文章编号: 1000-5862(2012)02-0147-04

单位圆上高阶线性微分方程解的性质

龙见仁, 伍鹏程*

(贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵州 贵阳 550001)

摘要: 结合微分方程理论和函数空间理论, 研究了单位圆内高阶线性微分方程解的性质, 得到当方程系数满足某些条件时, 其解属于某类函数空间的充分条件.

关键词: 线性微分方程; 单位圆; 函数空间

中图分类号: O 174.5　文献标志码: A

0 引言及主要结果

由 Poincaré-Klein-Koebe 单值化定理确立了单位圆、复平面及扩充复平面在复分析中的重要地位. 由于单位圆与复平面本质上有很大的不同, 所以研究单位圆上线性微分方程解的性质也是非常重要和有意义的课题. H.Wittich 及其学生应用 Nevanlinna 理论系统而深入地研究了复域上常微分方程解的性质. 一个自然的问题是单位圆上的微分方程是否有相应的结果. 针对这个问题, C.H.Pommerenke, J.Heittokangas, 何育赞和萧治经, 陈宗煊, 李叶舟等国内外学者, 进行了深入研究并取得了若干成果[1-5]. 1982 年 Pommerenke 在文献[1]中将微分方程理论和函数空间理论相结合来研究微分方程解的函数空间属性, 获得了很多有趣的结果. 近年来, J. Heittokangas, R.Korhonen, J.Räätträ 进一步讨论了单位圆上微分方程解的函数空间属性, 得到很多结果[6-9]. 本文将继续研究单位圆盘上一类解析系数的线性微分方程解的函数空间性质. 记单位圆为 $\varDelta=\{z:|z|<1\}$, 为了叙述主要结果, 先给出下面几个概念.

定义 1　假设 $0<\alpha<\infty$, $f(z)$ 为 $\varDelta$ 上的解析函数, 若

$$\sup_{z\in\varDelta}(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)|<\infty,$$

则称 $f\in B^{\alpha}$ (α -Bloch 空间).

显然 $B=B^1$ (经典的 Bloch 空间).

定义 2　假设 $0\leqslant q<\infty$, $0<p<\infty$, $f(z)$ 为 $\varDelta$ 上的解析函数, 若

$$\sup_{0\leqslant r<1}(1-r^2)^q\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}<\infty,$$

则称 $f\in H_q^p$ (加权的 Hardy 空间).

显然有 $H^p=H_0^p$.

定义 3　假设 $0\leqslant q<\infty$, $f(z)$ 为 $\varDelta$ 上的解析函数, 若

$$\sup_{z\in\varDelta}\left(1-|z|^2\right)^q|f(z)|<\infty,$$

则称 $f\in H_q^{\infty}$.

显然 $H_0^{\infty}=H^{\infty}$.

定义 4　假设 $0<p<\infty$, $-1<q<\infty$, $f(z)$ 为 $\varDelta$ 上的解析函数, 若

$$\iint_{\varDelta}|f(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^q dS(z)<\infty,$$

则称 $f\in A_q^p$ (加权的 Bergman 空间).

显然 $A_0^p=A^p$ (经典的 Bergman 空间), 其中 $dS(z)$ 是 $\varDelta$ 上的规范化的面积测度.

2000 年, J.Heittokangas 在其博士论文中证明了如下结果.

定理 A　设 $0\leqslant q<\infty$, $0<p<\infty$, 假设方程(1)的系数 $A(z)$ 是 $\varDelta$ 内的解析函数, 且对所有的 $r\in[0,1)$ 有

$$\int_0^r(1-t)^{k-1}(\log h(r,\theta,t))^{-1}\left|A(te^{i\theta})\right|dt\leqslant(k-1)!,$$

其中

收稿日期: 2011-10-10

基金项目: 国家自然科学基金(11171080)和贵州省科学技术基金(黔科合 J 字 LKS[2010]07 号)资助项目.

作者简介: 伍鹏程(1955-), 男, 湖南衡阳人, 教授, 主要从事复分析研究.

$h(r,\theta,t)=\max\{\mathrm{e},1/(|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{u}|1-t^{2}|^{q})\}$, $0\leqslant u<1/p$，那么微分方程

$$f^{(k)}+A(z)f=0 \tag{1}$$

的每个解 $f\in H_q^p$.

定理 B 假设方程(1)的系数 $A(z)$ 在 $\varDelta$ 内解析，对常数 $l>0$，令 $R=(\mathrm{e}^{1/l}-1)/\mathrm{e}^{1/l}$. 假设 $k\geqslant 1$，如果 $A(z)$ 满足

$$\int_R^1(1-t)^{k-1}(\log(1-t)^{-l})^{-1}\left|A(t\mathrm{e}^{i\theta})\right|\mathrm{d}t\leqslant(k-1)!,$$

那么微分方程(1)的每个解 $f\in B^{l+1}$.

本文将利用微分方程理论和函数空间理论，讨论一般高阶方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=0 \tag{2}$$

解的性质，其中 $A_0(z)$, $A_1(z)$, $\cdots$, $A_{k-1}(z)$ 是 $\varDelta$ 内的解析函数，并且获得了以下结果. 本文中的 C 表示正常数，且在不同的地方可以取值不同.

定理 1 假设方程(2)的系数 $A_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ 在 $\varDelta$ 内解析，$0<p<\infty$，$0<\delta<1$，对每个 $q>0$，$\exists$常数 $\alpha=\alpha(p,q,k)>0$，使得若方程(2)的系数 $A_j(z)$ 满足

$$\sup_{|z|\geqslant\delta}\left|A_j(z)\right|\left(1-|z|^2\right)^{k-j}\leqslant\alpha,\quad j=0,1,\cdots,k-1, \tag{3}$$

那么微分方程(2)的每个解 $f\in A_q^p$.

定理 2 设 $0<p<\infty$，$0\leqslant q<\infty$，设方程(2)的系数 $A_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ 在 $\varDelta$ 内解析，且对所有的 $r\in[0,1)$ 有

$$\int_0^r\sum_{j=0}^{k-1}\left|A_j(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^{1/(k-j)}(\log h(r,\theta,t))^{-1}\mathrm{d}t\leqslant 1/k, \tag{4}$$

其中

$h(r,\theta,t)=\max\{\mathrm{e},1/(|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{u}|1-t^{2}|^{q})\}$, $0\leqslant u<1/p$，那么方程(2)的每个解 $f\in H_q^p$.

定理 3 设 $0<p<\infty$，且方程(2)的系数 $A_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ 在 $\varDelta$ 内解析，且对所有的 $r\in[0,1)$ 有

$$\int_0^r\sum_{j=0}^{k-1}\left|A_j(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^{1/(k-j)}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}\log h(r,\theta), \tag{5}$$

其中

$$h(r,\theta)=\max\{\mathrm{e},1/|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^{u}\},\quad 0\leqslant u<1/p,$$

那么方程(2)的每个解 $f\in A^p$.

定理 4 假设方程(2)的系数 $A_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ 在 $\varDelta$ 内解析，对常数 $l>0$，令

$$R=(\mathrm{e}^{1/l}-1)/\mathrm{e}^{1/l},$$

如果 $A_j(z)$ 满足

$$\int_R^1\sum_{j=0}^{k-1}\left|A_j(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^{1/(k-j)}(\log(1-t)^{-l})^{-1}\mathrm{d}t\leqslant 1/k, \tag{6}$$

那么微分方程(2)的每个解 $f\in B^{l+1}$.

注 1 若 $r\in(R,1)$，由于 $\log(1-t)^{-l}$ 关于 t 是非减函数，故有

$$\log(1-t)^{-l}\geqslant\log(1-R)^{-l}=1.$$

1 引 理

为证明上述定理，需要以下一些引理.

引理 1[10] 设 $J(r)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\Big/\left|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^{\lambda}$，则

(i) $J(r)=O(1)$，若 $-\infty<\lambda<1$；

(ii) $J(r)=O\left(\log 1/(1-r)\right)$，若 $\lambda=1$；

(iii) $J(r)=O\left(1/(1-r)^{\lambda}\right)$，若 $1<\lambda<\infty$.

引理 2[11] 如果 $\alpha>1$ 及 $R=(1+r)/2$，那么

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r|^{\alpha}}=O\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha-1}}\right).$$

引理 3 设 f 是方程(2)的解，令 $n_c\in\{1,\cdots,k\}$ 表示方程(2)中非零系数 $A_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$ 的个数. 设 $\theta\in[0,2\pi]$ 和 $\varepsilon>0$. 如果 $z_\theta=\upsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\varDelta$ 使得对非零系数有 $A_j(z_\theta)\neq 0$，$j=0,1,\cdots,k-1$，则对所有的 $\upsilon<r<1$ 有

$$\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\leqslant C\exp\left(n_c\int_\nu^r\max_{j=0,\cdots,k-1}\left|A_j(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^{1/(k-j)}\mathrm{d}t\right),$$

其中常数 C (>0)满足

$$C\leqslant(1+\varepsilon)\max_{j=0,\cdots,k-1}\frac{\left|f^{(j)}(z_\theta)\right|}{{n_c}^{j}\max\limits_{n=0,\cdots,k-1}\left|A_n(z_\theta)\right|^{j/(k-n_c)}}.$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 不失一般性，不妨设 $0<\delta<r<1$ 和 $\alpha\leqslant 1$. 假设 f 是方程(2)的任意一个解，根据引理 3，$\exists$常数 $C_1>0$，仅依赖于 f 的初值，使得对所有的 $\theta\in[0,2\pi]$，有

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_1 \exp\left(k\int_0^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right).$$

利用条件(3)式得

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_1 \exp\left(k\int_0^{\delta} \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt + k\int_{\delta}^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right) =$$

$$C_2 \exp\left(k\int_{\delta}^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right) \leqslant$$

$$C_2 \exp\left(k^2\alpha^{1/k}\int_{\delta}^r \frac{1}{1-t} dt\right) \leqslant$$

$$C_2/(1-r)^{k^2\alpha^{1/k}}.$$

于是

$$\iint_{\Delta}\left(1-|z|^2\right)^q |f(z)|^p dA(z) \leqslant C_2\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^{q-pk^2\alpha^{1/k}} r dr d\theta.$$

结合上式取 $\alpha = (q/(pk^2))^k$，则有

$$\iint_{\Delta}\left(1-|z|^2\right)^q |f(z)|^p dA(z) < \infty.$$

因此方程(2)的解 $f \in A_q^p$．从而定理 1 证毕.

定理 2 的证明　对固定的 r 和 θ，$h(r,\theta,t)$ 是关于 t 的一个增函数(当 $q=0$ 时，$h(r,\theta,t)$ 是一个常数). 由(4)式得

$$(\log h(r,\theta,r))^{-1}\int_0^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt \leqslant 1/k,$$

即

$$k\int_0^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt \leqslant \log h(r,\theta,r). \qquad (7)$$

设 $0<\delta<r<1$，假设 f 是方程(2)的任意一个解，根据引理 3, $\exists$常数 $C_3>0$，仅依赖于 f 的初值，使得对所有的 $\theta\in[0,2\pi]$，有

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_3 \exp\left(k\int_0^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right). \qquad (8)$$

结合(7)和(8)式得

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_3\exp(\log h(r,\theta,r)) = C_3 h(r,\theta,r).$$

于是，根据引理 1 有

$$(1-r^2)^q\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leqslant C_3(1-r^2)^q\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r,\theta,r)^p d\theta\right)^{1/p} = O(1).$$

故

$$\sup_{0\leqslant r<1}(1-r^2)^q\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p} < \infty.$$

因此方程(2)的解 $f\in H_q^p$．从而定理 2 证毕.

定理 3 的证明　设 $0<\delta<r<1$，假设 f 是方程(2)的任意一个解，根据引理 3，$\exists$常数 $C_4>0$，仅依赖于 f 的初值，使得对所有的 $\theta\in[0,2\pi]$，有

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_4 \exp\left(k\int_0^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right). \qquad (9)$$

结合(5)和(9)式得

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_4 h(r,\theta).$$

于是，根据引理 1 得

$$\iint_{\Delta}|f(z)|^p dA(z) \leqslant \int_0^1\int_0^{2\pi} C_4 h(r,\theta)^p = O(1).$$

因此方程(2)的解 $f\in A^p$．从而定理 3 证毕.

定理 4 的证明　如果 $r\in(R,1)$，则由(6)式得

$$\frac{1}{k} \geqslant \int_R^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} (\log(1-t)^{-l})^{-1} dt \geqslant (\log(1-r)^{-l})^{-1}\int_R^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt,$$

即

$$k\int_R^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt \leqslant \log\frac{1}{(1-r)^l}. \qquad (10)$$

应用关于导数的柯西积分公式和引理 2 得

$$\left|f'(re^{i\theta})\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=(1+r)/2}\frac{|f(\xi)||d\xi|}{\left|\xi-re^{i\theta}\right|^2} = O\left(\frac{M((1+r)/2,f)}{1-r}\right), \qquad (11)$$

其中 $M((1+r)/2,f) = \max\limits_{|z|=(1+r)/2}|f(z)|$.

假设 f 是方程(2)的任意一个解，根据引理 3，$\exists$常数 $C_5>0$，仅依赖于 f 的初值，使得对所有的 $\theta\in[0,2\pi]$，有

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant C_5 \exp\left(k\int_0^r \sum_{j=0}^{k-1} \left|A_j(te^{i\theta})\right|^{1/(k-j)} dt\right). \qquad (12)$$

结合(10)~(12)式得

$$\left|f'(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| = O(1/(1-r)^{l+1})\,.$$

因此方程(2)的解 $f \in B^{l+1}$. 从而定理 4 证毕.

3 参考文献

[1] Pommerenke C H. On the mean growth of the solution of complex linear differential equations in the disk [J]. Complex Variables, 1982(1): 23-28.

[2] Heittokangas J. On complex differential equations in the unit disc [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2000, 122: 1-54.

[3] 何育赞, 萧治经. 单位圆内微分方程$(f')^2=a_0(z)(f-a_1(z))f$ 的解 [J]. 中国学术期刊文摘(科技快报), 1999, 5(2): 164-166.

[4] 陈宗煊. 单位圆内一类微分方程解的性质 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2002, 26(3): 189-190.

[5] 李叶舟. 单位圆盘上二阶微分方程解的增长性 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2002(4): 295-300.

[6] Heittokangas Janne, Korhonen Risto, Rätträ Jouni. Linear differential equations with solutions in Dirichlet type subspace of the Hardy space [J]. Nagoya Math J, 2007, 187: 91-113.

[7] Heittokangas Janne, Korhonen Risto, Rätträ Jouni. Linear dif-

[8] ferential equations with coefficients in weighted Bergman and Hardy spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 2008, 360(2): 1035-1055.

[9] Heittokangas Janne, Korhonen Risto, Rätträ Jouni. Growth estimates for solutions of linear complex differential equations [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2004, 29: 233-246.

[10] 王锦熙, 易才凤, 徐洪焱. 关于单位圆内高阶线性微分方程的复振荡 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(2): 194- 200.

[11] Tsuji M. Potential theory in modern function theory [M]. Tokyo: Maruzen Co Ltd, 1959: 221-236.

[12] Duren P. Theory of H^p spaces [M]. New York, London: Academic Press, 1970.

On the Properities of Solutions for Higher Order Linear Differenrial Equations in the Unit Disc

LONG Jian-ren, WU Peng-cheng*

(School of Mathematical and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550001, China)

Abstract: The properties of solutions of higher order linear differential equations in the unit disc was investigated by using the skills and methods of differential equations and function spaces. And some sufficient conditions that the solutions of higher order linear differential equations belong to some classes function spaces was obtained.

Key words: linear differential equation; unit disc; function space

(责任编辑: 王金莲)