]=\{u\in E|u_0\leqslant u\leqslant v_0\}$ 为 E 中的序区间; 称锥 P 为正规锥, 若 $\exists N>0$, 使得 $\theta\leqslant x\leqslant y$ 蕴含 $\|x\|\leqslant N\|y\|$, 其中称 N 为正规常数[10].

记 $D=[u_0,v_0]$, 二元算子 A: $D\times D\to E$ 为反向混合单调的, 如果 $A(u,v)$ 关于 u 非增且关于 v 非减, 即 $\forall u_i,v_i\in D, i=1,2,$ 若 $u_1\leqslant u_2, v_2\leqslant v_1$, 则 $A(u_1,v_1)\geqslant A(u_2,v_2)$; 又设 $x^*\in D$, 称之为 A 的不动点, 如果 $A(x^*,x^*)=x^*$.

1　主要结果

定理1　设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, 有界线性算子 $L,M,H:D\to E$ 及 $L-M$: $D\to E$ 均为正的, 且 $L-M-I$ 可逆, 而 A,B: $D\times D\to E$ 都是反向混合单调算子, 它们满足下列条件:

(H_1)　$B(u_0,v_0)\leqslant u_0-L(v_0-u_0)$, $v_0+M(v_0-u_0)\leqslant A(v_0,u_0)$;

(H_2)　$B(x,y)\geqslant A(y,x)$, $u_0\leqslant x\leqslant y\leqslant v_0$;

(H_3)　$B(x,y)-A(y,x)\leqslant H(y-x)$, $u_0\leqslant x\leqslant y\leqslant v_0$;

(H_4)　$LM=ML$, $LH=HL$, $MH=HM$;

(H_5)　谱半径 $\rho=r[(L-M-I)^{-1}][r(L)+r(M)+r(H)]$ 满足 $0<\rho<1$,

其中 x_i, $y_i\in D, i=1,2$, 且 $x_1\leqslant x_2$, $y_2\leqslant y_1$, 则算子方程组(1)在 D 中有唯一的公共解 x^*, 迭代序列

$$\begin{cases}u_n=(L-M-I)^{-1}\left[Lu_{n-1}-Mv_{n-1}-B(u_{n-1},v_{n-1})\right]\\v_n=(L-M-I)^{-1}\left[Lv_{n-1}-Mu_{n-1}-A(v_{n-1},u_{n-1})\right]\end{cases}\tag{2}$$

收稿日期: 2011-09-20

作者简介: 吴焱生(1963-), 男, 江西靖安人, 副教授, 硕士, 主要从事非线性泛函分析及其应用方面的研究.

$(n=1,2,\cdots)$ 均依范数收敛于 x^*，且存在正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left\|x^*-u_n(\text{或}v_n)\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|, \tag{3}$$

其中 λ 满足 $\rho<\lambda<1$，N 为 P 的正规常数.

证 (i)用数学归纳法证明:

$$u_{n-1}\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant v_{n-1}\ (n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

事实上，当 $n=1$ 时，由(2)式及条件(H_1)、(H_2)可得

$$u_1=(L-M-I)^{-1}[Lu_0-Mv_0-B(u_0,v_0)]\geqslant (L-M-I)^{-1}[(L-M)v_0-u_0]\geqslant (L-M-I)^{-1}[(L-M-I)u_0]=u_0,$$

$$v_1-u_1=(L-M-I)^{-1}[L(v_0-u_0)+M(v_0-u_0)+B(u_0,v_0)-A(v_0,u_0)]\geqslant\theta,$$

$$v_1=(L-M-I)^{-1}[Lv_0-Mu_0-A(v_0,u_0)]\leqslant (L-M-I)^{-1}[Lv_0-Mu_0-v_0-M(v_0-u_0)]= (L-M-I)^{-1}[(L-M-I)v_0]=v_0,$$

从而，当 $n=1$ 时, (4)式成立.

设当 $n=k$ 时, (4)式成立, 即 $u_{k-1}\leqslant u_k\leqslant v_k\leqslant v_{k-1}$，则当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，并注意到 A、B 是反向混合单调算子及条件(H_2)和(2)式，有

$$u_{k+1}-u_k=(L-M-I)^{-1}[L(u_k-u_{k-1})+M(v_{k-1}-v_k)+B(u_{k-1},v_{k-1})-B(u_k,v_k)]\geqslant\theta,$$

$$v_{k+1}-u_{k+1}=(L-M-I)^{-1}[L(v_k-u_k)+M(v_k-u_k)+B(u_k,v_k)-A(v_k,u_k)]\geqslant\theta,$$

$$v_k-v_{k+1}=(L-M-I)^{-1}[L(v_k-v_{k-1})+M(u_k-u_{k-1})+A(v_k,u_k)-A(v_{k-1},u_{k-1})]\geqslant\theta,$$

从而有 $u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant v_{k+1}\leqslant v_k$，由归纳法知, (4)式成立.

(ii)证明 $\{u_n\},\{v_n\}$ 都是 E 中的Cauchy序列，由(2)式及条件(H_3)可得

$$\theta\leqslant v_n-u_n=(L-M-I)^{-1}[L(v_{n-1}-u_{n-1})+M(v_{n-1}-u_{n-1})+B(u_{n-1},v_{n-1})-A(v_{n-1},u_{n-1})]\leqslant (L-M-I)^{-1}[(L+M+H)(v_{n-1}-u_{n-1})],$$

由条件(H_4)可得

$$(L-M-I)^{-1}(L+M+H)=(L+M+H)(L-M-I)^{-1},$$

从而继续可得

$$\theta\leqslant v_n-u_n\leqslant(L-M-I)^{-1}(L+M+H)(v_{n-1}-u_{n-1})\leqslant [(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^2(v_{n-2}-u_{n-2})\leqslant\cdots\leqslant [(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^n(v_0-u_0),$$

即

$$\theta\leqslant v_n-u_n\leqslant[(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^n(v_0-u_0). \tag{5}$$

于是，由(4)、(5)两式，对任意的自然数 m，有

$$\theta\leqslant u_{n+m}-u_n\leqslant v_n-u_n\leqslant [(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^n(v_0-u_0), \tag{6}$$

$$\theta\leqslant v_n-v_{n+m}\leqslant v_n-u_n\leqslant [(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^n(v_0-u_0). \tag{7}$$

再由条件(H_4)及文献[11]可得

$$r[(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]\leqslant r[(L-M-I)^{-1}][r(L)+r(M)+r(H)]=\rho,$$

由条件(H_5)可取 λ，使得 $r[(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]\leqslant\rho<\lambda<1$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|[(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^n\right\|^{1/n}=r[(L-M-I)^{-1}\ (L+M+H)]<\lambda<1$ 可知，存在正整数 n_0，当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left\|[(L-M-I)^{-1}(L+M+H)]^n\right\|<\lambda^n,$$

于是由(5)~(7)式及 P 正规可得

$$\left\|v_n-u_n\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|, \tag{8}$$

$$\left\|u_{n+m}-u_n\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|, \tag{9}$$

$$\left\|v_n-v_{n+m}\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|, \tag{10}$$

因此，由(9)和(10)式知, $\{u_n\},\{v_n\}$ 都是 E 中的Cauchy序列，故由 E 的完备性，$\exists u^*\in E,v^*\in E$，使得

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u^*,\quad \lim_{n\to\infty}v_n=v^*, \tag{11}$$

且有 $u_n\leqslant u^*\leqslant v^*\leqslant v_n$，由(8)式表明：$u^*=v^*\triangleq x^*\in[u_0,v_0]$，而且

$$u_n\leqslant x^*\leqslant v_n\quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{12}$$

(iii)证明 x^* 即为方程组(1)在 D 中的唯一公共解.

由(2)、(4)、(12)式及条件(H_2)可得

$$u_n\leqslant A(v_{n-1},u_{n-1})\leqslant A(x^*x^*)\leqslant B(x^*,x^*)\leqslant B(u_{n-1},v_{n-1})\leqslant v_n. \tag{13}$$

由(11)、(13)式及 P 正规可得 $A(x^*,x^*)=B(x^*,x^*)=x^*$，故 x^* 为方程组(1)在 D 中的公共解.

设 y^* 为方程组(1)在 D 中的另一公共解，则由(2)、(4)两式及条件(H_2)可得

$$u_1\leqslant A(v_0,u_0)\leqslant A(y^*,y^*)\leqslant B(y^*,y^*)\leqslant B(u_0,v_0)\leqslant v_1,$$

即 $u_1\leqslant y^*\leqslant v_1$.

类似地有 $u_2\leqslant y^*\leqslant v_2$，且一般地,

$$u_n\leqslant y^*\leqslant v_n\ (n=0,1,2,\cdots), \tag{14}$$

由(11)式和(14)两式及 P 正规可得 $x^*=y^*$.

(iv)在(9)或(10)式中，令 $m\to\infty$，即可得(3)式.

定理2 设 E 是实Banach 空间，P 是 E 中的正

规锥, 有界线性算子 $L,M,H:D\to E$ 及 $L-M$: $D\to E$ 都是正的, 且 $L+M-I$ 可逆, 而 A,B : $D\times D\to E$ 是反向混合单调算子, 满足下列条件:

(H_6) $B(v_0,u_0)\leqslant u_0-L(v_0-u_0), v_0+M(v_0-u_0)\leqslant A(u_0,v_0)$;

(H_7) $B(y,x)\geqslant A(x,y)$, $u_0\leqslant x\leqslant y\leqslant v_0$;

(H_8) $B(x,y)-A(y,x)\leqslant H(y-x)$, $u_0\leqslant x\leqslant y\leqslant v_0$;

(H_9) $LM=ML$, $LH=HL$, $MH=HM$;

(H_{10}) 谱半径 $\rho=r[(L+M-I)^{-1}][r(L)+r(M)+r(H)]$ 满足 $0<\rho<1$,

其中 x_i, $y_i\in D, i=1,2$, 且 $x_1\leqslant x_2$, $y_2\leqslant y_1$, 则算子方程组(1)在 D 中有唯一的公共解 x^*, 迭代序列

$$\begin{cases} u_n=(L+M-I)^{-1}\left[Lu_{n-1}+Mv_{n-1}-B(v_{n-1},u_{n-1})\right] \\ v_n=(L+M-I)^{-1}\left[Lv_{n-1}+Mu_{n-1}-A(u_{n-1},v_{n-1})\right] \end{cases}$$

$(n=1,2,\cdots)$ 均依范数收敛于 x^*, 且存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left\|x^*-u_n(\text{或}v_n)\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|,$$

其中 λ 满足 $\rho<\lambda<1$, N 为 P 的正规常数.

证　类似定理 1 的证明可证得定理 2,故从略.

分别在定理 1 和定理 2 中, 将算子 A、B 作为同一个算子, 则可推出下列结论, 而它们也都是新的结果.

推论1　设 E 是实Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, 有界线性算子 $L,M,H:D\to E$ 及 $L-M$: $D\to E$ 都是正的, 且 $L-M-I$ 可逆, 而 A : $D\times D\to E$ 是反向混合单调算子, 满足下列条件:

(H_{11}) $A(u_0,v_0)\leqslant u_0-L(v_0-u_0), v_0+M(v_0-u_0)\leqslant A(v_0,u_0)$;

(H_{12}) $A(x,y)-A(y,x)\leqslant H(y-x)$, $u_0\leqslant x\leqslant y\leqslant v_0$;

(H_{13}) $LM=ML$, $LH=HL$, $MH=HM$;

(H_{14}) 谱半径 $\rho=r[(L-M-I)^{-1}][r(L)+r(M)+r(H)]$ 满足 $0<\rho<1$,

其中 x_i, $y_i\in D, i=1,2$, 且 $x_1\leqslant x_2$, $y_2\leqslant y_1$, 则算子方程 $A(x,x)=x$ 在 D 中有唯一解 x^*, 迭代序列

$$\begin{cases} u_n=(L-M-I)^{-1}\left[Lu_{n-1}-Mv_{n-1}-A(u_{n-1},v_{n-1})\right] \\ v_n=(L-M-I)^{-1}\left[Lv_{n-1}-Mu_{n-1}-A(v_{n-1},u_{n-1})\right] \end{cases}$$

$(n=1,2,\cdots)$ 均依范数收敛于 x^*, 且存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left\|x^*-u_n(\text{或}v_n)\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|,$$

其中 λ 满足 $\rho<\lambda<1$, N 为 P 的正规常数.

推论 2　设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, 有界线性算子 $L,M,H:D\to E$ 及 $L-M$: $D\to E$ 都是正的, 且 $L+M-I$ 可逆, 而 A : $D\times D\to E$ 是反向混合单调算子, 满足下列条件:

(H_{15}) $A(v_0,u_0)\leqslant u_0-L(v_0-u_0), v_0+M(v_0-u_0)\leqslant A(u_0,v_0)$;

(H_{16}) $A(x,y)-A(y,x)\leqslant H(y-x), u_0\leqslant x\leqslant y\leqslant v_0$;

(H_{17}) $LM=ML$, $LH=HL$, $MH=HM$;

(H_{18})谱半径 $\rho=r[(L+M-I)^{-1}][r(L)+r(M)+r(H)]$ 满足 $0<\rho<1$,

其中 x_i, $y_i\in D, i=1,2$, 且 $x_1\leqslant x_2$, $y_2\leqslant y_1$, 则算子方程 $A(x,x)=x$ 在 D 中有唯一解 x^*, 迭代序列

$$\begin{cases} u_n=(L+M-I)^{-1}\left[Lu_{n-1}+Mv_{n-1}-A(v_{n-1},u_{n-1})\right] \\ v_n=(L+M-I)^{-1}\left[Lv_{n-1}+Mu_{n-1}-A(u_{n-1},v_{n-1})\right] \end{cases}$$

$(n=1,2,\cdots)$ 均依范数收敛于 x^*, 且存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left\|x^*-u_n(\text{或}v_n)\right\|\leqslant N\lambda^n\left\|v_0-u_0\right\|,$$

其中 λ 满足 $\rho<\lambda<1$, N 为 P 的正规常数.

注 1　本文的 2 个定理对反向混合单调算子 A、B 仅需满足一定条件, 而不需紧性条件和连续性条件, 通过利用迭代技巧仍然可以得到算子方程组(1)的唯一公共解; 且它们改进和推广了文献[8-9]中的定理.

注 2　本文结论都不需要算子 A (B)映 $[u_0,v_0]\times[u_0,v_0]$ 入其自身, 这与文献[8-9]及文献[12-13]不相同.

2　参考文献

[1] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications [J]. Nonlinear Anal TMA, 1987, 11(5): 623-632.

[2] 孙义静. 一类非线性算子方程组的迭代算法及应用 [J]. 浙江大学学报: 自然科学版, 1999(3): 289-294.

[3] Zhang Shisheng, Guo Weipin. On the existence and uniqueness theorems of solutions for the systems of mixed monotone operator equations with applications [J]. Applied Mathematics:A Journal of Chinese Universities, 1993, 8B(1): 1-14.

[4] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用 [J]. 数学学报: 中文版, 1998, 41(6): 1121-1126.

[5] Zuo Xiuhui. Iterative solution for systems of binary non-mixed monotone operator equations [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2001, 16(3): 80-83.

[6] 吴焱生, 李国祯. 混合单调算子的不动点存在唯一性定理及其应用 [J]. 数学学报:中文版, 2003, 46(1): 161-166.

[7] 吴焱生. Banach 空间中非混合单调算子的新不动点定理 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(4): 478-483.

[8] 徐华伟. 一类反向混合单调算子组解的新存在唯一性定理 [J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2009, 35(1): 29-32.

[9] 元春梅, 刘翠英. 一类反向混合单调算子方程组解的存在唯一性[J]. 曲阜师范大学学报: 自然科学版, 2010, 36(3): 33-36.

[10] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2004.

[11] 李炳仁. Banach 代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[12] 孙经先, 刘立山. 非线性算子方程的迭代求解及其应用 [J]. 数学物理学报, 1993, 13(3): 141-145.

[13] 宋光兴. Banach 空间中二元非线性算子方程的迭代求解 [J]. 工程数学学报, 1998, 15(2): 103-107.

The Iterative Solution of the System for a Class of Anti-Mixed Monotone Operator Equations

WU Yan-sheng

(School of Mathematics and Computional Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong 529020, China)

Abstract: In ordered Banach spaces, by the cone and partial ordering theory, and non-symmetry iterative techniques, the existence and uniqueness of the solution for the system of a class of anti-mixed monotone operator system $\begin{cases} A(x,x)=x \\ B(x,x)=x \end{cases}$ are studied, and the iterative sequences which converge to the solution for system of operator equations and the error estimations are given, and the iterative solution, the iterative sequences which converge to the solution and the error estimations of the anti-mixed monotone operator equation $A(x,x)=x$ are also obtained. The results of some references are improved and extended.

Key words: cone and partial order; anti-mixed monotone operators; system of operator equations; iterative solution

(责任编辑: 曾剑锋)