

文章编号: 1000-5862(2012)02-0120-04

## 线性系统中随机共振现象的研究

孙万麟<sup>1</sup>, 山拜·达拉拜<sup>2</sup>

(1. 昌吉学院物理系, 新疆 昌吉 831100; 2. 新疆大学信息科学与工程学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 在高斯噪声同时作用系统阻尼系数和激励信号背景下, 研究了欠阻尼二阶线性系统中的随机共振现象. 研究表明, 欠阻尼二阶线性系统中存在随机共振现象, 该系统的平均输出幅度增益呈现非单调变化, 不仅在一定条件下大于无噪声时的增益, 而且调节适当的系统参数和噪声强度能够提高幅度增益. 最后, 进行了计算机模拟仿真, 证实了结论.

关键词: 随机共振; 高斯白噪声; 平均输出幅度增益; 检测

中图分类号: O 211.64

文献标志码: A

### 0 引言

传统抑制噪声的方法在抑制噪声的同时, 也损害了有用信号. 随机共振<sup>[1-4]</sup>的出现, 让人们意识到噪声存在不再是一件坏事, 有时它还会是某些非线性系统信号提取的有效激励. 由于随机共振现象的这个优越特性, 人们已经对许多领域存在的随机共振现象进行了研究. 近期的文献<sup>[5-8]</sup>研究表明, 随机共振现象不仅在很多非线性系统中观察到, 而且在线性系统中同样也发现了随机共振. 目前, 越来越多的人研究二阶过阻尼线性系统, 并且大都用输出幅值增益来描述其随机共振现象. 但实际问题中, 欠阻尼情况也是普遍存在的. 因此, 本文在欠阻尼条件下, 当系统的阻尼系数和激励信号均受高斯噪声干扰时, 详细研究了二阶线性系统中的随机共振现象.

### 1 模型

二阶阻尼线性系统<sup>[5]</sup>为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = A \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中  $\xi$  为系统的阻尼系数,  $\omega_0$  为系统的固有频率,  $A \cos(\omega t)$  为激励信号,  $A$  为激励信号的幅度,  $\omega$  为激励信号的频率.

当阻尼系数  $\xi$  和激励信号  $A \cos(\omega t)$  同时受高斯

噪声  $\eta(t)$  干扰时, 此时系统模型(1)式变为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi[1 + \eta(t)] \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = A\eta(t) \cos(\omega t), \quad (2)$$

其中  $\eta(t)$  为高斯噪声, 其均值与相关函数为

$$\begin{cases} \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta(t)\eta(t_1) \rangle = D\delta(t-t_1), \end{cases} \quad (3)$$

其中  $D$  为高斯噪声  $\eta(t)$  的强度,  $\delta(t)$  为单位冲激函数.

### 2 平均输出幅度增益

将(1)式推导计算, 得无噪声系统的平均输出幅度增益表达式为

$$G = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\xi\omega)^2}}. \quad (4)$$

根据(2)式, 整理为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = A\eta(t) \cos(\omega t) - 2\xi\eta(t) \frac{dx(t)}{dt}. \quad (5)$$

以(5)式中  $A\eta(t) \cos(\omega t) - 2\xi\eta(t) \frac{dx(t)}{dt}$  作为激励信号, 则  $x(t)$  的稳态解<sup>[5]</sup>为

$$\begin{aligned} x(t) &= [A\eta(t) \cos(\omega t) - 2\xi\eta(t) \frac{dx(t)}{dt}] \cdot h(t) = \\ &= \frac{1}{2\omega_1} \int_0^t [A\eta(u) \cos(\omega u) - 2\xi\eta(u) \frac{dx(u)}{du}] \cdot \\ & \quad [e^{c_1(t-u)} - e^{c_2(t-u)}] du, \end{aligned} \quad (6)$$

收稿日期: 2011-11-09

基金项目: 昌吉学院科研基金(2011YJYB004)资助项目.

作者简介: 孙万麟(1982-), 女, 甘肃白银人, 讲师, 硕士, 主要从事信号、图像处理及信息技术的研究.

其中  $\omega_1 = \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}$ ,  $c_{1,2} = -\xi \pm \omega_1$ . 对(6)式中变量  $t$  求一阶导, 可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\omega_1} \int_0^t [A\eta(u) \cos(\omega u) - 2\xi\eta(u) \frac{dx(u)}{dt}] \cdot [c_1 e^{c_1(t-u)} - c_2 e^{c_2(t-u)}] du. \quad (7)$$

把(6)式和(7)式代入(5)式右边的相应函数部分, 化简整理可得

$$d^2 x(t)/dt^2 + 2\xi \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = A\eta(t) \cos(\omega t) - \frac{\xi}{\omega_1} \int_0^t [A\eta(u) \eta(u) \cos(\omega u) - 2\xi \eta(t) \eta(u) \frac{dx(u)}{dt}] \cdot [c_1 e^{c_1(t-u)} - c_2 e^{c_2(t-u)}] du - \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} \int_0^t [A\eta(t) \eta(u) \cos(\omega u) - 2\xi \eta(t) \eta(u) \frac{dx(u)}{dt}] \cdot [e^{c_1(t-u)} - e^{c_2(t-u)}] du. \quad (8)$$

由 Shapiro-Loginov 公式和相关删去法<sup>[6-7]</sup>, 高斯噪声  $\eta(t)$  有如下表达式

$$\langle \eta(t) \eta(u) \frac{dx(u)}{dt} \rangle = \langle \eta(t) \eta(u) \rangle \langle \frac{dx(u)}{dt} \rangle. \quad (9)$$

利用(9)式对(8)式两边取平均, 可得

$$d^2 \langle x(t) \rangle / dt^2 + 2\xi \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + \omega_0^2 \langle x(t) \rangle = -\frac{\xi}{\omega_1} \int_0^t [A \langle \eta(t) \eta(u) \rangle \cos(\omega u) - 2\xi \langle \eta(t) \eta(u) \frac{dx(u)}{dt} \rangle] \cdot [c_1 e^{c_1(t-u)} - c_2 e^{c_2(t-u)}] du - \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} \int_0^t [A \langle \eta(t) \eta(u) \rangle \cos(\omega u) - 2\xi \langle \eta(t) \eta(u) \frac{dx(u)}{dt} \rangle] \cdot [e^{c_1(t-u)} - e^{c_2(t-u)}] du. \quad (10)$$

假设  $X(s)$  和  $F(s)$  分别表示  $\langle x(t) \rangle$  和  $A \cos(\omega t)$  的拉普拉斯变换, 对(10)式两边同时做拉普拉斯变换, 再把(3)式结果代入(10)式, 可得

$$[s^2 + (2\xi - 4\xi^2 D)s + \omega_0^2] X(s) = (-2\xi D) F(s). \quad (11)$$

对(11)式做拉普拉斯反变换, 可得

$$d^2 \langle x(t) \rangle / dt^2 + (2\xi - 4\xi^2 D) \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + \omega_0^2 \langle x(t) \rangle = (-2\xi D) A \cos(\omega t). \quad (12)$$

设(12)式方程的稳态解<sup>[8]</sup>为

$$\langle x(t) \rangle = B \cos(\omega t + \varphi). \quad (13)$$

把式(13)代入(12)式, 化简整理, 可得系统平均输出幅度增益为

$$G = \left| \frac{B}{A} \right| = \frac{2\xi D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega - 4\xi^2 \omega D)^2}}, \quad (14)$$

其中  $tg(\varphi) = \frac{2\xi\omega - 4\xi^2 \omega D}{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

### 3 数值分析

下面在欠阻尼情况下, 对高斯噪声作用下系统的输出幅度增益表达式(14)进行详细的数值分析,

并与无噪声系统的输出幅度增益表达式(4)进行比较, 如图1~图4所示, 其中  $G$  表示输出幅度增益、 $D$  表示噪声强度、 $\xi$  表示阻尼系数、 $\omega_0$  表示固有频率以及用  $\omega$  表示激励信号频率.

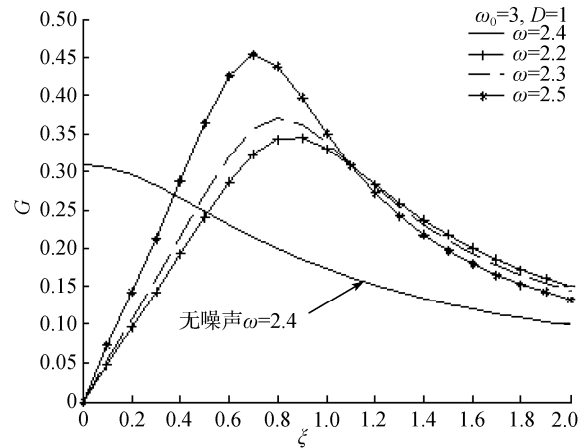


图 1 调节信号频率  $\omega$  大小,  $G$  与  $\xi$  的函数关系

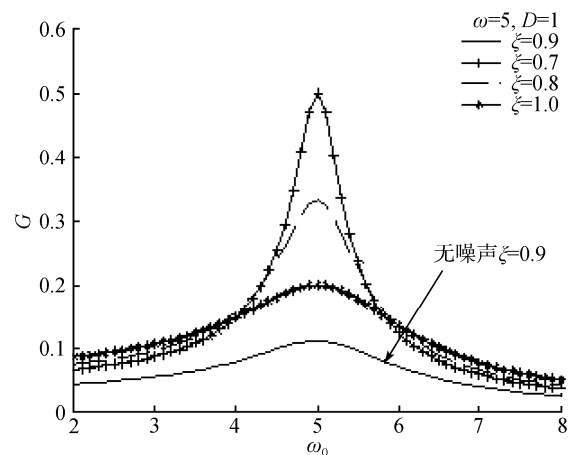


图 2 调节阻尼系数  $\xi$  大小,  $G$  与  $\omega_0$  的函数关系

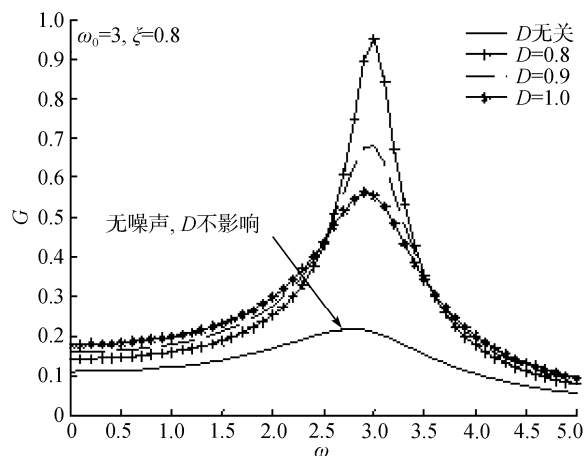


图 3 调节噪声强度  $D$  大小,  $G$  与  $\omega$  的函数关系

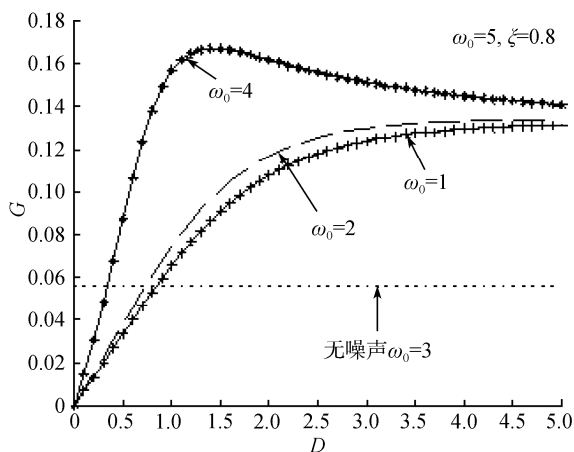


图 4 调节固有频率  $\omega_0$  大小,  $G$  与  $D$  的函数关系

信号频率  $\omega$  越大, 输出幅度增益  $G$  的共振峰越高, 并且  $G$  在达到最大值后下降得越快, 如图 1 所示.

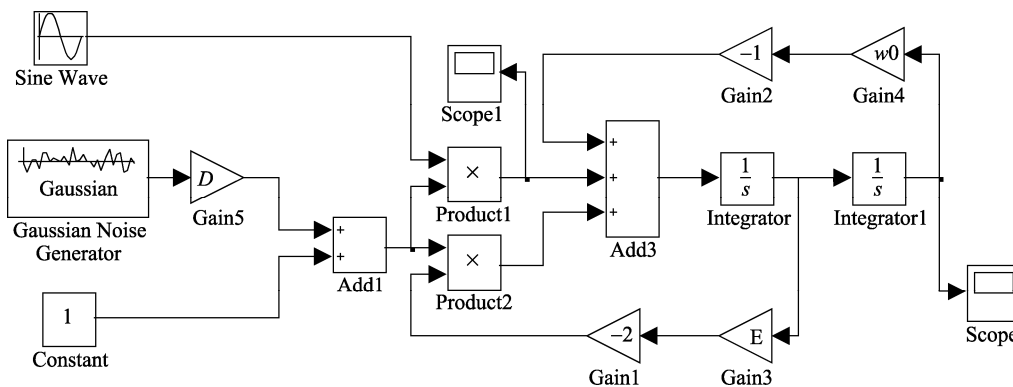


图 5 二阶线性系统的随机共振模拟图

件, 对(2)式进行了模拟仿真, 如图 5 所示.

为了研究方便, 根据数值分析部分, 模拟图 5 中各个变量选择如下: 以工程中经常碰到的正弦信号作为被测信号; 噪声是均值为 0、方差为 1 的高斯噪声; 固有频率  $\omega_0=3$ ; 仅调节阻尼系数  $\xi$  的大小,

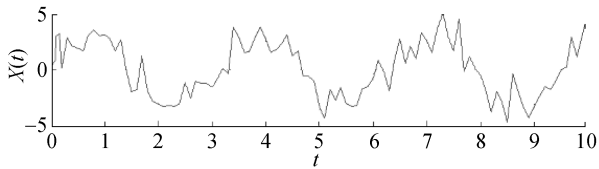


图 6 当  $D=1$ 、 $\omega_0=3$ 、 $\xi=0.1$  时的被测信号

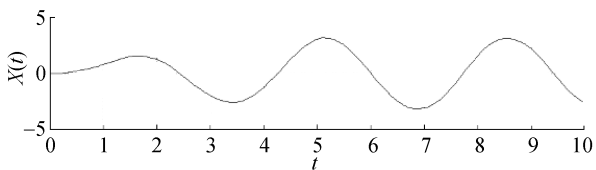


图 7 当  $D=1$ 、 $\omega_0=3$ 、 $\xi=0.3$  时的被测信号

输出幅度增益  $G$  的共振峰随着  $\xi$  或  $D$  增大反而减小, 如图 2 和图 3 所示. 从图 1~图 3 可知, 有噪声的输出幅度增益不仅大于无噪声的输出幅度增益, 而且调节适当的系统参数能使输出幅度增益增大. 因此, 有适当的噪声强度, 不但不会降低系统的输出幅值增益, 反而更有利于幅值增益的提高, 可以利用该特性在噪声环境检测和估计弱信号.

由图 4 可知, 无噪声系统的输出幅度增益没产生随机共振现象, 但有噪声的输出幅度增益中出现了最大值, 即产生了随机共振现象, 而且共振峰随着  $\omega_0$  增大而增大, 峰值位置也随  $\omega_0$  增大而右移.

### 4 仿真及其分析

利用 Matlab 配带的可视化仿真工具 Simulink 软

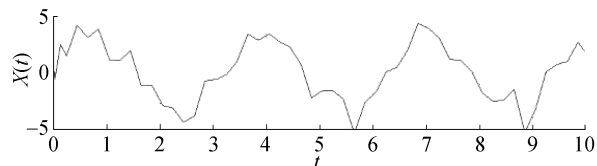


图 8 当  $D=1$ 、 $\omega_0=3$ 、 $\xi=0.5$  时的被测信号

系统输出波形如图 6~图 8 所示.

比较图 6~图 8 可知, 调节恰当的阻尼系数  $\xi$  ( $\xi=0.3$ ), 淹没在高斯噪声中的被测信号能够较好地恢复出来, 而且在波形上也有明显改善, 大大提高了信噪比, 如图 7 所示. 而阻尼系数  $\xi$  小于或大于 0.3, 输出逐渐失去了与输入的相关性, 如图 6~图 8 所示. 因此, 可以利用调节系统参数来调制系统的输出, 从而满足实际需要.

### 5 结论

本文研究了系统的阻尼系数和激励信号均受高

斯噪声干扰下, 二阶欠阻尼线性系统中的随机共振现象. 研究表明, 系统的平均输出幅度增益是关于激励信号频率、固有频率、阻尼系数及噪声强度的非单调函数, 在一定条件下, 不仅大于无噪声的输出幅度增益, 而且调节适当的系统参数能使输出幅度增益增大, 这对噪声环境中微弱信号的检测和估计具有一定的应用价值.

## 6 参考文献

- [1] Li Dongxi, Xu Wei, Guo Yongfeng, et al, Fluctuations induced extinction and stochastic resonance effect in a model of tumor growth with periodic treatment [J]. *Physics Letters A*, 2011, 375: 886-890.
- [2] Subramanyam R V P, Prasun K R. Magnetic resonance image enhancement using stochastic resonance in Fourier domain [J]. *Magnetic Resonance Imaging*, 2010, 28: 1361-1373.
- [3] Go Ashida, Masayoshi Kubo. Suprathreshold stochastic resonance induced by ion channel fluctuation [J]. *Physica D*, 2010, 239: 327-334.
- [4] Manuel Morillo, José Gómez-Ordóñez, José Manuel Casado. Equilibrium and stochastic resonance in finite chains of noisy bistable elements [J]. *Chemical Physics*, 2010, 375: 416-423.
- [5] 郭锋, 周玉荣, 蒋世奇, 等. 具有乘性噪声的线性系统的随机共振 [J]. *电路与系统学报*, 2008, 13(2): 6-8.
- [6] 郭锋, 周玉荣, 蒋世奇, 等. 具有乘性噪声的线性振荡器的随机共振 [J]. *电子科技大学学报*, 2008, 37(1): 77-80
- [7] 陈钦波, 周玉荣. 二值噪声作用下线性系统的随机共振 [J]. *噪声与振动控制*, 2009, 17(2): 23-26.
- [8] 蒋世奇, 古天祥. 随机振幅周期信号驱动的一阶线性系统的随机共振 [J]. *电子测量与仪器学报*, 2008, 22(1): 104-108.

# Study the Phenomenon of Stochastic Resonance in Linear System

SUN Wan-lin<sup>1</sup>, SENBAI Dalabaev<sup>2</sup>

(1. The Department of Physics, Changji College, Changji Xingjiang 831100, China;

2. School of Information Science & Engineering, Xinjiang University, Urumqi Xingjiang 830046, China)

**Abstract:** This article studies stochastic resonance of the under-damped second-order linear system, whose damping coefficient and the driving signal frequency is perturbed by the Gaussian white noise. Research shows that under-damped second-order linear system existed the phenomenon of stochastic resonance. This system presents the average output amplitude gain (OAG) under certain conditions, not only is greater than when no noise second-order linear system, but also adjusts the system parameters and noise intensity can improve the output amplitude gain. Finally, the computer simulation gives the corresponding results.

**Key words:** stochastic resonance; Gaussian white noise; OAG; detection

(责任编辑: 冉小晓)