文章编号: 1000-5862(2012)01-0067-04

集合族交运算的上半连续性和公共元的通有稳定性

左勇华[1,2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院 江西 南昌 330022; 2. 上海财经大学人文学院 上海 200433)

摘要: 建立了全新的集合族空间, 讨论了公共元的通有稳定性, 得到了闭集族空间上的交运算在 Hausdorff 拓扑下的上半连续性, 从而证明了有关集合族空间上的公共元的通有稳定性.

关键词: 集合族空间; 公共元; 上半连续
中图分类号: F 224.0 文献标志码: A

0 引言

基础经济理论研究日趋严密化和数学化, 早期借助于效用函数等数量化方法已经过渡到主要利用集值拓扑(Correspondences)的方法[1]. 当前“半数以上的诺贝尔经济学奖得主得益于数学方法的成功运用”[2]. 经济学和数学的方法又进一步涉入社会政治的研究中, 在偏序结构下对社会福利函数的存在性等社会选择问题的研究已有许多较好的结果[3]; 一般的社会选择的框架本质上是一种交运算, 设全体社会成员形成集合 I, 每个成员持有合意集合 β, 考查社会合意集 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha$ 的交运算是有意义的. 另外, 集值拓扑的方法在极值问题、变分问题等多个数学分支也有重要的应用意义[4-6].

中国学者在数学框架研究经济问题也有出色的工作[7], 并进一步在序拓扑下研究了选择和均衡问题. 基于著名的 Sard 定理和 Smale 定理, 诺贝尔奖得主得布鲁引入了正则经济并考察了均衡集的稳定性; 基于 Fort 定理, 俞建、向淑文等又在 Baire 纲意义下研究了不动点、Fanky 点、KKM 点、Nash 平衡点以及重合点的通有稳定性[8-11]. 本质上这些结果都可以用集合族的交运算来刻画, 从而交运算的研究有突出的意义.

本文将建立集合族空间并研究其公共元通有稳定性. 运用集合族公共元的通有稳定性可以对诸多通有稳定性结论进行统一刻画.

1 预备知识及符号说明

设 (X,d) 是度量空间, 以 $CL(X)$ 表示 X 上非空闭子集的全体; $K(X)$ 为 X 上非空紧子集的全体; 2^X 为 X 上所有非空子集的全体.

为建立集合族空间, $\forall x\in X$ 以及 $\forall A\subset X$, ε 是一正数, 定义集合 $A+\varepsilon=\{x\in X\mid \exists a\in A,\ d(a,x)<\varepsilon\}$为 A 的 ε 扩张; $\forall A,B\in CL(X)$ 定义 Hausdorff 度量: $H_d(A,B)=\inf\{\varepsilon\mid A\subset B+\varepsilon, B\subset A+\varepsilon\}$.

显然 $H_d(\cdot,\cdot)$ 是 $CL(X)=\{X$ 上非空闭子集$\}$上的度量函数, 于是($CL(X)$, $H_d(\cdot,\cdot)$)是度量空间, 被称为集合族空间. 以下可以考察集合序列的极限.

引理 1[12] $(CL(X),H_d)$ 完备当且仅当 (X,d) 完备. $K(X)$ 在 $(CL(X),H_d)$ 中闭.

以下介绍有关 Baire 空间及通有性质的概念, 显然, 完备度量空间一定是 Baire 空间.

定义 1 设 X 是拓扑空间, 称 X 的子集 Q 为剩余集, 若 Q 可表示为 X 的至多可数个开稠集之交. 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间, 称 X 是 Baire 空间, 若 X 的每一剩余集在 X 中稠.

定义 2 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间. Q 为 X 的子集, 称 Q 在 X 中无处稠密的, 若 Q 的闭包之内部为空集, 即 $\operatorname{int}\overline{Q}=\varnothing$; 称 Q 为第一纲集, 若 Q 是最

收稿日期: 2011-11-15
作者简介: 左勇华(1976-), 男, 江西湖口人, 讲师, 博士研究生, 主要从事数理经济学、公共选择与博弈论方面的研究.

多可数个无处稠密集之并；若 Q 非第一纲的，则称 Q 为第二纲的.

剩余集之可列交还是剩余集．一般地，在 Hausdorff 拓扑空间中，第二纲集元素占绝大多数.

定义 3 X，Y 均为拓扑空间，$F: X\to 2^Y$ 为集值映射，

(i) 称 F 在点 x_0 处上半连续，若任何 $F(x_0)$ 在 Y 中的一个开邻域 u，$\exists x_0$ 的邻域 v，当 $x'\in v$ 有 $F(x')\subset u$．若 $F: X\to 2^Y$ 在 X 上每一点都上半连续，称 $F: X\to 2^Y$ 在 X 上上半连续；

(ii) 称 $F: X\to 2^Y$ 在 x 处下半连续，若对任何 Y 中的开集 u 且 $u\cap F(x)\neq\varnothing$，必存在 x 的邻域 v，当 $x'\in v$ 时有 $F(x')\cap u\neq\varnothing$．当 F 在 X 上每一点上都下半连续，称 F 在 X 上下半连续；

(iii) F 在一点连续当且仅当 F 在这一点处既上半连续又下半连续.

引理 2(Fort 引理) X,Y 为拓扑空间，Y 为度量空间，$F: X\to 2^Y$ 上半连续非空紧值(即 usco 映射)，则存在 X 的一个稠密剩余集 Q，使 $F: X\to 2^Y$ 在 Q 上半连续从而连续.

2 主要结果

首先给出集合族的一些性质，其拓扑均为 Hausdorff 度量生成 Hausdorff 拓扑.

度量空间 (X,d) 紧，$A,B\in CL(X)$ 且 $A\cap B\neq\varnothing$，则当$\varepsilon\to 0$时$(A+\varepsilon)\cap(B+\varepsilon)\to A\cap B$.

若 X 不紧,以上结论未必成立．如在 $\mathbf{R}$ 上 $A=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$B=\{1+1,2+1/2,3+1/3,\cdots,n+1/n,\cdots\}$．$A\cap B=\{2\}$，而 $(A+\varepsilon)\cap(B+\varepsilon)\to A\cap B$ 却不成立.

引理3 X 为紧度量空间 $A_1,A_2,\cdots,A_k\in CL(X)$ 且 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\neq\varnothing$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}(A_i+\varepsilon)\to\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i(\varepsilon\to 0)$.

考虑到由 (X,d) 紧，则 Vietoris 拓扑与 Hausdorff 拓扑是一致的，结合归纳法必有引理 3 成立.

引理4 若 X 为紧度量空间，对每个 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $\{A_i^n\}_{n=1}^{\infty}\subset CL(X)$ 以及 $A_i^n\to A_i(n\to\infty)$，并且 $\forall n$，均有 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i^n\neq\varnothing$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\neq\varnothing$.

证 显然，当 $k=1$ 时，则由 $A_1^n\neq\varnothing$，$A_1^n\to A_1\Rightarrow A_1\neq\varnothing$ 成立.

设当 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 时，$\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i\neq\varnothing$ 成立．由于 $A_k\neq\varnothing$，用反证法，若 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i=\varnothing$ 则 $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i\right)\cap A_k=\varnothing$. 于是 $\exists\varepsilon_0$，使 $\left[\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i\right)+\varepsilon_0\right]\cap[A_k+\varepsilon_0]=\varnothing$，由于当 n 充分大时，$A_k^n\subset A_k+\varepsilon_0$.

又由引理 3 知，$\exists\varepsilon_0'<\varepsilon_0$，使 $\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}(A_i+\varepsilon_0')\subset\left[\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i\right]+\varepsilon_0$，只要当 n 充分大时，$A_i^n\subset A_i+\varepsilon_0'$，从而 $\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i^n\subset\left[\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i\right]+\varepsilon_0$，故当 n 充分大时，$A_k^n\cap\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i^n\right)=\varnothing$ 矛盾．于是有 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\neq\varnothing$ 成立.

推论 1 若 (X,d) 完备，对每一个 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $\{A_i^n\}_{n=1}^{\infty}\subset K(X)$ 且 $A_i^n\to A_i$ $(n\to\infty)$，并且 $\forall n$，$\bigcap\limits_{i=1}^{k}A\neq\varnothing$，则 $A_i\in K(X)$ 且 $\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\neq\varnothing$.

进一步讨论集合族为无限个元素的情形.

定义 4 若 (X,d) 是完备度量空间且未必紧，I 是指标集，$\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X,d) 上的紧集族且适合 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha\neq\varnothing$．适合以上条件的集合族的全体形成 Y_I，称 Y_I 为 X 上以 I 指标的紧集集合族空间，简称为集合族空间.

$\forall y_1,y_2\in Y_I$，分别记 $y_1=\{\beta_\alpha^1\}_{\alpha\in I}$ $y_2=\{\beta^2\}_{\alpha\in I}$，定义函数 $\rho_I(y_1,y_2)=\sup\limits_{\alpha\in I}H_d(\beta_\alpha^1,\beta_\alpha^2)$，明显可作为 Y_I 上的度量函数.

定义 5 设 $\forall y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}\in Y_I$，记 $F_I(y)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\beta_\alpha$，称集值映射 $F_I: Y\to 2^X$ 为 Y_I 上的公共元映射.

定理 1 (Y_I,ρ_I) 是完备度量空间.

证 任取 (Y_I,ρ_I) 的一个柯西列 $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$，$y^n=\left\{\beta_\alpha^n\right\}_{\alpha\in I}$．显然，固定每一个 $\alpha\in I$，则序列 $\left\{\beta_\alpha^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 也为 $K(X)$ 的柯西列，必有极限记为 β_α，显然 β_α 紧；以这些 β_α 形成新的集合族，记为 $y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

下面来证明 $y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}\in Y_I$，即证 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha\neq\varnothing$.

随意固定 $\alpha_0\in I$，$\beta_{\alpha_0}\in y$，$\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(\beta_\alpha\cap\beta_{\alpha_0})$，记 $\gamma_\alpha=\beta_\alpha\cap\beta_{\alpha_0}$ 是紧空间 $\beta_{\alpha_0}(\in y)$ 的紧子集; 故要证 $\bigcap_{\alpha\in I}\gamma_\alpha\neq\varnothing$，只要证 $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 具有有限交性质. 对任何有限个 $\gamma_{\alpha_1},\gamma_{\alpha_2},\cdots,\gamma_{\alpha_k}$，有 $\bigcap_{\alpha\in I}\gamma_\alpha=\left(\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha\right)\cap\beta_{\alpha_0}$、$\bigcap_{i=1}^k\gamma_{\alpha_i}=\bigcap_{i=0}^k\beta_{\alpha_i}$. 而对于 $i=0,1,2,\cdots,k$，显然有 $\beta_{\alpha_i}^n\to\beta_{\alpha_i}\ (n\to\infty)$ 且 $\bigcap_{i=0}^k\beta_{\alpha_i}^n\neq\varnothing$.

由引理 3 知，$\bigcap_{i=1}^k\gamma_{\alpha_i}=\bigcap_{i=0}^k\beta_{\alpha_i}^n\neq\varnothing$，从而 $y=\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}\in Y_I$.

另一方面，显然易证 $\rho(y^n,y)\to 0$，从而证明了 (Y_I,ρ_I) 的完备性.

定理 2　公共元映射 F_I 在 Y_I 上是 usco 映射.

证　显然 F_I 是非空紧值的，只需证明 F_I 上半连续即可. 在 Y_I 中任取一收敛列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ (同样记 $y_n=\{\beta_\alpha^n\}_{\alpha\in I}$)，且设 $y_n\to y_0\ (n\to\infty)$ 及 $y_0=\{\beta_\alpha^0\}_{\alpha\in I}$.

对任何 $F_I(y_0)$ 的开邻域 G，即 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha^0\subset G$，下面来证明 $y_0=\{\beta_\alpha^0\}_{\alpha\in I}$ 中必有有限个成员其交包含于 G 中.

(反证法)若 $y_0=\left\{\beta_\alpha^0\right\}_{\alpha\in I}$ 中任何有限交不包含于 G，记 $1\leqslant i\leqslant k$，任取 k 个 $\beta_{\alpha_i}^0\in z_0$，必有 $\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\not\subset G$，则 $\beta_{\alpha_1}^0\cap\cdots\cap\beta_{\alpha_k}^0\cap G^c\neq\varnothing$. 于是 $y_0\cup G^c$ 为 X 具有有限交性质的闭集族. 随意固定 α_0，β_{α_0} 紧，$\beta_{\alpha_0}^0\cap\beta_\alpha^0$ 及 $\beta_{\alpha_0}^0\cap G^c$ 均为 β_{α_0} 的闭子集也具有有限交性质，从而全体交非空，即 $\left(\bigcap_{\alpha\in I}\beta_{\alpha_0}^0\right)\cap G^c\neq\varnothing$，则矛盾于 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha^0\subset G$.

故 $y_0=\left\{\beta_\alpha^0\right\}_{\alpha\in I}$ 中必有某有限个成员 $\beta_{\alpha_1}^0,\cdots,\beta_{\alpha_k}^0$，其交 $\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\subset G$.

考虑到 $\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0$ 紧，有 $d\left(\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0,G^c\right)=d_0\neq 0$，故有 $\left(\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\right)+d_0/3\subset G$.

由引理 3 知，$\exists\varepsilon_0$，使得 $\bigcap_{i=1}^k(\beta_{\alpha_i}^0+\varepsilon_0)\subset\left(\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\right)+d_0/3\subset G$. 由于 $y_n\to y_0$，所以 $\exists N$，当 $n\geqslant N$ 时，$\rho_I(y_n,y_0)\leqslant\varepsilon_0$，则 $\forall\alpha\in I$ 均有 $\beta_\alpha^n\subset\beta_\alpha^0+\varepsilon_0$，故 $\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^n\subset\bigcap_{i=1}^k(\beta_{\alpha_i}^0+\varepsilon_0)\subset\left(\bigcap_{i=1}^k\beta_{\alpha_i}^0\right)+d_0/3\subset G$. 则显然 $F(y_n)\subset G$. $F_I:Y_I\to 2^X$ 的上半连续得证，从而是 usco 映射.

定理 2 说明集合族的交运算在适当的集合族拓扑上是上半连续的.

定理 3　存在 Y_I 的一个稠密剩余集 Q，使得 $F_I:Y_I\to 2^X$ 在 Q 上连续.

证　由引理 2, 结论明显成立.

定理 3 说明 (Y_I,ρ_I) 上的公共元是通有稳定的. 从而紧集合族空间的交运算虽然不是连续运算，但在绝大多数点上是上半连续的，从而在 Baire 意义下绝大多数的情形是连续的.

其它的一些讨论: 已经有例子可以说明 F_I 仅仅是上半连续而未必一定是连续的. 另外，若 (X,d) 紧度量空间，则 X 完备. I 是某指标集，$\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的某闭集族适合 $\bigcap_{\alpha\in I}\beta_\alpha\neq\varnothing$. 适合以上条件的闭集族的全体作成空间也是完备的，并且相应的公共元也是通有稳定的，因为紧集的闭子集也是紧的. 但是，一般的度量空间的闭子集族形成的空间未必完备. 考虑 $X=R^1$ 且 $d(x,y)=|x-y|$，则 X 不紧. 设 $A_n=A=\{2,\cdots,n,\cdots\}$，$B_n=\{2+1/2,\cdots,n+1/n,n+1,n+2,\cdots,n+m,\cdots\}$，明显 $A_n\to A$ 都闭，并且 $B_n\to B=\{n+1/n\}_{n=2}^\infty$ 也都闭，适合 $A_n\cap B_n\neq\varnothing$，但 $A\cap B=\varnothing$.

以上定义集合族空间时，对指标集未作任何的要求，仅仅只要是一个集合; 事实上当赋予指标集以某些拓扑结构时，可以研究更多的问题，运用集合族公共元的通有稳定性可以对不动点、Fanky 点、KKM 点、Nash 平衡点以及重合点的通有稳定性进行统一描述，有关结果进一步研究.

3　参考文献

[1] 史树中. 数学与经济 [M]. 2 版. 大连: 大连理工大学出版社,

2008.
[2] 王则柯, 左再思, 李志强. 经济学的拓扑方法 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
[3] 潘吉勋, 张顺明. 经济均衡的数学原理 [M]. 长春: 吉林大学出版社, 1997.
[4] Fort M K Jr. Essential and nonessential fixed points [J]. Amer J Math, 1950, 72(2): 315-322.
[5] 阿马蒂亚·森. 集体选择与社会福利 [M]. 胡的的, 胡毓达,译. 上海: 上海科学技术出版社, 2004.
[6] 宋伟才, 向淑文. 集值映射的弱有效广义梯度 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(3): 283-286.
[7] 张金清. 序方法与均衡分析 [M]. 上海: 复旦大学出版社. 2003.
[8] Yu Jian, Xiang Shuwen. On essential components of the set of Nash equilibruim points [J]. Nonlinear Analysis, 1999, 38(2): 259-264.
[9] Yu Jian, Xiang Shuwen. The stability of the set of KKM points [J]. Nonlinear Analysis, 2003, 54(5): 839-844.
[10] Yu Jian. The uniqueness of saddle points [J]. Bull Polish Acad Sci Math, 1995, 43(2): 119-129.
[11] 张德金. 有限理性与 KKM 点集的稳定性 [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2011, 28(1): 31-34.
[12] Klein E, Thomson A C. Theory of correspondences: including applications to mathematical economics [M]. New York: Wiley, 1984.

On Upper Semi-Continuity of Operation of Set′s Inter-Section and Common Element′s Generic Stability

ZUO Yong-hua[1,2]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. School of Humanities, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: A family-of-set space is established. And its common elements’ generic stability is studied. The upper semi-continuity of operation of sets’ intersection in family-of-closed-set space is obtained. So the common element’s generic Stability in family-closed-set space is proved.

Key words: family-of-set space; common elements; upper semi-continuity

(责任编辑: 曾剑锋)