

文章编号: 1000-5862(2012)01-0087-05

# 一个新 4 维超混沌系统的行为特性及其同步

屈双惠, 吴淑花, 杨志宏, 于津江, 马志春

(石家庄学院物理学系, 电气信息工程系, 河北 石家庄 050035)

摘要: 提出了一个新的 4 维超混沌系统, 并对该系统的基本动力学特性进行了深入研究, 得到系统的 Lyapunov 维数, 给出了系统的时域图、相图、最大 Lyapunov 指数谱及其分岔图, 并用非线性反馈控制方法实现了该超混沌系统的同步. 根据系统的稳定性理论, 得到了非线性反馈控制器的结构和系统达到混沌同步时反馈控制增益的取值范围, 数值模拟结果验证了该方法的正确性.

关键词: 超混沌系统; Lyapunov 维数; 非线性反馈; 同步

中图分类号: O 415

文献标志码: A

## 0 引言

混沌属于非线性的范畴, 在现实生活和实际工程技术问题中, 混沌是无处不在的. 近年来, 国内外许多学者对混沌的特性进行了深入地分析和研究, 发现了许多新的混沌系统, 如Chen系统、Liu系统和Qi系统.

3维混沌系统结构较为简单, 在物理上实现容易, 但是这样的混沌系统用于数字信息加密工程领域的效果不是很好. 维数高于3维的混沌系统可以产生超混沌现象, 而利用超混沌同步进行保密通讯, 具有更好的保密性能. 因此, 构建高维超混沌系统并实现高维系统的混沌同步是一项具有实际意义的工作<sup>[1-3]</sup>.

本文构建了一个新的4维超混沌系统, 该系统含有多个参数. 通过分析系统的相图、Lyapunov维数、Poincare 映射图、最大Lyapunov指数谱以及分岔图研究了该系统的基本动力学特性. 提出了利用非线性反馈控制方法实现4维超混沌系统混沌同步的方法, 并通过数值仿真验证了该方法的有效性.

## 1 新超混沌系统的基本分析

### 1.1 新超混沌系统模型

本文构建的新超混沌系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by, \\ \dot{y} = cx - xz - dy - w, \\ \dot{z} = xy - mz - fx + gw, \\ \dot{w} = r(x^2 - w), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $a, b, c, d, m, f, g, r$  为实常数. 当参数  $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 5, m = 4, f = 4.5, g = 5, r = 20$  时, 系统存在一个典型的混沌吸引子.

### 1.2 理论分析

1.2.1 耗散性和吸引子的存在性 由于

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -a - d - m - r = \\ &= -20.5 - 5 - 4 - 20 = -49.5, \end{aligned}$$

当  $a + d + m + r > 0$  时, 系统(1) 是耗散的, 且以指数形式  $dV/dt = e^{-(a+d+m+r)t}$  收敛. 即体积元  $V_0$  在时刻  $t$  时收缩为体积元  $V_0 e^{-(a+d+m+r)t}$ , 这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨迹的每个体积元以指数率  $-(a + d + m + r)$  收缩到零. 因此, 所有系统轨迹线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

1.2.2 平衡点及稳定性 当参数  $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 5, m = 4, f = 4.5, g = 5, r = 20$  时, 令

$$\begin{cases} -ax + by = 0, \\ cx - xz - dy - w = 0, \\ xy - mz - fx + gw = 0, \\ r(x^2 - w) = 0, \end{cases}$$

收稿日期: 2011-11-16

基金项目: 河北省自然科学基金(A2010001942), 河北省教育厅科学研究计划项目(Z2010167)和河北省教育学会“十二五”规划课题(12110136)资助项目.

作者简介: 屈双惠(1978-), 女, 河北石家庄人, 讲师, 硕士, 主要从事凝聚态物理方面的研究.

可得到系统(1)的3个平衡点为:  $S_0(0,0,0,0)$ ,  $S_1(30.068\ 0, -5.183\ 4, -1.633\ 8, 15.993\ 6)$ ,  $S_2(31.111\ 9, 5.577\ 8, 1.662\ 0, 34.932\ 4)$ .

在平衡点  $S_0(0,0,0,0)$  对系统(1)进行线性化得到其Jacobian矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} -a & b & y & 0 \\ c-z & -d & x & -1 \\ y-f & x & -m & g \\ 2rx & 0 & 0 & -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20.5 & 68.8 & 0 & 0 \\ 42 & -5 & 0 & -1 \\ -4.5 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix},$$

令  $\det(J_0 - \lambda I) = 0$ , 得到平衡点  $S_0(0,0,0,0)$  相应的4个特征根分别为  $\lambda_1 = -4.0$ 、 $\lambda_2 = 41.560\ 8$ 、 $\lambda_3 = -67.060\ 8$ 、 $\lambda_4 = -20.0$ , 其中  $\lambda_2$  为正实根, 而  $\lambda_1$ 、 $\lambda_3$ 、 $\lambda_4$  都是负实根, 平衡点  $S_0$  为不稳鞍点.

在平衡点  $S_1$  采用同样的方法可得到相应的特征根为  $\lambda_1 = 35.467\ 1 + 39.895\ 0i$ 、 $\lambda_2 = 35.467\ 1 - 39.895\ 0i$ 、 $\lambda_3 = -60.217\ 1 + 27.637\ 9i$ 、 $\lambda_4 = -60.217\ 1 - 27.637\ 9i$ , 其中  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  是一对具有正实部的共轭复根,  $\lambda_3$ 、 $\lambda_4$  是一对具有负实部的共轭复根, 因而平衡点  $S_1$  是不稳焦点.

在平衡点  $S_2$  采用同样的方法也可得到相应的特征根为  $\lambda_1 = 35.550\ 8 + 43.360\ 0i$ 、 $\lambda_2 = 35.550\ 8 - 43.360\ 0i$ 、 $\lambda_3 = -60.300\ 8 + 27.964\ 8i$ 、 $\lambda_4 = -60.300\ 8 -$

$27.964\ 8i$ , 其中  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  是一对具有正实部的共轭复根,  $\lambda_3$ 、 $\lambda_4$  是一对具有负实部的共轭复根, 同  $S_1$ , 平衡点  $S_2$  也是不稳焦点.

由上述分析可知, 系统(1)的3个平衡点都是不稳定的, 其中  $S_0$  为不稳鞍结点; 而另外2个平衡点  $S_1$  和  $S_2$  都是不稳焦点.

### 1.3 混沌吸引子

系统(1)的参数为  $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 5, m = 4, f = 4.5, g = 5, r = 20$  时, 存在典型的混沌吸引子. 采用4阶龙格——库塔离散化算法, 得到新系统的混沌吸引子相图如图1所示, 该系统的奇怪吸引子与已有混沌系统的奇怪吸引子不同. 系统(1)的时域波形具有非周期性, 解的流对初始值极为敏感, 它的时域波形如图2所示.

### 1.4 Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

利用奇异值法计算系统(1)在参数  $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 5, m = 4, f = 4.5, g = 5, r = 20$  时的 Lyapunov 指数分别为:  $LE_1 = 3.212\ 0, LE_2 = 0.443\ 2, LE_3 = -20.587\ 9, LE_4 = -29.378\ 4$ . 该系统具有2个正的 Lyapunov 指数, 具有超混沌的特征. 新混沌系统的 Lyapunov 维数为

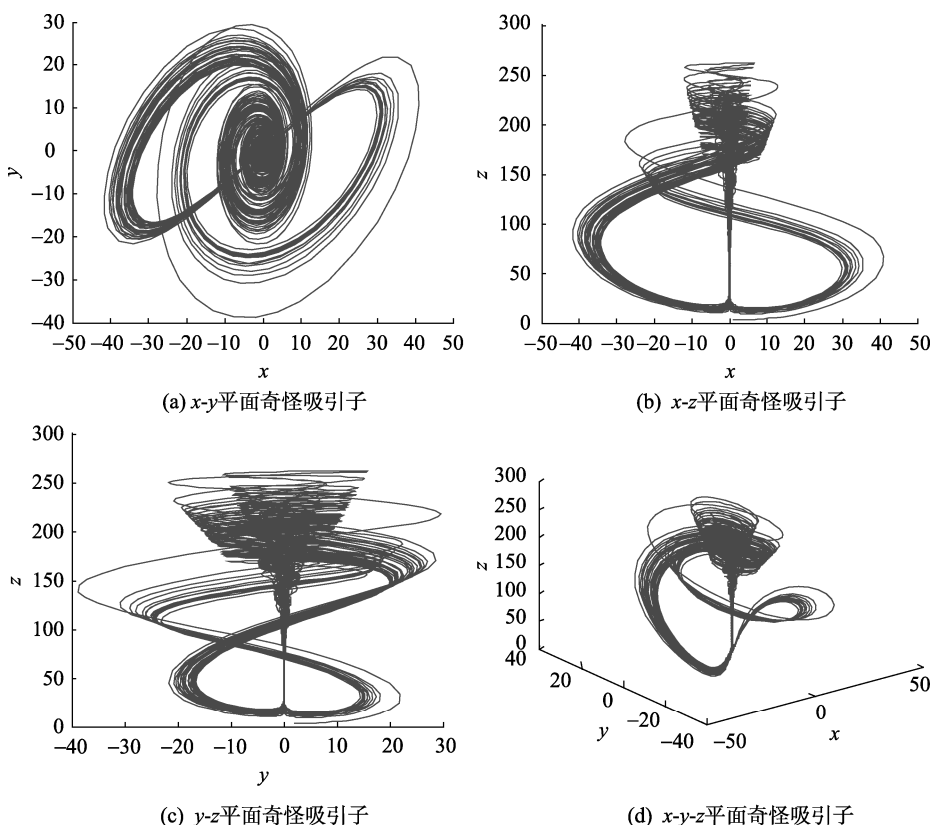


图1 新系统的奇怪吸引子图

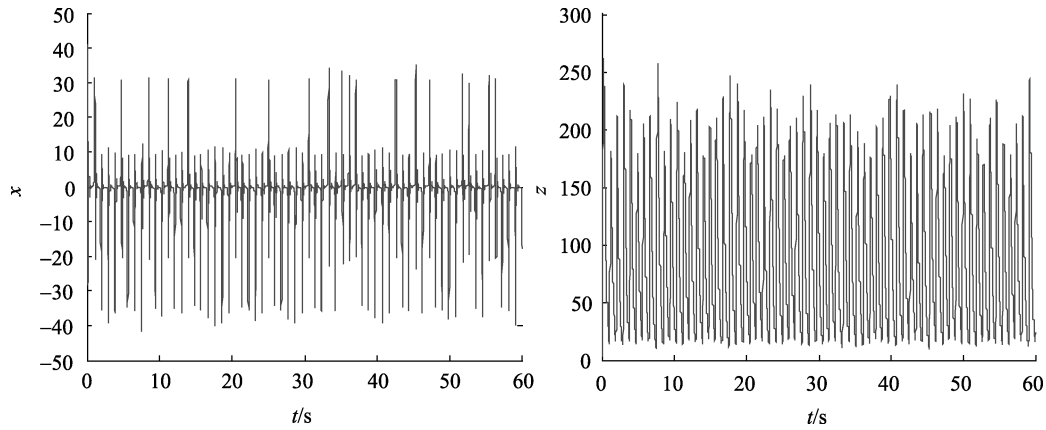


图 2 新系统的  $x$ 、 $z$  序列时域波形图

$$D_L = j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{i=1}^j LE_i = 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3 + LE_4|} = 2 + \frac{3.2120 + 0.4432}{20.5879 + 29.3784} = 2.0732,$$

新系统的Lyapunov维数为分数, 验证了该系统为混沌系统.

### 1.5 最大 Lyapunov 指数谱和分岔图

混沌吸引子的相邻轨线之间呈现出彼此排斥的趋势, 并以指数速率相互分离, 而Lyapunov指数是定量描述轨线彼此排斥和吸引的量, 特别是系统的最大Lyapunov指数, 是决定系统性质的重要特征量. 图3给出了在 $r$ 为 $[10, 26]$ 时, 系统的最大Lyapunov指数随参数 $r$ 的变化情况, 由图3可以看出, 当 $r > 15$ 时, 系统的最大Lyapunov指数 $> 0$ , 系统进入混沌状态, 在 $r$ 略大于15及 $r$ 为 $[22, 24]$ 的区域出现周期窗口. 图4给出了 $x$ 变量随参数 $r$ 变化时的分岔图, 与最大Lyapunov指数随 $r$ 的变化情况相一致.

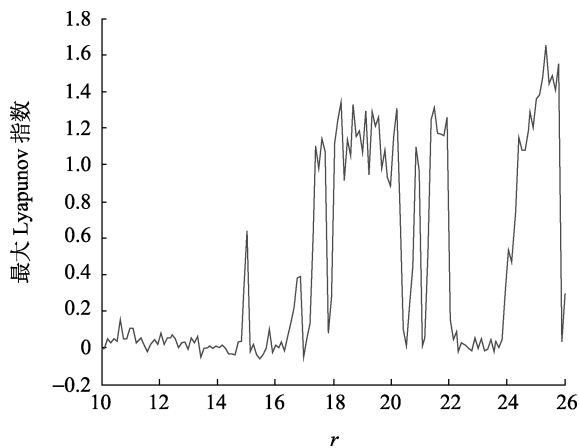


图 3  $r$  变化时新系统的最大 Lyapunov 指数谱图

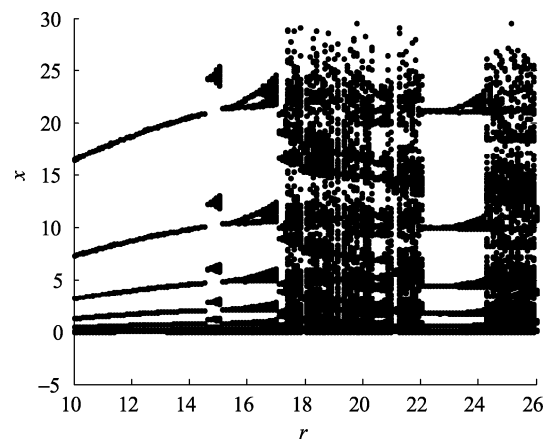


图 4  $x$  变量随  $r$  变化时的分岔图

选取 $y=0$ 的截面, 得到系统(1)的Poincaré截面图, 如图5所示. 从图5可以看出Poincaré截面上是一些成片的密集的点, 具有一定的分形结构. 一些叶片被反复折叠, 说明了该系统动力学行为的复杂性.

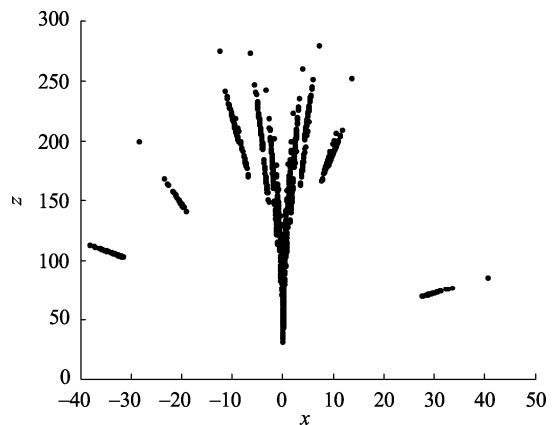


图 5 当  $y = 0$  时新系统的 Poincaré 映射图

## 2 新系统的混沌同步

### 2.1 理论分析

关于混沌同步控制的方法很多, 以下利用非线性反馈控制实现驱动系统与响应系统的混沌同步. 将(1)式的 4 维超混沌系统作为驱动系统, (1)式的复制系统作为响应系统. 将非线性反馈控制器  $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$  施加在响应系统上<sup>[4-7]</sup>, 则驱动系统方程和响应系统方程分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + by_1, \\ \dot{y}_1 = cx_1 - x_1z_1 - dy_1 - w_1, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - mz_1 - fx_1 + gw_1, \\ \dot{w}_1 = r(x_1^2 - w_1); \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -ax_2 + by_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = cx_2 - x_2z_2 - dy_2 - w_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - mz_2 - fx_2 + gw_2 + u_3, \\ \dot{w}_2 = r(x_2^2 - w_2) + u_4. \end{cases} \quad (3)$$

为了获得能够实现驱动系统与响应系统同步的非线性反馈控制函数, 令 2 个系统的误差变量为  $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1, e_4 = w_2 - w_1$ , (3)式减(2)式可得到误差系统和选取控制器分别为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + be_2 + u_1, \\ \dot{e}_2 = ce_1 - (e_1e_3 + x_1e_3 + z_1e_1) - de_2 - e_4 + u_2, \\ \dot{e}_3 = (e_1e_2 + x_1e_2 + y_1e_1) - me_3 - fe_1 + ge_4 + u_3, \\ \dot{e}_4 = r(e_1^2 + 2x_1e_1) - re_4 + u_4, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_1 = u_4 = 0, \\ u_2 = -ce_1 + e_1e_3 + x_1e_3 + z_1e_1 + e_4 + k_2e_2, \\ u_3 = -e_1e_2 - x_1e_2 - y_1e_1 + fe_1 - ge_4 + k_3e_3, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $k_2, k_3$  为待确定的反馈控制增益.

下面根据系统的稳定性理论确定在非非线性反馈控制作用下, 使驱动系统与响应系统实现混沌同步时反馈控制增益  $k_2, k_3$  的取值范围. 将(5)式代入(4)式并写成  $\dot{e} = A(t)e + O(e, t)$  的形式, 则误差系统方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - m & 0 \\ 2rx_1 & 0 & 0 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} re_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

由(6)式可知, 误差变量的零点是误差系统的平衡点, 根据非线性系统的线性化稳定性定理, 误差系统的线性矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - m & 0 \\ 2rx_1 & 0 & 0 & -r \end{pmatrix} \quad (7)$$

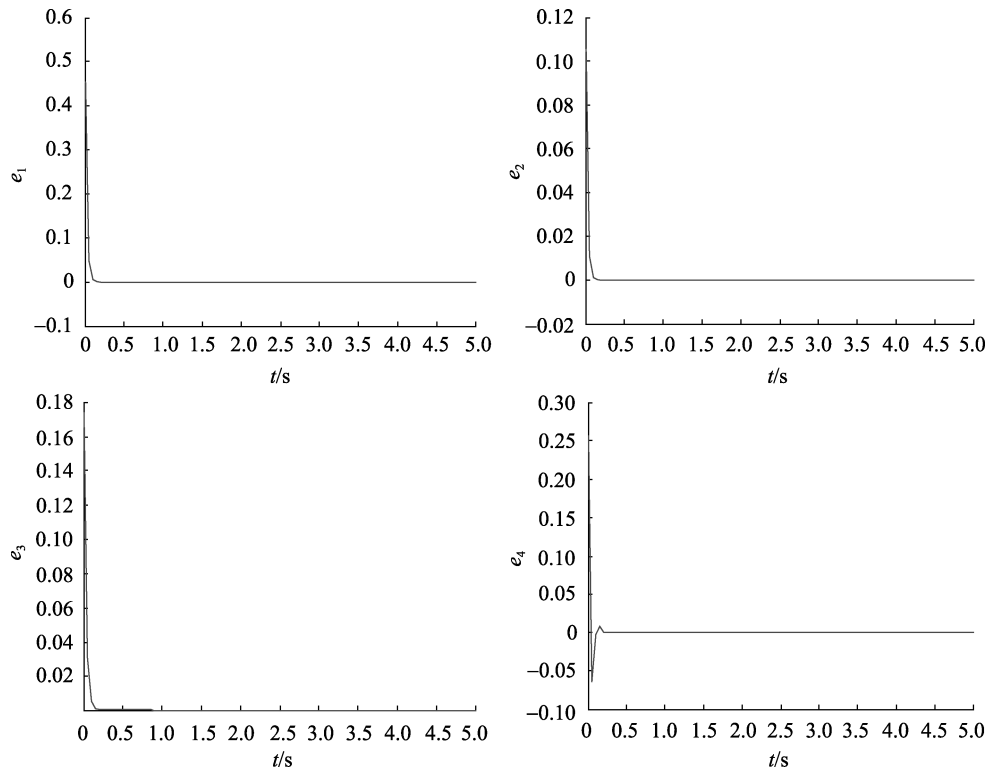
为时变矩阵. 由于系统处于混沌状态, 系统变量在一定的吸引域内变化, 因此  $A(t)$  对所有的  $t$  有界. 由(7)式可知, 当反馈控制增益满足  $k_2 < d, k_3 < m$  时, 矩阵的所有特征值都具有负实部, 因此线性系统  $\dot{e} = A(t)e + O(e, t)$  的零解一致渐进稳定. (6)式中误差系统的非线性项  $O(e, t) = (re_1^2 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  对所有的  $t$  有  $O(0, t) = 0$ , 且  $\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \|O(e, t)\|/\|e\| = 0$  对  $t$  一致成立, 所以误差系统(6)在其原点处渐进稳定, 也就意味着在非非线性反馈控制作用下驱动系统与响应系统达到混沌同步<sup>[8-10]</sup>.

### 2.2 数值模拟

用 Matlab 数值模拟驱动系统(2) 和响应系统(3)的同步过程, 选取系统参数  $a = 20.5, b = 68.8, c = 42, d = 5, m = 4, f = 4.5, g = 5, r = 20$ . 选取初始点  $x_1(0) = 1, y_1(0) = 1, z_1(0) = 1, w_1(0) = 1, x_2(0) = 2, y_2(0) = 2, z_2(0) = 2, w_2(0) = 2$ , 取反馈控制增益  $k_2 = 0.5, k_3 = 0.5$ . 同步误差曲线如图 6 所示, 由误差效果图可以看到, 在非非线性反馈控制器的作用下, 误差  $e_1, e_2, e_3, e_4$  都已稳定在零点, 即驱动系统(2)和响应系统(3)实现了混沌同步.

## 3 结论

本文提出的超混沌系统的数学模型结构简单, 但却存在着复杂的混沌动力学行为, 它具有一切混沌系统的共有特征. 利用非线性反馈控制方法实现了该 4 维超混沌系统的混沌同步, 非线性反馈控制器的结构简单易于实现, 达到混沌同步时反馈控制增益的取值范围容易确定. 该控制方法具有普适性, 可应用于其他参数未知的混沌系统同步控制中.

图 6 同步误差  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$ 、 $e_4$  随时间  $t$  的变化曲线

## 4 参考文献

- [1] 鲁池梅. 一个 4 维 4 翼混沌系统及其电路实现 [J]. 信息与电子工程, 2011(2): 229-233.
- [2] 刘明华, 冯久超. 一个新的超混沌系统 [J]. 物理学报, 2009, 58(7): 4457-4462.
- [3] 李春彪, 王翰康. 推广恒 Lyapunov 指数谱混沌系统及其演变研究 [J]. 物理学报, 2009, 58(11): 7514-7524.
- [4] 陈光平, 郝加波. 超混沌 Lorenz 系统的混合脉冲控制 [J]. 通信技术, 2008(7): 230-232.
- [5] 张若洵, 田钢, 栗苹. 一类参数不确定混沌系统的自适应同步 [J]. 物理学报, 2008, 57(4): 2073-2081.
- [6] 蔡国梁, 黄娟娟. 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rossler 系统的异结构同步 [J]. 物理学报, 2006, 55: 3997-4004.
- [7] 李响, 张荣. 参数不确定的超混沌系统自适应的投影同步 [J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2009(5): 613-616.
- [8] 徐江, 蔡国梁. 一个新的不确定超混沌 Lorenz 系统的自适应同步 [J]. 江苏科技大学学报: 自然科学版, 2009(3): 271-273.
- [9] 安新磊, 俞建宁. 分段超混沌 Chen 系统的混沌同步 [J]. 兰州交通大学学报, 2009, 28(1): 134-137.
- [10] 屈双惠, 杨志宏, 于津江, 等. 相加、复合混沌系统中参数的协调关系 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(2): 161-164.

# The Dynamic Properties and Adaptive Synchronization of a New Four-Dimensional Hyper-Chaotic System

QU Shuang-hui, WU Shu-hua, YANG Zhi-hong, YU Jin-jiang, MA Zhi-chun

(Department of Physics and Electrical Information Engineering, Shijiazhuang Normal College, Shijiazhuang Hebei 050035, China)

**Abstract:** A new four-dimensional chaotic system is reported. Basic dynamic properties of the new system are investigated via Lyapunov dimension, Lyapunov exponent, bifurcation and Poincare diagrams. Using nonlinear feedback control, a method of chaos synchronization between the hyperchaos system and its duplicate system is proposed. Based on the stability theory, the functions of the nonlinear feedback control are determined and the range of feedback gain is derived. The results of numerical simulations are provided to show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** hyperchaotic system; Lyapunov dimension; nonlinear feedback; synchronization

(责任编辑: 冉小晓)