

文章编号: 1000-5862(2012)01-0079-04

自由势场中变质量粒子的透射率研究

余子星¹, 李新华², 李翠翠¹, 桑明煌^{1*}

(1. 江西师范大学物理与通信电子学院, 江西 南昌 330022; 2. 江西省星子中学, 江西 九江 332800)

摘要: 利用分析转移矩阵方法, 研究了变质量分布粒子在 1 维自由势场 ($V(x)=0$) 中的透射率. 通过点正则变换, 发现变质量分布粒子的透射谱与其等效势场的类型密切相关. 当等效势为势阱, 则在本征能级处透射率达到极大; 而为势垒时, 如果粒子入射能量小于势垒高度, 则透射率非常小, 一旦粒子能量大于势垒高度, 透射率则在 1 附近震荡.

关键词: 自由势场; 变质量粒子; 分析转移矩阵方法; 透射率; 点正则变换

中图分类号: O 413.1

文献标志码: A

0 引言

由于变质量分布问题在半导体^[1]、量子点^[2]、量子流体^[3]、³He 簇^[4]、金属簇^[5]等系统中研究电学性质有比较广泛的应用, 所以变质量 Schrödinger 方程的求解引起了人们极大的兴趣. 相比质量恒定的情况, 变质量系统的 Schrödinger 方程求解更为复杂. 通常很难找到它的解析解, 但是对于某些特殊质量分布, 人们可以用超对称量子力学^[6]、路径积分^[7]、李代数^[8-9]、点正则变换(point canonical transformation, PCT)^[10-11]等方法来得到其解析解. PCT 的基本思想是将质量恒定的物理系统作为参考问题, 变质量的物理系统看作目标问题, 通过坐标变换在参考问题的方程与目标问题的方程之间建立联系得出等效势场. 若等效势场为精确可解势, 如 Coulomb 势、Morse 势等, 则变质量 Schrödinger 方程能得到解析解.

另一方面, 基于分析转移矩阵方法(analytical transfer matrix method, ATMM)^[12]的反射率及透射率公式广泛地应用于各种势场中粒子反射和透射的计算^[13-15], 并发现量子反射即是子波反射^[16]和在势垒两旁加上合适的势阱出现透射增强等奇特现象^[17]. 与文献[13-15]不同的是, 本文考虑自由势场(即 $V(x)=0$), 并研究变质量分布对透射率的影响.

1 点正则变换(PCT)

当粒子质量依赖于空间位置时, 1 维 Schrödinger 方程写为

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{2m(x)} \frac{d}{dx} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (1)$$

其中 $\psi(x)$ 、 $V(x)$ 、 E 分别为波函数, 势函数和粒子能量, 取 $\hbar=1$. 令波函数 $\psi(x) = m(x)^{1/4} \phi(y(x))$ 和 $dy/dx = m(x)^{1/2}$, 并代入(1)式, 则变质量分布方程转变为常质量方程

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} + V_{eff}(y)\phi(y) = E\phi(y), \quad (2)$$

(1)式与(2)式具有相同的能谱, 两势函数的关系为

$$V_{eff}(y) = V(y) + V_m(y) = V(y) + \frac{1}{32} \left[\frac{5}{m(y)^2} \left(\frac{dm(y)}{dy} \right)^2 - \frac{4}{m(y)} \frac{d^2 m(y)}{dy^2} \right], \quad (3)$$

其中 $V_{eff}(y)$ 为转变后的势函数, 即等效势场, $V(y)$ 为(1)式中原来的势函数, $V_m(y)$ 则是跟变质量分布有关的等效势场. 本文取零势场 $V(y)=0$, 这样等效势场则完全由变质量分布决定.

2 ATMM 透射率公式

对于变质量分布 Schrödinger 方程(1)式, 对在区

收稿日期: 2011-06-18

基金项目: 国家自然科学基金(60807014)资助项目.

作者简介: 桑明煌(1967-), 男, 江西德安人, 副教授, 硕士, 主要从事光学方面的研究.

间 $[0, s]$ 内任意连续的质量分布 $m(x)$ 和势函数 $V(x)$ 进行分层, 当分层数足够大时, 可以认为每层内质量与势均为常量. 由 $\psi(x)$ 及一阶导数 $\psi'(x)$ 在分层处连续, 推导出 ATMM 反射系数公式

$$r = \frac{r_{0l} + r_{ls} \exp\left[i2\int_0^s K(x)dx\right]}{1 + r_{0l}r_{ls} \exp\left[i2\int_0^s K(x)dx\right]}, \quad (4)$$

其中 $r_{0l} = \frac{m_l \kappa_0 - m_0 \kappa_l}{m_l \kappa_0 + m_0 \kappa_l}$, $r_{ls} = \frac{m_s \kappa_l - m_l \kappa_s}{m_s \kappa_l + m_l \kappa_s}$ 分别代表始点与末点处的反射系数. 根据 ATMM 定义, 总波矢

$$K(x) = \kappa(x) + \frac{q(\kappa m' - m \kappa')}{m(q^2 + \kappa^2)}$$

是由主波波矢 $\kappa(x) = \sqrt{2m(x)(E - V(x))}$ 和散射子波波矢 $\frac{q(\kappa m' - m \kappa')}{m(q^2 + \kappa^2)}$ 两部分组成. 值得一提的是, 子波项中 $q(x) = -\psi'(x)/\psi(x)$ 的求解看似与波函数相关联, 实际上并不需要求解波函数. 因此反射率与透射率则可以通过 $R = rr^*$ 和 $T = 1 - R$ 求得.

3 透射谱及结果分析

下面选取2种变质量分布粒子, 并计算其穿透自由势场的几率. 第1种变质量分布函数为

$$m(x) = \frac{1}{2(\alpha^2 x^2 + 1)^2}, \quad (5)$$

经过变换, 其等效势场为

$$V_{eff}(y) = \frac{2\alpha^2}{\cos^2 \alpha y} - \alpha^2, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (6)$$

(6)式为一势阱, 本征能量由下式给出

$$E_n^\pm = \alpha^2 \left(\left(\frac{4n+5 \mp 1}{2} \right)^2 - 1 \right), \quad (7)$$

其中上标 \pm 分别标志偶宇称与奇宇称. 等效势场的本征能量如表 1 所示.

表 1 等效势场的本征能量

$m(x) = \frac{1}{2(\alpha^2 x^2 + 1)^2} \quad (\alpha=1)$			$m(x) = \frac{1}{2(\alpha^2 x^2 + 1)^2} \quad (\alpha=2)$		
n	宇称	本征能量	n	宇称	本征能量
0	偶	3	0	偶	12
0	奇	8	0	奇	32
1	偶	15	1	偶	60
1	奇	24			
2	偶	35			
2	奇	48			

图 1 为第 1 种变质量分布图, 其中参数取 $\alpha=1, 2$, 其质量分布为单垒形式. 从图 2 中可以发现其透射率的共振峰恰好发生在等效势场的本征能量处. 将(5)式稍做改动, 使变质量分布为双垒结构, 即 $m(x) = 1/2(\alpha^2(x+\beta)^2 + 1)^2 + 1/2(\alpha^2(x-\beta)^2 + 1)^2$, 其质量分布也画在图 1 中, 其中参数取为 $\alpha=1, \beta=6$. 此时图 2 中透射率为 1 的点则一分为二, 可以推断其等效势场为双势阱形式, 所对应的本征能级也发生分裂.

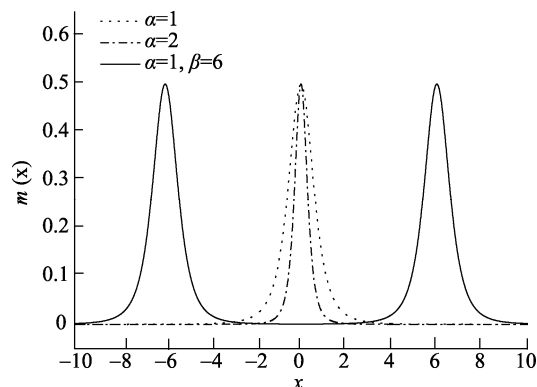


图 1 第 1 种变质量分布图

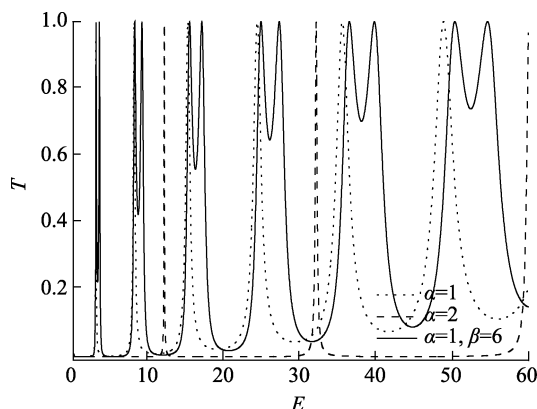


图 2 第 1 种变质量分布的透射谱

第 2 种变质量分布为

$$m(x) = \alpha^2 / (1 + x^2), \quad (8)$$

其等效势场则为

$$V_{eff}(y) = \frac{1}{8\alpha^2} \left[1 + \frac{1}{\cosh^2(y/\alpha)} \right], \quad (9)$$

(9)式为势垒, 是由 Pöschl-Teller 势垒加上一个常数组成, 其势垒最高值为 $V_{top} = 1/(4\alpha^2)$. 对于 $\alpha=1, 0.5, 0.2$, 势垒峰值分为 $V_{top} = 0.25, 1, 6.25$. 从图 3~图 4 中可以看出, 对于粒子入射能量小于垒高区间, 其透射率非常小. 而一旦入射能量大于垒高, 其透射率则在 1 附近震荡, 即出现所谓量子反射情形.

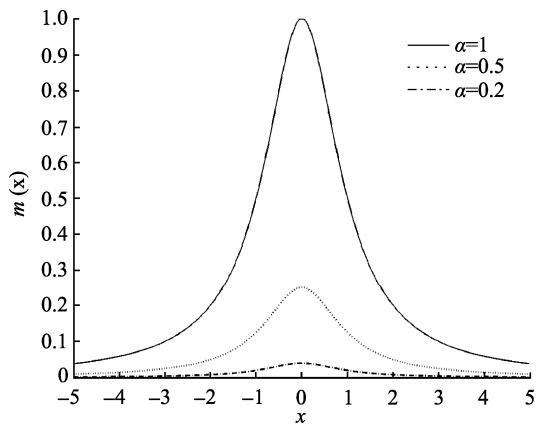


图 3 第 2 种变质量分布图

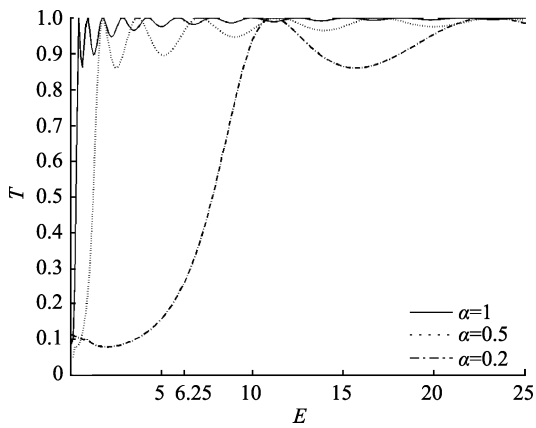


图 4 第 2 种变质量分布的透射谱

4 结论

本文将变质量分布粒子的透射谱与其等效势场联系起来, 发现等效势为势阱, 则在本征能量处透射率达到极大. 而为势垒时, 在粒子入射能量小于势垒高度区间, 透射率非常小, 一旦粒子能量大于垒高, 透射率则在 1 附近震荡.

5 参考文献

- [1] Bastard G. Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures [M]. Les: Ulis Les Editions de Physique, 1988.
- [2] Serra L I, Lipparini E. Spin response of unpolarized quantum dots [J]. Europhys Lett, 1997, 40(6): 667-672.
- [3] Arias de saaverda F, Boronat J, Polls A, et al. Effective mass of one ^4He atom in liquid ^3He [J]. Phys Rev B, 1994, 50(6): 4248-4251.
- [4] Barranco M, Pi M, Gatica S M, et al. Structure and energetics of mixed ^4He - ^3He drops [J]. Phys Rev B, 1997, 56(14): 8997-9003.
- [5] Puente A, Serra L I, Casas M. Dipole excitation of Na clusters with a non-local energy density functional [J]. Z Phys D, 1994, 31(4): 283-286.
- [6] Gonul B, Gonul B, Tutcu D, et al. Supersymmetric approach to exactly solvable systems with position-dependent effective masses [J]. Quantum Physics, 2002, 17: 2057-2066.
- [7] Mandal B P. Path integral solution of noncentral potential [J]. Int J Mod Phys A, 2000, 15(8): 1225-1234.
- [8] Roy B. Lie algebraic approach to singular oscillator with a position-dependent mass [J]. Europhys Lett, 2005, 72(1): 1-6.
- [9] Dong S H, Pena J J, Pacheco-Garcia C, et al. Algebraic approach to the position-dependent mass Schrödinger equation for a singular oscillator [J]. Mod Phys Lett A, 2007, 22(14): 1039-1045.
- [10] Mustafa O, Mazharimousavi S H. Quantum particles trapped in a position-dependent mass barrier; a d-dimensional recipe [J]. Phys Lett A, 2006, 358: 259-261.
- [11] Yu Jiang, Dong Shihai. Exactly solvable potentials for the Schrödinger equation with spatially dependent mass [J]. Phys Lett A, 2004, 325: 194-198.
- [12] Cao Zhangqi, Liu Qing, Shen Qishun, et al. Quantization scheme for arbitrary one-dimensional potential wells [J]. Phys Rev A, 2001, 63(5): 54103-54106.
- [13] Zhang Aihua, Cao Zhangqi. Tunneling coefficients across an arbitrary potential barrier [J]. J Phys A: Math Gen, 2000, 33(30): 5449-5456.
- [14] He Ying, Cao Zhangqi, Shen Qishun. Analytical formula of the transmission probabilities across arbitrary potential barriers [J]. J Phys A: Math Gen, 2005, 38(25): 5771-5780.
- [15] Su Pengyi, Cao Zhuangqi. Explicit expression for the reflection and transmission probabilities through an arbitrary potential barrier [J]. J Phys A: Math Theor, 2008, 41(46): 465301-465307.
- [16] Wen Yuan, Cheng Yi, Wang Xianping, et al. Quantum reflection as the reflection of subwaves [J]. Chin Phys B, 2010, 19(9): 93402.
- [17] Wang Xianping, Yin Cheng, Sang Minghuang, et al. Investigation on tunneling in optoelectronic devices with consideration of subwaves [J]. Sci Chin Ser G, 2011, 54(3): 388-392.

The Transmission Probability of Position-Dependent-Mass Particle Through the Free Potential Field

YU Zi-xing¹, LI Xin-hua², LI Cui-cui¹, SANG Ming-huang^{1*}

(1. College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. Xingzi Middle School, Jiujiang Jiangxi 332800, China)

Abstract: Based on the transmission formula derived from the analytical transfer matrix method, two cases of the transmission probabilities of the position-dependent-mass particle through the free potential field are calculated. Combined with the point canonical transformation, we conclude that the transmission probabilities are closely connected to the structure of their effective potential. If the effective potential is a well, the transmission resonance peaks lies exactly at the eigen-energies. If the effective potential is a barrier, the transmission probabilities are very low at the below-barrier energies and oscillating around 1 at the beyond-barrier energies.

Key words: the free potential field; position-dependent-mass particle; ATMM; transmission probability; point canonical transformation

(责任编辑: 冉小晓)

(上接第 78 页)

The Research on the Chaos Synchronization for Multi-Longitudinal Mode Semiconductor Laser

KE Qiang, HU Ju-ju

(College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The theory model for a multimode external semiconductor of unidirectional coupling with a single-mode semiconductor is proposed. the chaos synchronization between different longitudinal modes is investigated and the influence of the intrinsic parameters is analyzed. The results reveal that good synchronization quality for the longitudinal modes of matched frequency is achieved under other parameters matching, and that relatively good correlation maintains even if all the internal parameters are not matched, which indicating that it is completely feasible utilizing multimode synchronization to perform multiplexed optical chaos secure communication.

Key words: synchronization; multi-longitudinal mode semiconductor laser; single longitudinal mode semiconductor laser; parameters mismatch

(责任编辑: 冉小晓)