第 36 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No.2
2012 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　　Mar. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)02-0141-06

亚纯函数及其导数分担小函数集的唯一性

赵小珍

(宁德师范学院数学系，福建 宁德 352100)

摘要：研究了亚纯函数及其 k 阶导数权分担小函数集的唯一性，得到了：设 k,n 为正整数，f,g 为开平面上超越亚纯函数，以 ∞ 为 IM 公共值，$E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且 $E_l(S_2,f^{(k)})=E_l(S_2,g^{(k)}),l(\geqslant 2)\in\mathbf{N}$，如果 $2n\delta_{2+k}(a^n,f^n)+(nk+4)\Theta(\infty,f)>n(k+1)+4$，则 $f\equiv tg(t^n=1)$ 或 $[(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n][(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n]\equiv[b^n-(a^{(k)})^n]^2$，并且文中还讨论了当 $l=0,1$ 时的情形. 这些定理推广和改进了先前的一些结果.

关键词：亚纯函数；弱权分担；小函数；唯一性

中图分类号: O 174.52　　　文献标志码: A

0 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论中的常用记号及基本结果[1-2]，如未特别说明，文中f与g均为开平面上非常数亚纯函数，称另一亚纯函数 $a(z)$ 为 f 和 g 的小函数，如果 $T(r,a)=S(r,f)$ 且 $T(r,a)=S(r,g)$. 设 f 为非常数亚纯函数，k 为正整数，用 $N_{1)}(r,1/(f-a))$ 表示 $f-a$ 的单级零点的计数函数，$\overline{N}_{k)}(r,1/(f-a))$ 表示 $f-a$ 的重数 $\leqslant k$ 的零点的计数函数，每个零点只计 1 次. 此外，$S(r,f)$ 表示 $S(r,f)=o(T(r,f))(r\to\infty,r\notin E)$，这里 E 表示线性测度为有限的集合. 令

$$\delta_k(a,f)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N_k(r,1/(f-a))}{T(r,f)},$$

$$\Theta(a,f)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,1/(f-a))}{T(r,f)},$$

这里

$$N_k\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\overline{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\cdots+\overline{N}_{(k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right).$$

令 $S:=S(f)\bigcap S(g)$ 为 f 和 g 的小函数构成的有穷集合，使用以下记号及定义[3].

$E(S,f)=\bigcup_{a\in S}\left\{z\middle|f(z)-a=0\right\}$ 表示集合 S 关于 f 的原象，计重数；类似地有 $E(S,g)$；$\overline{E}(S,f)$ 表示与 $E(S,f)$ 相同的点集，但不计重数；$E_k(S,f)$ 表示与 $E(S,f)$ 相同的点集，其中一个 m 重零点在 $E_k(S,f)$ 中计 $\min(m,k+1)$ 次，同样也有 $E_k(S,g),\overline{E}(S,g)$.

$\overline{N}_0(r,a)$ 表示 $f-a$ 与 $g-a(a\in S)$ 的公共零点的计数函数，每个零点只计 1 次.

$\overline{N}_E(r,a)$ 表示 $f-a$ 与 $g-a(a\in S)$ 重数相同的公共零点的计数函数，每个零点只计 1 次.

定义1 (i) 如果

$$E(S,f)=E(S,g)(\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,\ g)),$$

则称 f 与 g $CM(IM)$ 分担集合 S；

(ii) 如果

$$\overline{N}(r,1/(f-a))-\overline{N}_0(r,a)=S(r,f),$$
$$\overline{N}(r,1/(g-a))-\overline{N}_0(r,a)=S(r,g),$$

则称 f 与 g "IM"分担值 a；

(iii) 如果

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\overline{N}_0(r,a)\equiv\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)-\overline{N}_0(r,a)\equiv 0,$$

则称 f 与 g IM 分担值 a.

将上述定义(ii), (iii)中 $\overline{N}_0(r,a)$ 换为 $\overline{N}_E(r,a)$，则分别得到 f 与 g "CM"和 CM 分担值 a 的概念.

定义 2 若 2 个非常数的亚纯函数 f,g "IM"分担 $a,a\in S,k$ 为正整数或 ∞，有 $\overline{N}_0^{(k}(r,a)$ 表示 $f-a$ 与 $g-a(a\in S)$ 重数不小于 k 的公共零点的计数函数，

收稿日期：2011-11-07

基金项目：福建省教育厅 A 类科技(JK2010062)，福建省高校科研(JA11276)和宁德师范学院重点课题(2010003)资助项目.

作者简介：赵小珍(1976-)，女，福建霞浦人，讲师，硕士，主要从事复分析的研究.

每个零点只计 1 次. $\overline{N}_0^{k)}(r,a)$ 表示 $f-a$ 与 $g-a(a\in S)$ 重数相同且小于或等于 k 的公共零点的计数函数, 每个零点只计 1 次.

定义 3 若 $a\in S,k$ 为正整数或 ∞. 如果

$$\overline{N}_{k)}\big(r,1/(f-a)\big)-\overline{N}_E^{k)}(r,a)=S(r,f),$$
$$\overline{N}_{k)}\big(r,1/(g-a)\big)-\overline{N}_E^{k)}(r,a)=S(r,g);$$
$$\overline{N}_{(k+1}\big(r,1/(f-a)\big)-\overline{N}_0^{(k+1}(r,a)=S(r,f),$$
$$\overline{N}_{(k+1}\big(r,1/(g-a)\big)-\overline{N}_0^{(k+1}(r,a)=S(r,g),$$

那么称 f 与 g 弱权分担 $a(z)$, 并记为 f,g 分担 "(a,k)".

显然, 如果 f,g 分担 "(a,k)", 那么对于 $0\leqslant p\leqslant k, p\in\mathbf{N}_+$, 有 f,g 分担 "(a,p)"; 另外, 由定义 3 有, f,g "IM" ("CM") 分担 a 可记为 f,g 分担 "$(a,0)$"("(a,∞)").

杨重骏在文献[4]中提出如下问题:

设 f 与 g 为非常数整函数, 以 0 为 CM 公共值, f' 与 g' 以1为 CM 公共值, 问 f 与 g 之间有何种关系?

仪洪勋在文献[5]中回答了这一问题, 证明了下述定理.

定理 A 设 f 与 g 为非常数整函数, 以 0 为 CM 公共值, f' 与 g' 以 1 为 CM 公共值, $\delta(0,f)>1/2,n$ 为一正整数, 则 $f^{(n)}\cdot g^{(n)}\equiv 1$ 或者 $f\equiv g$.

袁文俊在文献[6]中也研究了这一问题:

设 f 与 g 为非常数亚纯函数, 以 ∞ 为 CM 公共值, $f^{(n)}$ 与 $g^{(n)}$ 以1为 CM 公共值, 问 f 与 g 之间有何种关系?

定理 B f 与 g 为非常数亚纯函数, 以 ∞ 为 CM 公共值, $f^{(n)}$ 与 $g^{(n)}$ 以 1 为 CM 公共值, $n(\geqslant 0)$ 为一整数, 且满足

$$\Delta_c:=\Theta(\infty,f)+\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>3-(2-\lambda)/[2(3+4n)],$$

其中

$$\lambda=\max\{\min\{\Theta(\infty,f),\Theta(0,f)\},\min\{\Theta(\infty,g),\Theta(0,g)\}\},$$

则 $f^{(n)}\cdot g^{(n)}\equiv 1$ 或者 $f\equiv g$.

关于亚纯函数及其 k 阶导数分担值集的问题已出现了许多结果[5-10], 本文主要讨论亚纯函数及其 k 阶导数权分担 2 个小函数集的唯一性, 所得结果推广了先前的一些定理. 若令

$$S_1=\{a(z),a(z)w,a(z)w^2,\cdots,a(z)w^{n-1}\},$$
$$S_2=\{b(z),b(z)w,b(z)w^2,\cdots,b(z)w^{n-1}\},$$

其中 $a(z),b(z)\in S$, 且

$$b^n\not\equiv(a^{(k)})^n, w=\cos(2\pi/n)+\mathrm{i}\sin(2\pi/n),$$

n,k 均为正整数, 那么当非常数亚纯函数 f,g 及其 k 阶导数 $f^{(k)},g^{(k)}$ 权分担集 S_1,S_2 时, 得到下述结果.

定理 1 设 k,n 为正整数, f,g 为开平面上非常数亚纯函数, 以 ∞ 为 IM 公共值, $E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且

$$E_l(S_2,f^{(k)})=E_l(S_2,g^{(k)}),l(\geqslant 2)\in\mathbf{N},$$

如果

$$2n\delta_{2+k}(a^n,f^n)+(nk+4)\Theta(\infty,f)>n(k+1)+4, \tag{1}$$

则

$$f\equiv tg(t^n=1)$$

或

$$[(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n][(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n]\equiv[b^n-(a^{(k)})^n]^2.$$

定理 2 设 k,n 为正整数, f,g 为开平面上非常数亚纯函数, 以 ∞ 为 IM 公共值, $E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且 $E_1(S_2,f^{(k)})=E_1(S_2,g^{(k)})$, 如果

$$2n\delta_{2+k}(a^n,f^n)+\frac{1}{2}n\delta_{1+k}(a^n,f^n)+\frac{3}{2}(nk+3)\Theta(\infty,f)>\frac{3}{2}n(k+1)+\frac{9}{2}, \tag{2}$$

则

$$f\equiv tg(t^n=1)$$

或

$$[(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n][(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n]\equiv[b^n-(a^{(k)})^n]^2.$$

定理 3 设 k,n 为正整数, f,g 为开平面上非常数亚纯函数, 以 ∞ 为 IM 公共值, $E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且 $\overline{E}(S_2,f^{(k)})=\overline{E}(S_2,g^{(k)})$, 如果

$$2n\delta_{2+k}(a^n,f^n)+2n\delta_{1+k}(a^n,f^n)+3(nk+2)\Theta(\infty,f)>3n(k+1)+6, \tag{3}$$

则

$$f\equiv tg(t^n=1)$$

或

$$[(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n][(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n]\equiv[b^n-(a^{(k)})^n]^2.$$

当定理 1~定理 3 中 $n=1$ 时, 得到以下推论.

推论 1 设 $k,l(\geqslant 2)$ 为正整数, f,g 为开平面上非常数亚纯函数, 以 ∞ 为 IM 公共值, $E(a(z),f)=E(a(z),g)$ 且 $E_l(b(z),f^{(k)})=E_l(b(z),g^{(k)})$, 如果

$$2\delta_{2+k}(a,f)+(k+4)\Theta(\infty,f)>k+5,$$

则

$$f \equiv g$$

或

$$[f^{(k)}-a^{(k)}][g^{(k)}-a^{(k)}] \equiv [b-a^{(k)}]^2.$$

推论 2　设 k 为正整数，f,g 为开平面上非常数亚纯函数，以 ∞ 为 IM 公共值，$E(a(z),f)=E(a(z),g)$ 且 $E_1(b(z),f^{(k)})=E_1(b(z),g^{(k)})$，如果

$$2\delta_{2+k}(a,f)+\frac{1}{2}\delta_{1+k}(a,f)+\frac{3}{2}(k+3)\Theta(\infty,f)>\frac{3}{2}k+6,$$

则 $f\equiv g$ 或 $[f^{(k)}-a^{(k)}][g^{(k)}-a^{(k)}]\equiv[b-a^{(k)}]^2$.

推论 3　设 k 为正整数，f,g 为开平面上非常数亚纯函数，以 ∞ 为 IM 公共值，$E(a(z),f)=E(a(z),g)$ 且 $\overline{E}(b(z),f^{(k)})=\overline{E}(b(z),g^{(k)})$，如果

$$2\delta_{2+k}(a,f)+2\delta_{1+k}(a,f)+3(k+2)\Theta(\infty,f)>3k+9,$$

则 $f\equiv g$ 或 $[f^{(k)}-a^{(k)}][g^{(k)}-a^{(k)}]\equiv[b-a^{(k)}]^2$.

1　一些引理

设 f,g 分担"$(1,0)$"，z_0 为 f 的 q 重 1-值点且为 g 的 p 重 1-值点，定义 $\overline{N}_L(r,1/(f-1))$ 为 f,g 公共 1-值点且当 $p>q$ 时的计数函数；类似地有 $\overline{N}_L(r,1/(g-1))$.

引理 1　设 f 为非常数亚纯函数，k 为正整数，则 $N(r,1/f^{(k)})\leqslant k\overline{N}(r,f)+N(r,1/f)+S(r,f)$.

引理 2　设 f 为非常数亚纯函数，$p\in\mathbf{N}_+:=N-\{0\}, a(z)\in S(f)$，如果 f 不是多项式，则

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)\leqslant N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+ k\overline{N}(r,f)+S(r,f)$$

与

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)\leqslant T(r,f^{(k)})-T(r,f)+ N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f).$$

证　由引理 1 有

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)=N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)+ \sum_{s=3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)\leqslant N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+ \sum_{s=k+3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

又因为

$$\sum_{s=3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)-\sum_{s=k+3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\geqslant 0, \quad (4)$$

所以

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)\leqslant N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+ k\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

因为 $a(z)\in S(f)$，那么

$$T(r,f)-N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+ \sum_{s=k+3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)\leqslant m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)+ m\left(r,\frac{f^{(k)}-a^{(k)}}{f-a}\right)+\sum_{s=k+3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f)= T(r,f^{(k)})-N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)-\sum_{s=3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)+ \sum_{s=k+3}^{\infty}\overline{N}_{(s}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f).$$

根据(4)式可得

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-a^{(k)}}\right)\leqslant T(r,f^{(k)})- T(r,f)+N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+S(r,f).$$

引理 3　设 f 为非常数亚纯函数，$a_1(z),a_2(z)\in S(f)$ 为 2 个亚纯函数，则

$$T(r,f)\leqslant\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_1(z)}\right)+ \overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_2(z)}\right)+S(r,f).$$

引理 4　设 l 为正整数或 ∞, F,G 为 2 个非常数亚纯函数且 F,G 分担"$(1,l)$"．令

$$H=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right),$$

如果 $H\not\equiv 0$，那么

(i) 当 $2\leqslant l\leqslant\infty$ 时，有

$$T(r,F)\leqslant N_2(r,1/F)+N_2(r,F)+ N_2(r,1/G)+N_2(r,G)+S(r,F)+S(r,G);$$

(ii) 当 $l=1$时，有

$$T(r,F)\leqslant N_2(r,1/F)+N_2(r,F)+N_2(r,1/G)+ N_2(r,G)+\overline{N}_L(r,1/(F-1))+S(r,F)+S(r,G);$$

(iii) 当 $l=0$时，有

$$T(r,F)\leqslant N_2(r,1/F)+N_2(r,F)+N_2(r,1/G)+ N_2(r,G)+2\overline{N}_L(r,1/(F-1))+\overline{N}_L(r,1/(G-1))+ S(r,F)+S(r,G).$$

引理 5 设 k,n 为正整数，f,g 为开平面上非常数亚纯函数，以 ∞ 为 IM 公共值，$E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且 $\overline{E}(S_2,f^{(k)})=\overline{E}(S_2,g^{(k)})$，那么 $S(r,f)=S(r,g)$.

注 1 因为

$E_l(S_2,f^{(k)})=E_l(S_2,g^{(k)})\Rightarrow E_1(S_2,f^{(k)})=E_1(S_2,g^{(k)})\Rightarrow \overline{E}(S_2,f^{(k)})=\overline{E}(S_2,g^{(k)})$，那么引理 5 中的

$$\overline{E}(S_2,f^{(k)})=\overline{E}(S_2,g^{(k)})$$

换成

$$E_l(S_2,f^{(k)})=E_l(S_2,g^{(k)})$$

或

$$E_1(S_2,f^{(k)})=E_1(S_2,g^{(k)}),$$

结论同样成立.

2 定理的证明

令

$$F=\frac{(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n}{b^n-(a^{(k)})^n},G=\frac{(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n}{b^n-(a^{(k)})^n}$$

及 H 如引理 4 所述.

定理 1 的证明 由 f,g 以 ∞ 为 IM 公共值，$E(S_1,\ f)=E(S_1,g)$ 且 $E_l(S_2,f^{(k)})=E_l(S_2,g^{(k)})$, 那么 F,G 分担"$(1,l)$"，下面分 2 种情形讨论.

情形 1 $H\not\equiv 0$. 由引理 4 有

$$T(r,F)\leqslant N_2(r,1/F)+N_2(r,F)+N_2(r,1/G)+N_2(r,G)+S(r,F)+S(r,G). \tag{5}$$

由 F,G 的定义, $a(z),b(z)\in S$ 及引理2与引理5, 有

$$\begin{aligned}&T(r,F)=nT(r,f^{(k)})+S(r,f),\\&S(r,F)=S(r,f),S(r,G)=S(r,g),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&N_2(r,F)=2\overline{N}(r,f)+S(r,f),\\&N_2(r,G)=2\overline{N}(r,g)+S(r,g),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant N_2\left(r,\frac{1}{(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n}\right)+S(r,f)=\\&\sum_{i=1}^{n}N_2\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\omega^{i-1}a^{(k)}}\right)+S(r,f)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}\left[T(r,f^{(k)})-T(r,f)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)\right]+S(r,f),\\&N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\\&\qquad nT(r,f^{(k)})-nT(r,f)+S(r,f)\end{aligned} \tag{8}$$

及

$$\begin{aligned}&N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\leqslant N_2\left(r,\frac{1}{(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n}\right)+S(r,g)=\\&\sum_{i=1}^{n}N_2\left(r,\frac{1}{g^{(k)}-\omega^{i-1}a^{(k)}}\right)+S(r,g)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}[N_{2+k}\left(r,\frac{1}{g-\omega^{i-1}a}\right)+k\overline{N}(r,g)]+S(r,g),\\&N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[N_{2+k}\left(r,\frac{1}{g-\omega^{i-1}a}\right)+\right.\\&\qquad\left.nk\overline{N}(r,g)\right]+S(r,g).\end{aligned} \tag{9}$$

由(5)~(9)式得到

$$\begin{aligned}&nT(r,f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\right.\\&\left.N_{2+k}\left(r,\frac{1}{g-\omega^{i-1}a}\right)\right]+2\overline{N}(r,f)+\\&(nk+2)\overline{N}(r,g)+S(r,f).\end{aligned}$$

又因为 $f,g\,IM$ 分担 ∞，以及 $f^n,g^n\,CM$ 分担 $a(z)$，由上式有

$$\begin{aligned}&nT(r,f)\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\\&(nk+4)\overline{N}(r,f)+S(r,f).\end{aligned}$$

这与定理 1 的条件(1)式矛盾.

情形 2 $H\equiv 0$，即 $\dfrac{F''}{F'}-\dfrac{2F'}{F-1}\equiv\dfrac{G''}{G'}-\dfrac{2G'}{G-1}$. 解此微分方程得

$$G=\frac{(B+1)F+(A-B-1)}{BF+(A-B)}, \tag{10}$$

其中 A,B 为常数.

情形 2.1 $B\neq 0,-1$, 如果 $A-B-1\neq 0$, 由(10)式有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-\dfrac{A-B-1}{B+1}}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right).$$

根据 Nevanlinna 第二基本定理有

$$\begin{aligned}&T(r,F)\leqslant\overline{N}(r,F)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-\dfrac{A-B-1}{B+1}}\right)+\\&S(r,f)=\overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+S(r,f).\end{aligned}$$

类似于情形 1 的讨论,得到

$$\begin{aligned}&nT(r,f)\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}N_{1+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+(nk+1)\overline{N}(r,f)+\\&S(r,f)\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+(nk+4)\overline{N}(r,f)+\\&S(r,f).\end{aligned}$$

与(1)式矛盾.

如果 $A-B-1=0$，由(10)式有 $G=\dfrac{(B+1)F}{BF+1}$，即 $\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{F-1/B}\right)=\overline{N}(r,G)$.

根据 Nevanlinna 第二基本定理可得到

$$T(r,F)\leqslant \overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,1/F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1/B}\right)+S(r,f)=\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,1/F)+\overline{N}(r,G)+S(r,f).$$

类似于情形 1 的讨论，有

$$nT(r,f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N_{1+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+2\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+(nk+4)\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

矛盾.

情形 2.2 若 $B=-1$，则(10) 式可写成

$$G=A/(A+1-F).$$

如果 $A+1\neq 0$，则 $\overline{N}(r,1/(F-(A+1)))=\overline{N}(r,G)$. 类似于情形 2.1 也可得到矛盾.

如果 $A+1=0$，则 $FG\equiv 1$，即

$$[(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n][(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n]\equiv[b^n-(a^{(k)})^n]^2.$$

情形 2.3 若 $B=0$，则(10)式可写成

$$G=(F+A-1)/A.$$

如果 $A-1\neq 0$，则

$$\overline{N}(r,1/(F-(1-A)))=\overline{N}(r,1/G).$$

类似于情形 2.1 也可得到矛盾.

如果 $A-1=0$，则 $F\equiv G$，即

$$f^{(k)}\equiv tg^{(k)}(t^n=1).$$

于是得到 $f=tg+p(z)$，这里 $p(z)$ 为多项式，显然 $T(r,f)=T(r,g)+S(r,f)$. 如果 $p(z)\not\equiv 0$，根据引理 3，有

$$nT(r,f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a-p}\right)\right]+S(r,f)=\sum_{i=1}^{n}\left[\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{tg-\omega^{i-1}a}\right)\right]+S(r,f)=$$
$$2\sum_{i=1}^{n}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+n\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+(nk+4)\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

由(1)式得到矛盾. 因此 $p(z)\equiv 0$，即 $f\equiv tg(t^n=1)$.

综合情形 1 和情形 2，定理 1 得证.

定理 2 的证明　由定理 2 的条件 $E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且 $E_1(S_2,f^{(k)})=E_1(S_2,g^{(k)})$ 知 F,G 分担 "(1,1)". 若 $H\not\equiv 0$，那么由引理 4 有

$$T(r,F)\leqslant N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_2(r,G)+\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+S(r,F)+S(r,G).$$

又因为

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\leqslant\frac{1}{2}N\left(r,\frac{F'}{F}\right)\leqslant\frac{1}{2}\overline{N}(r,F)+\frac{1}{2}\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right).$$

由引理 2 有

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}N_{1+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\frac{1}{2}(nk+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f).\tag{11}$$

由(6)~(9)和(11)式，有

$$nT(r,f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[2N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\frac{1}{2}N_{1+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)\right]+\frac{3}{2}(nk+3)\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

与条件(2)式矛盾. 故 $H\equiv 0$. 类似于定理 1 的情形 2 可证得定理 2 的结论.

定理 3 的证明　由定理 3 的条件 $E(S_1,f)=E(S_1,g)$ 且 $\overline{E}(S_2,f^{(k)})=\overline{E}(S_2,g^{(k)})$ 知 F,G 分担 "(1,0)"，那么

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{F'}{F}\right)\leqslant\overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)$$

和

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{G}{G'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{G'}{G}\right)\leqslant\overline{N}(r,G)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right).$$

由引理 2 有

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N_{1+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+(nk+1)\overline{N}(r,f)+S(r,f)\tag{12}$$

和

$$\overline{N}_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N_{1+k}\left(r,\frac{1}{g-\omega^{i-1}a}\right)+ \tag{13}$$
$$(nk+1)\overline{N}(r,g)+S(r,g).$$

若$H\not\equiv0$，由f,g IM分担∞以及f^n,g^n CM分担$a(z)$，根据引理4(iii)及(6)~(9)和(12)~(13)式，得到

$$nT(r,f)\leqslant2\sum_{i=1}^{n}\left[N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)+\right.$$
$$\left.N_{1+k}\left(r,\frac{1}{f-\omega^{i-1}a}\right)\right]+3(nk+2)\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

与条件(3)式矛盾．故$H\equiv0$．类似于定理1的情形2可证得定理3的结论．

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M].Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Yi Hongxun, Yang Chungchun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Beijing: Science Press, 1995.

[3] 李江涛，顾永兴．亚纯函数及其导数的唯一性 [J]．数学学报，2000, 43(1): 87-94.

[4] Yang Chungchun. On two entire functions which together with their first derivatives have the same zeros [J]. J Math Anal App, 1976, 56: 1-6.

[5] Yi Hongxun. A question of C C Yang on uiqueness of entire functions [J]. Kodai Math J, 1990, 13: 39-46.

[6] Yuan Wenjun, Tian Honggen. Further results of some uiqueness theorems for meromorphic functions whose n-th derivatives share the same 1-points [J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2001, 11(S2): 317-325.

[7] Lin Shanhua, Lin Weichuai. Uniqueness of meromorphic functions concerning weakly weighted-sharing [J]. 2006, 29: 269-280.

[8] 杨重俊，仪洪勋．具有亏值的亚纯函数的唯一性定理 [J]．数学学报, 1994, 37(1): 62-72.

[9] 王金莲，徐洪焱，易才凤．亚纯函数及其导数权分担两个值 [J]．东北师大学报：自然科学版, 2009, 41(4): 22-26.

[10] 方明亮．亚纯函数及其导数的唯一性 [J]．数学研究与评论, 1998, 18(3): 353-358.

The Uniqueness of Meromorphic Functions and Their Derivatives Weighted-Sharing the Sets of Small Functions

ZHAO Xiao-zhen

(Department of Mathematics,Ningde Normal University, Ningde Fujian 352100, China)

Abstract: The uniqueness of meromorphic functions and their derivatives weakly weighted-sharing the sets of small functions is investigated, and the following theorem is obtained. Let k,n be two positive integers, *f*,*g* be nonconstant meromorphic functions in the complex plane *C*, *f*,*g* share ∞ IM, $E(S_1,f)=E(S_1,g)$ and $E_l(S_2,f^{(k)})=E_l(S_2,g^{(k)})$ $l(\geqslant2)\in\mathbf{N}$. If $2n\delta_{2+k}(a^n,f^n)+(nk+4)\Theta(\infty,f)>n(k+1)+4$, then $f\equiv tg(t^n=1)$ or $[(f^{(k)})^n-(a^{(k)})^n][(g^{(k)})^n-(a^{(k)})^n]\equiv[b^n-(a^{(k)})^n]^2$. Some results about $l=0,1$ in the above theorem are obtained in this paper. These theorems of this paper extend and improve the previous results.

Key words: meromorphic function; weakly weighted-sharing; small function; uniqueness

(责任编辑：王金莲)