

文章编号: 1000-5862(2012)02-0127-04

混沌系统周期窗口的计算方法

吴淑花, 屈双惠, 于津江, 马志春

(石家庄学院物理与电气信息工程系, 河北 石家庄 050035)

摘要: 阐述了混沌系统周期窗口的形成及结束过程, 分别利用切分岔定理、符号动力学法、数据位移迭代法和李雅普诺夫指数法对周期窗口进行了详细的计算, 以便对周期窗口的位置、宽度、排序等规律进行进一步的研究.

关键词: 混沌系统; 周期窗口; 计算方法

中图分类号: O 545

文献标志码: A

0 引言

自然现象和社会现象是很复杂的, 一般不能简单地用线性方程来描述其动力学规律, 而必须用非线性动力学方程来描述. 自 20 世纪 60 年代以来, 非线性科学得到了长足的发展, 在理论和应用 2 个方面不断取得重要突破, 尤其在混沌控制与同步的研究方面, 不仅丰富了混沌理论, 而且在非线性电路、保密通信、生物科学、激光技术、等离子体和强流离子束等众多学科领域已取得初步成果, 成为当前研究非线性科学的前沿课题和学术焦点^[1-3]. 然而, 对非线性系统的基础性研究工作至今仍然较少.

系统从确定性运动向混沌运动过渡主要有 4 种途径: 倍周期分岔、阵发道路、准周期道路和 KAM 环面破裂. 在混沌区域中存在着许多周期性窗口, 其位置、宽度、排序具有一定的规律. 对于混沌系统的基础性研究工作, 周期窗口的形成及其计算是必须要研究的内容之一. 有部分学者对周期窗口的计算进行了研究, 提出了利用临界点求离散动力系统混沌区内的 K 周期窗口的方法^[4]; 基于离散系统, 运用 Feigenbaum 原理、MSS 序列精确计算倍周期分岔点及 10 周期以内的超稳定周期点^[5-7]; 提出一类无限折叠的 1 维迭代混沌映射, 研究其随自身参数变化而呈现规律性的周期窗口的特性^[8]等. 以上研究均是对离散系统的分岔点或稳定周期点的计算,

没有涉及到周期窗口形成、窗口的 2 个边值及其宽度. 本文就此问题展开, 揭示了混沌窗口的形成及结束过程, 并提出了多种计算周期窗口 2 个边值的方法, 分析比较各种方法的优劣特点, 为深入研究周期窗口的理论奠定了基础.

1 混沌周期窗口的形成及结束过程

系统进入混沌状态后, 整个系统呈现貌似混乱的状况. 但是, 在混沌区域的范围内仍然存在着有序的成分——周期窗口. 混沌周期窗口的形成具有共性, 现以 Logistic 平方映射为例分析混沌系统周期窗口的形成、结束.

如图 1 所示, 在 Logistic 平方映射的混沌行为中, 以 3P 窗口为例, 当系统参数增加到 3.82 附近时, 系统逐步进入阵发混沌即这种在切分岔情况下由于参数值 μ_c 紧靠临界值而引起的过程(μ_c 为出现 3P 窗口时参量 μ 在切分岔点的取值). 由图 2 可知, 当系统参数 μ 略小于 μ_c 时, $f^{(3)}(x, \mu)$ 与分角线除了在 C 点相交外, 无其它交点, $f^{(3)}(x, \mu)$ 与分角线之间形成包含 3 条狭缝的通道. 在迭代过程中, 当一个轨道点落入到某一条狭缝“入口”附近时, 它必须再经历许多次迭代, 才能从狭缝中穿过, 这一组迭代点在数值上很接近, 近似于周期运动. 在迭代走出通道又回到原通道的过程中, 由于每次进入原通道的位置不可能完全相同, 这样的过程不可能是严格重复原来过

收稿日期: 2011-12-16

基金项目: 河北省自然科学基金(A2010001942), 河北省教育厅科学研究计划(Z2010167)和河北省教育学会“十二五”规划课题(12110136)资助项目.

作者简介: 吴淑花(1968-), 女, 河北正定人, 副教授, 主要从事混沌及其控制方面的研究.

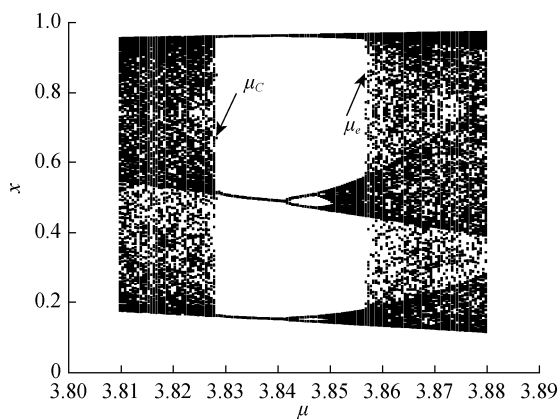
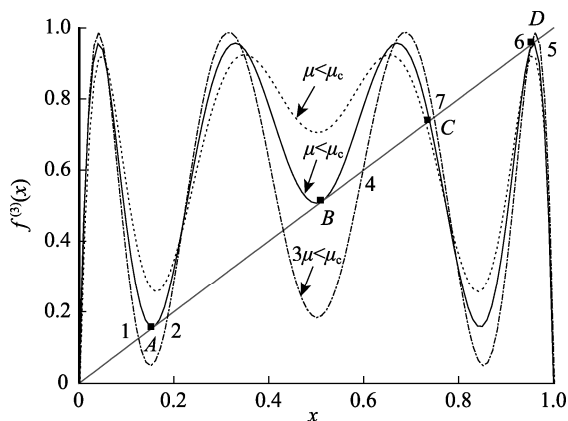


图1 平方映射中的周期3窗口

图2 周期3窗口 μ_c 附近 $f^3(x)$ 曲线

程的周期振荡,因而在 μ 略小于 μ_c 处引起具有随机性振荡的间歇混沌行为,即3P窗口左侧的混沌带.当 $\mu = \mu_c$ 时, $f^{(3)}(x, \mu)$ 与分角线在A、B、D3点相切;当 $\mu > \mu_c$ 时, $f^{(3)}(x, \mu)$ 与分角线相交,切点A、B、D变为6个交点,其中1、3、5共3点是稳定的,2、4、6共3点是不稳定的.当系统参数 μ 增大到某一数值时,3个稳定交点的周期轨道又开始次倍周期分岔,并且各自逐渐进入混沌状态,但此刻系统仍处于3P窗口的范围之内.继续增大系统参数 μ 到某一数值时,3个不稳定交点的周期轨道与次倍周期分岔所形成的混沌带相遇,3个次级混沌带突然连成一个混沌带(发生边界激变),出现混沌危机,此时3P窗口结束,系统重新进入混沌状态^[9-10].

2 混沌周期窗口的计算方法

由此可见,间歇混沌的结束标志着混沌周期窗口的开始,切分岔点 μ_c 即3P窗口周期轨道的起始点,为3P窗口的左边缘(窗口的起始位置);而混沌危机的出现,意味着混沌周期窗口的结束,为周期

窗口的右边缘(窗口的结束位置).利用切分岔定理、符号动力学方法可分别精确地计算出周期窗口的起始和结束位置.

2.1 切分岔定理算法

由图2可以看到,切分岔点 μ_c 为 $f^{(3)}(x, \mu)$ 与分角线相切时的系统参数值.根据 $f^{(3)}(x, \mu)$ 与分角线相切,有

$$f^{(3)}(x, u) = x, \quad (1)$$

根据切分岔定理中的临界条件,有

$$\frac{\partial}{\partial x} f^{(3)}(u, x) = 1. \quad (2)$$

联立(1)~(2)式可求解切分岔点 u_c .以Logistic平方映射为例,可得到3P窗口的起始点 $\mu_c = 3.82843$.

2.2 符号动力学算法

混沌危机的出现意味着混沌周期窗口的结束,对于Logistic映射的周期3窗口的结束过程,可利用实用符号动力学,将3P窗口后面3带并为1带的激变点的揉序列 $RLL(RLR)^\infty$,“提升”成对方程(3).只要给定映射 f 及其逆,就可以计算参量 μ 和辅助量 v 的值.

$$\begin{aligned} f(C) &= R \circ L \circ L(v), \\ v &= R \circ L \circ R(v). \end{aligned} \quad (3)$$

对于Logistic映射 $y = f(x, u) = ux(1-x)$,其2支逆函数分别为

$$\begin{aligned} R(y) &\equiv f_R^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u}y}, \\ L(y) &\equiv f_L^{-1}(y) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u}y}, \end{aligned} \quad (4)$$

而临界点 $C = 1/2$,即 $f(C) = u/4$.将(4)式代入(3)式,这一对方程具体化为

$$\begin{aligned} \frac{u}{4} &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u}v} \right)} \right)}, \\ v &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u}v} \right)} \right)}. \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式改写成迭代关系

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} v_n} \right)} \right)} \right), \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{u_n} v_n} \right)} \right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

利用matlab数值仿真,迭代过程很快收敛到

$u = 3.856\ 80, v = 0.952\ 575$, 即 $\mu_e = 3.856\ 80$ [11-13].

对于其它的混沌周期窗口, 如周期 5P、7P、... 窗口, 以及二带混沌中的 $2 \times 3P$ 、 $2 \times 5P$ 、 $2 \times 7P$ 、... 窗口, 其情况类似, 同样可采用以上方法精确求得窗口的起止位置.

有时为了研究窗口性质方便, 可先粗略估算出窗口的位置, 再进行详细的研究. 下面再提供 2 种粗略估算窗口位置的简便方法.

2.3 数据位移迭代算法

混沌是非线性系统的最典型行为, 它起源于非线性系统对初始条件的敏感依赖性, 而离散混沌系统的周期窗口是在混沌区内出现的周期性运动行为. 可以利用 2 组迭代数据求差值的方法确定混沌窗口. 在混沌窗口附近做 2 组迭代数据点 $\{x_{1i}\}$ 和 $\{x_{2i}\}$, 取参数 μ 的范围及步长相同, 初始取值不同. 由于混沌系统对初值的敏感性, 这 2 组迭代数据在进入窗口前的混沌带上处于不同的混沌轨道, 进入窗口后, 由于其周期状态不依赖于初始取值, 迭代步入相同轨道, 如将这 2 组迭代数据相减可确定窗口位置 [14].

在进入窗口前的混沌地带, 差值仍为不确定值; 进入混沌窗口以后, 由于在精度允许范围内 2 组迭代几乎步入相同轨道, 2 组迭代数据点的差值极接近零, 由此可确定混沌窗口的起始位置 u_c . 随后, 随系统参数 μ 的增大, 迭代进入窗口内的次级混沌带, 由于精度有限, 经窗口内的倍周期分岔后, 2 组迭代在进入次级混沌带时的初始值略有不同, 鉴于混沌运动对初始条件的敏感依赖性, 初始值的微小差别即可导致 2 组迭代出现无法预知的偏差, 此时 2 组迭代数据点的差值将有所分立. 随系统参数 μ 的继续增大, 3 个不稳定交点的周期轨道与次倍周期分岔所形成的混沌带相遇, 3 个次级混沌带突然连成一个混沌带(发生边界激变), 出现混沌危机, 此时 2 组迭代数据点的差值出现明显差异, 标志着 3P 窗口的结束, 系统重新进入混沌状态, 此时的系统参数值即窗口的结束点 u_e .

仍以 Logistic 平方映射的 3P 窗口为例, 在 3P 窗口附近, 取 $\mu \in (3.810, 3.880)$, 步长为 0.001, 分别取初始值 $x_{10} = 0.400$, $x_{20} = 0.500$, 得到 2 组数据点 $\{x_{1i}\}, \{x_{2i}\}$. 2 组数据对应相减得 $F(\Delta x_i, \mu) = \{\{x_{1i}\} - \{x_{2i}\}, \mu\}$, 图 3 给出了 Logistic 平方映射的 3P 窗口的 $F(\Delta x_i, \mu) \sim \mu$ 数据位移迭代图, 由图 3 可以清晰看出窗口开始和结束的位置.

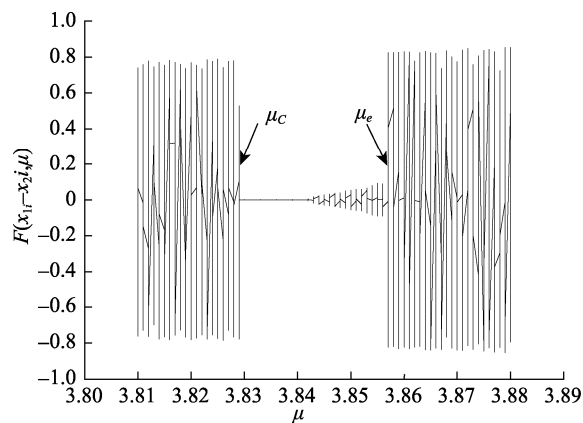


图 3 数据位移迭代图

2.4 Lyapunov 指数算法

Lyapunov 指数作为表达混沌运动的典型表达方式, 清楚地描绘出混沌系统的行为走向、周期窗口的位置与其运动规律. 运用 Lyapunov 指数的这些特点, 也可以计算出周期窗口的起始、终止位置. 根据 Lyapunov 指数的性质, 可写出如下的定义形式

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |dF/dx|. \quad (7)$$

计算 Logistic 映射周期 3 窗口附近的 Lyapunov 指数谱(如图 4 所示), 当 $\lambda < 0$ 时表示相邻 2 点终究要靠拢合并成 1 个点, 此时对应于不动点和周期运动; $\lambda > 0$ 时, 对应于混沌运动. 那么当 Lyapunov 指数的符号发生变化时, 则意味着混沌窗口的开始和结束(在混沌带内). 当 Lyapunov 指数由正值变为负值时, 标志周期窗口开始, 对应的 u 值为周期窗口的起始点 μ_c . 当 Lyapunov 指数由负值变为正值时, 并不意味着周期窗口结束, 因为周期窗口中存在着次混沌带. 从图 4 可以观察到, 在周期 3P 窗口中指数线越过零线很小的部分与次级混沌带相对应, 而

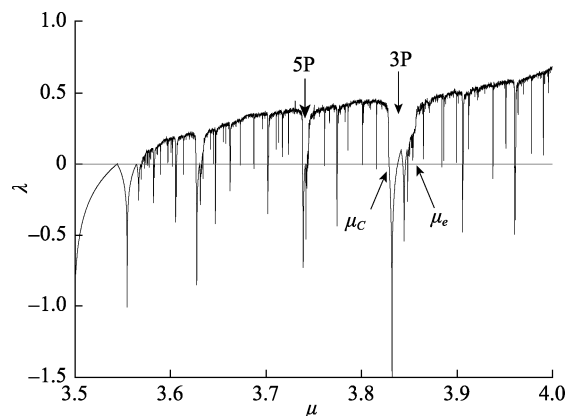


图 4 Lyapunov 指数谱

混沌危机应与 Lyapunov 指数发生很大跳跃相对应, 对应的 u 值为周期窗口的结束点 u_e [15-16].

2.5 4 种方法的优劣比较

以上 4 种方法各有优劣: 利用切分岔定理和符号动力学方法可以精确地计算出窗口的起始和终止位置, 但需要计算机编程, 尤其较高级的窗口计算更为复杂. 前 2 种方法多用于精确计算, 研究周期窗口的位置、宽度、排序等规律特点; 通过计算机数值模拟, 利用数据位移迭代法和 Lyapunov 指数谱法, 比较形象简单, 但测量窗口的位置时易出现较大误差. 后 2 种方法多用于研究系统随自身参数变化呈现较为丰富的动力学行为, 通过图示展示系统混沌或周期的大体位置.

3 结论

周期窗口的形成是非线性动力学系统的必然产物, 它体现了混沌行为的很多特点, 是研究混沌基础理论必要的内容. 本文揭示了周期窗口的形成及结束过程, 提出并分析了 4 种计算周期窗口的方法, 为进一步研究周期窗口的规律奠定了基础.

4 参考文献

- [1] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 258-264, 227-228.
- [2] 王安福, 王绍明. 利用第二个状态量控制和同步 Liu 混沌系统 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(4): 383-387.
- [3] 关鹏, 张荣. 半群作用的 Devaney 混沌 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2008, 32(1): 32-35.
- [4] 江成顺, 涂慧. 动力系统临界点性质与混沌行为研究 [J]. 信息工程大学学报, 2004, 5(2): 130-132.
- [5] 马垣. 关于 Feigenbaum 图中的暗线 [J]. 鞍山师范学院学报, 2003, 5(2): 80-84.
- [6] 廖欣, 陈良生, 尚子扬, 等. 基于混沌动力学结构二岔树结构的新方法 [J]. 控制工程, 2002, 9(6): 28-30.
- [7] 李志勇, 廖欣, 陈良生, 等. 计算机构造 MSS-序列及超稳定周期点 [J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2002, 23(12): 1127-1130.
- [8] 何迪, 何晨, 胡光锐, 等. 无限折叠混沌映射的周期窗口分析及其均匀分布特性检验 [J]. 电子学报, 2001, 29(10): 1430-1432.
- [9] 周平. 一个新离散非线性系统的混沌现象 [J]. 重庆邮电学院学报: 自然科学版, 2001(1): 84-85.
- [10] 屈双惠, 杨志宏, 于津江, 等. 一类混沌系统动力学行为的突变分析 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2010(9): 58-61.
- [11] 郑伟谋, 郝柏林. 实用符号动力学 [J]. 物理学进展, 1990(3): 315-320.
- [12] 郝柏林. 从抛物线谈起: 混沌动力学引论 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995: 107-118.
- [13] 冯明库, 刘炽辉, 刘雄英. 离散混沌系统类随机性的符号熵分析法 [J]. 计算机应用, 2009(9): 2548-2553.
- [14] 姚明海, 齐冬莲. 基于李雅普诺夫指数的离散混沌系统的控制研究 [J]. 控制与决策, 2002(2): 171-174.
- [15] 张晓丹, 刘翔, 赵品栋. 一类延迟混沌系统沿主轴方向上 Lyapunov 指数的计算方法 [J]. 物理学报, 2009(7): 4415-4419.
- [16] 于津江, 张明轩, 许海波. 对称混沌系统的非线性动力学行为及控制 [J]. 物理学报, 2004(11): 3701-3705.

The Calculation Methods about Periodic Window in Chaotic System

WU Shu-hua, QU Shuang-hui, YU Jin-jiang, MA Zhi-chun

(Department of Physics and Electrical Information Engineering, Shijiazhuang Normal College,
Shijiazhuang Hebei 050035, China)

Abstract: Using the method of bifurcation theorem, symbolic dynamics, data displacement iteration and Lyapunov exponents, the position of where the periodic windows form and end is given, it's useful for the further study about the periodic window's position, width, compositor and so on.

Key words: chaos system; periodic window; calculation method

(责任编辑: 冉小晓)