第 36 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 36 No.2
2012 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science) Mar. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)02-0151-04

加法半群为半格的半环上 Green-关系

秦 松, 甘爱萍*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 利用半群代数理论研究了加法半群为半格的半环上的 4 种不同类型的 Green-关系, 并对它们的特征进行了刻画, 证明了在加法半群为半格的半环上 $\dot{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$ 且 $\dot{\mathcal{R}}=\mathcal{R}$.

关键词: Green-关系; 半环; 理想; k-集

中图分类号: O 153.3; O 152.7 文献标志码: A

0 引言与预备

设 $(S,+,\cdot)$ 为包含 2 个 2 元运算 $+$ 和 $\cdot$ 的代数, 若 $(S,+)$ 和 $(S,\cdot)$ 为半群且满足以下分配律:

$$x(y+z)=xy+xz,\quad (x+y)z=xz+yz,$$

则称 S 为半环. 因此半环可以被看作是环和分配格的推广. 记 SL^+ 为加法半群 $(S,+)$ 是半格(即交换和幂等的半群)的半环簇. 本文中的半环 S 都是 SL^+ 中的半环.

Green 所引入的 Green-关系对半群理论起着重要作用[1-4]. 记 $\dot{\mathcal{L}}(\dot{\mathcal{R}},\dot{\mathcal{H}},\dot{\mathcal{D}},\dot{\mathcal{J}})$ 为半环 S 的乘法半群 $(S,\cdot)$ 上的 Green $\mathcal{L}$-($\mathcal{R}$-,$\mathcal{H}$-,$\mathcal{D}$-,$\mathcal{J}$-) 关系. 当然, 这些等价关系对半环的研究也是非常有用的[5-7]. 此外, M. P. Grillet [8] 也引入了半环 S 上的 Green $\mathcal{L}$-($\mathcal{R}$-, $\mathcal{H}$-,$\mathcal{D}$-,$\mathcal{J}$-) 关系, 即 $\forall a,b\in S$,

$$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow L(a)=L(b),\quad a\mathcal{R}b \Leftrightarrow R(a)=R(b),$$

其中 $L(a)$ 和 $R(a)$ 分别为半环 S 上由 a 生成的主左理想和主右理想.

引理 1 设 S 为 SL^+ 中的半环, $a\in S$, 则

(i) $L(a)=\{a\}\cup\{sa\mid s\in S\}\cup\{a+ta\mid t\in S\}$;

(ii) $R(a)=\{a\}\cup\{as\mid s\in S\}\cup\{a+at\mid t\in S\}$.

设 A 为 S 的非空子集, A 的 k-闭包记为

$$\overline{A}=\{x\in S\mid(\exists a_1,a_2\in A)x+a_1=a_2\}.$$

显然 $A\subseteq\overline{A}$. A. K. Bhuniya 等[9]给出: 若 A 是 $(S,+)$ 的子半群, 则

$$\overline{A}=\{x\in S\mid(\exists a\in A)x+a=a\}.$$

其实, 对 S 的任一非空子集 A (不必是加法子半群), 这个结论仍然成立. 若 $x\in\overline{A}$, 则 $\exists a_1,a_2\in A$, 使得 $x+a_1=a_2$. 给等式两边同时加上 a_1+a_2, 得到 $x+a_1+a_1+a_2=a_2+a_1+a_2$.

因为 $(S,+)$ 是半格, 所以 $x+a_1+a_2=a_1+a_2$. 此外, $x+a_1+a_2=a_2+a_2=a_2$, 从而 $a_1+a_2=a_2$, 故 $x+a_2=a_2$.

若 $\overline{A}\subseteq A$, 则称 A 为 k-集, 即 $\overline{A}=A$. 若 S 的理想(左理想,右理想) I 是 k-集, 则称 I 为 k-理想(左 k-理想, 右 k-理想).

令 $a\in S$, 由 a 生成的 k-理想(左 k-理想, 右 k-理想)记为 $I_k(a)$ ($L_k(a)$, $R_k(a)$).

类似于半环上的 Green-关系, M. K. Sen 等[10]引入以下 4 种加法半群为半格的半环上 Green-关系:

$$a\overline{\mathcal{L}}b \Leftrightarrow L_k(a)=L_k(b),$$
$$a\overline{\mathcal{R}}b \Leftrightarrow R_k(a)=R_k(b),$$
$$a\overline{\mathcal{J}}b \Leftrightarrow I_k(a)=I_k(b),$$

且 $\overline{\mathcal{H}}=\overline{\mathcal{L}}\cap\overline{\mathcal{R}}$.

引理 2 设 S 为 SL^+ 上的半环, $a\in S$, 则

(i) $L_k(a)=\{x\in S\mid(\exists s\in S)x+a+sa=a+sa\}$;

(ii) $R_k(a)=\{x\in S\mid(\exists s\in S)x+a+as=a+as\}$;

(iii) $I_k(a)=\{x\in S\mid(\exists s\in S)x+a+sa+as+sas=a+sa+as+sas\}$.

证 (i) 令 $J=\{x\in S\mid(\exists s\in S)x+a+sa=a+sa\}$. 分以下 4 步证明 $J=L_k(a)$.

收稿日期: 2011-09-20

基金项目: 江西省自然科学基金(2010GZS0093)资助项目.

作者简介: 甘爱萍(1978-), 女, 江西萍乡人, 讲师, 硕士, 主要从事半环理论的研究.

(a) 显然 $a\in J$.

(b) 设 $x,y\in J$ 且 $r\in S$, 则 $\forall s,t\in S$, 有

$$x+a+sa=a+sa,\ y+a+ta=a+ta,$$

从而

$$x+y+a+(s+t)a=a+(s+t)a,$$
$$rx+a+(r+rs)a=a+(r+rs)a,$$

即 $x+y,rx\in J$,所以 J 是 S 的左理想.

(c) 设 $x\in\overline{J}$, 则$\exists y\in J$, 使得$x+y=y$. 又$\exists s\in S$, 使 $y+a+sa=a+sa$, 从而

$$x+a+sa=x+y+a+sa=y+a+sa=a+sa,$$

即 $x\in J$, 由此得 $\overline{J}\subseteq J$.所以 J 为 S 的包含 a 的左 k-理想.

(d) 设 K 为 S 的任一包含 a 的左 k-理想且 $x\in J$, 则 $\exists s\in S$, 使 $x+a+sa=a+sa$, 因为 $a\in K$, 有 $a+sa\in K$, 所以 $x\in\overline{K}=K$, 因此 $J\subseteq K$.

类似可证(ii), (iii).

引理 **3** 设 $S\in SL^+$, $a,b\in S$, 则

(i) $a\overline{\mathcal{L}}b$ 当且仅当 $\exists s\in S$, 使

$$a+b+sb=b+sb,\quad b+a+sa=a+sa;$$

(ii) $a\overline{\mathcal{R}}b$ 当且仅当 $\exists s\in S$, 使

$$a+b+bs=b+bs,\quad b+a+as=a+as;$$

(iii) $a\overline{\mathcal{J}}b$ 当且仅当 $\exists s\in S$, 使

$$a+b+sb+bs+sbs=b+sb+bs+sbs,$$
$$b+a+sa+as+sas=a+sa+as+sas.$$

证 (i) 设 $a\overline{\mathcal{L}}b$, 则 $a\in L_k(b)$, $b\in L_k(a)$. 由引理 2 知, $\exists u,v\in S$, 使

$$a+b+ub=b+ub \text{ 且 } b+a+va=a+va.$$

令 $s=u+v$, 则容易验证 s 为所要求的元素. 反之, 若 $\exists s\in S$ 使得

$$a+b+sb=b+sb,\ b+a+sa=a+sa,$$

则 $a\in L_k(b)$, $b\in L_k(a)$, 因此 $a\overline{\mathcal{L}}b$.

类似可证(ii), (iii).

设 S 为 SL^+ 上的半环. 定义 S 上的关系 $\leqslant_+$ 如下:

$$a\leqslant_+ b\Leftrightarrow a+b=b.$$

容易验证 $\leqslant_+$ 是 S 上的偏序且 $(S,\cdot,\leqslant_+)$ 是一个偏序半群. 因此, 由文献[11-13]可得 S 上的以下 Green-关系 $\tilde{\mathcal{L}}$ 和 $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$a\tilde{\mathcal{L}}b\Leftrightarrow\left(\exists u,v\in S^1\right)a+ub=ub,b+va=va,$$
$$a\tilde{\mathcal{R}}b\Leftrightarrow\left(\exists u,v\in S^1\right)a+bu=bu,b+av=av.$$

引理 **4** 设 $S\in SL^+$, $a,b\in S$, 则

(i) $a\tilde{\mathcal{L}}b$ 当且仅当 $\exists s\in S^1$, 使

$$a+sb=sb \text{ 且 } b+sa=sa;$$

(ii) $a\tilde{\mathcal{R}}b$ 当且仅当 $\exists s\in S^1$, 使

$$a+bs=bs \text{ 且 } b+as=as.$$

证 (i) 设 $a\tilde{\mathcal{L}}b$, 则 $\exists u,v\in S^1$, 使

$$a+ub=ub,\ b+va=va.$$

考虑以下几种情况:

(a) 当 $u=1$ 且 $v=1$ 时, 显然.

(b) 当 $u=1$ 且 $v\neq1$时, 则

$$a+b=b\Rightarrow a+b+va+vb=b+va+vb\Rightarrow$$
$$a+va+vb=va+vb\ (\text{因为 } b+va=va)\Rightarrow$$
$$a+vb=vb\ (\text{因为 } va+vb=vb).$$

(c) 当 $u\neq1$ 且 $v=1$时, 类似于(b)可证.

(d) 当 $u\neq1$ 且 $v\neq1$时, 令 $s=u+v$, 则容易验证 $a+sb=sb$ 且 $b+sa=sa$.

反之, 若 $\exists s\in S^1$, 使 $a+sb=sb$, $b+sa=sa$, 即 $a\tilde{\mathcal{L}}b$. 这就证明了(i).

类似可证(ii).

有关半群, 泛代数和半环的背景知识参见文献[1, 14-15].

1 Green-关系

显然, $\dot{\mathcal{L}}\subseteq\mathcal{L}$ 且 $\dot{\mathcal{R}}\subseteq\mathcal{R}$. 文献[8]中的一些例子表明 $\dot{\mathcal{L}}\neq\mathcal{L}$ 且 $\dot{\mathcal{R}}\neq\mathcal{R}$.接下来将证明若 S 是 SL^+ 上的半环, 则 $\dot{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$ 且 $\dot{\mathcal{R}}=\mathcal{R}$. 为了得到这个结果, 先证明下面引理.

引理 **5** 设 $S\in SL^+$, $a,b\in S$, 则

(i) 若 $a\mathcal{L}b$, 则 $Sa=Sb$;

(ii) 若 $a\mathcal{R}b$, 则 $aS=bS$.

证 (i) 设 $a\mathcal{L}b$, 则 $a\in L(b)$ 且 $b\in L(a)$. 由引理 1 知, $\exists s,t\in S$, 使 $a=b$或 $a=sb$ 或 $a=b+tb$, 无论哪种情况, 都易证 $Sa\subseteq Sb$. 类似地, 可证 $Sb\subseteq Sa$, 因此 $Sa=Sb$, (i)得证.

类似可证(ii).

命题 **1** 设 $S\in SL^+,a,b\in S$, 则 $\dot{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$ 且 $\dot{\mathcal{R}}=\mathcal{R}$.

证 显然, $\dot{\mathcal{L}}\subseteq\mathcal{L}$. 反之, 设 $a,b\in S$, 使 $a\mathcal{L}b$, 则 $a\in L(b)$ 且 $b\in L(a)$. 要证 $a\dot{\mathcal{L}}b$, 只需证 $\{a\}\cup Sa=\{b\}\cup Sb$. 考虑以下几种情况:

(i) 当 $a=b$时, 显然.

(ii) 设 $\exists s,t\in S$, 使 $a=sb$ 且 $b=ta$. 由引理5知,

$$a\in Sb=Sa \text{ 且 } b\in Sa=Sb.$$

因此 $\{a\}\cup Sa=Sa=Sb=\{b\}\cup Sb$.

(iii) 设 $\exists s,t\in S$, 使得 $a=sb$ 且 $b=a+ta$, 则

$$a\in Sb=Sa \text{ 且 } b=a+ta=sb+tsb=(s+ts)b\in Sb.$$

因此 $\{a\}\cup Sa = Sa = Sb = \{b\}\cup Sb$.

(iv) 设 $\exists s,t\in S$, 使 $a=b+sb$ 且 $b=ta$. 类似于(iii)可证.

(v) 设 $\exists s,t\in S$, 使 $a=b+sb$ 且 $b=a+ta$, 则 $a=a+b=b$, 显然.

所以 $\{a\}\cup Sa=\{b\}\cup Sb$, 即 $a\dot{\mathcal{L}}b$, 于是 $\mathcal{L}\subseteq\dot{\mathcal{L}}$. 故 $\dot{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$.

类似可证 $\dot{\mathcal{R}}=\mathcal{R}$.

命题 2　设 $S\in SL^+, a,b\in S$,则 $\mathcal{L}\subseteq\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{R}\subseteq\bar{\mathcal{R}}$.

证　设 $a,b\in S$ 且 $a\mathcal{L}b$, 则 $a\in L(b)$ 且 $b\in L(a)$. 因为 $L_k(a)$ 是包含 a 的理想, 从而 $L(a)\subseteq L_k(a)$, 所以 $b\in L_k(a)$, 即 $L_k(b)\subseteq L_k(a)$. 类似地, 可证 $L_k(a)\subseteq L_k(b)$. 因此 $L_k(a)=L_k(b)$, 即 $(a,b)\in\bar{\mathcal{L}}$, 从而 $\mathcal{L}\subseteq\bar{\mathcal{L}}$.

类似可证 $\mathcal{R}\subseteq\bar{\mathcal{R}}$.

注 1　上述包含关系是严格的, 如果令 S 为如表 1 和表 2 所给出的半环, 则容易验证 $S\in SL^+$ 且 $L_k(a)=L_k(b)=S$, 但 $L(a)=\{a,\ c\}$, $L(b)=\{b,c\}$, 即 $(a,b)\in\bar{\mathcal{L}}$, $(a,b)\notin\mathcal{L}$, 于是有 $\mathcal{L}\subsetneq\bar{\mathcal{L}}$.

表 1　加法运算

$+$	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

表 2　乘法运算

$\cdot$	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

命题 3　设 $S\in SL^+$, $a,b\in S$, 则 $\tilde{\mathcal{L}}\subseteq\bar{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{R}}\subseteq\bar{\mathcal{R}}$.

证　设 $a,b\in S$ 且 $a\tilde{\mathcal{L}}b$, 由引理 4 知, $\exists s\in S^1$, 使得 $a+sb=sb$, $b+sa=sa$, 从而

$$a+b+sb=b+sb,\quad b+a+sa=a+sa,$$

所以 $a\bar{\mathcal{L}}b$.

类似可证 $\tilde{\mathcal{R}}\subseteq\bar{\mathcal{R}}$.

注 2 上述包含关系是严格的, 如果令 S 为如表 3 和表 4 所给出的半环, 则容易验证 $S\in SL^+$ 且 $L_k(a)=L_k(b)=S$, 但 $\tilde{L}_a=\{a\}$, $\tilde{L}_b=\{b\}$, 其中 $\tilde{L}_a$ 表示包含 a 的 $\tilde{\mathcal{L}}$-类, 即 $(a,b)\in\bar{\mathcal{L}}$, $(a,b)\notin\tilde{\mathcal{L}}$, 于是有 $\tilde{\mathcal{L}}\subsetneq\bar{\mathcal{L}}$.

表 3　加法运算

$+$	a	b	c	d
a	a	d	d	d
b	d	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

表 4　乘法运算

$\cdot$	a	b	c	d
a	c	c	c	c
b	c	c	c	c
c	c	c	c	c
d	c	c	c	c

定理 1　设 $S\in SL^+$, $a\in S$, 则 $\bar{L}_a$ 或者是 1 个 $\tilde{\mathcal{L}}$-类或者是一些只包含 1 个元素的 $\tilde{\mathcal{L}}$-类的并, 其中 $\bar{L}_a$ 表示包含 a 的 $\bar{\mathcal{L}}$-类. 该结论对 $\bar{R}_a$ 也成立.

证　首先考虑 $\bar{L}_a$. 因为 $\tilde{\mathcal{L}}\subseteq\bar{\mathcal{L}}$, 所以 $\bar{L}_a$ 是 $\tilde{\mathcal{L}}$-类的并. 假设包含在 $\bar{L}_a$ 中的某个 $\tilde{\mathcal{L}}$-类包含2 个不同的元素, 即 $\exists c,d\in\bar{L}_a$, 使 $c\neq d$ 且 $c\tilde{\mathcal{L}}d$, 从而 $\exists x\in S^1$, 且 $x\neq 1$, 使 $c+xd=xd$, $d+xc=xc$.

令 $a'\in\bar{L}_a$, 则 $\exists s\in S$, 使得

$$a'+c+sc=c+sc,\quad c+a'+sa'=a'+sa',$$

从而有

$$a'+c+sc+xd+sxd=c+sc+xd+sxd\Rightarrow$$
$$a'+c+xd+s(c+xd)=c+xd+s(c+xd)\Rightarrow$$
$$a'+(x+sx)d=(x+sx)d\ (\text{因为 } c+xd=xd).$$

类似可得 $d+(x+xs)a'=(x+xs)a'$.

因此 $a'\tilde{\mathcal{L}}d$ 且 $\bar{L}_a$ 是 1 个 $\tilde{\mathcal{L}}$-类.

对偶地可得, $\bar{R}_a$ 或者是 1 个 $\tilde{\mathcal{R}}$-类或者是一些只包含 1 个元素的 $\tilde{\mathcal{R}}$-类的并.

命题 4　设 $S\in SL^+$, e 为半环 S 的乘法幂等元, 则 $\bar{L}_e$ ($\bar{R}_e$)是 1 个 $\tilde{\mathcal{L}}$-类($\tilde{\mathcal{R}}$-类).

证　只需证明 $\bar{L}_e$ 的结论, 然后对偶地可得 $\bar{R}_e$ 的结论.

设 $e\bar{\mathcal{L}}x$, 则 $\exists s,t\in S$, 使得

$$e+x+sx=x+sx,\ x+e+te=e+te,$$

从而有 $e(e+x+sx)=e(x+sx)$, 因此 $e^2+ex+esx=ex+esx$. 又因为 e 是乘法幂等元, 所以 $e+(e+es)x=(e+es)x$. 类似可证

$$x+(e+t)e=(e+t)e.$$

因此 $e\tilde{\mathcal{L}}x$, 故 $\bar{L}_e=\tilde{L}_e$, 即 $\bar{L}_e$ 是 1 个 $\tilde{\mathcal{L}}$-类.

致谢　对赵宪钟教授的悉心指导深表谢意!

2　参考文献

[1] Howie J M. Fundametals of semigroups theory [M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[2] Ciric M, Bogdanovic S. Semilattice decompositions of semigroups [J]. Semigroup Forum, 1996, 52(1): 119-132.

[3] 陈忠, 汪立民. 双单 ω-半群同余格上的关系 K [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(2): 188-191.

[4] 郭爱丽, 朱用文. 正则矩阵半群中的格林关系 [J]. 山东科学, 2010, 23(4): 1-4.

[5] 包强, 梅永刚, 邵海琴. 半环上的 Green's-L 关系 [J]. 科学技

术与工程, 2007, 7(7): 1416-1418.
[6] 平静水, 邓科峰. 幂等元半环上的 $D\vee D$ 关系 [J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2007, 31(1): 9-11.
[7] 张娟娟. 某些半环上 Green 关系的刻划 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 716-720.
[8] Grillet M P. Green's relations in a semiring [J]. Portugal Math, 1970, 29 (4): 181-195.
[9] Bhuniya A K, Mondal T K. Distributive lattice decompositions of semirings with a semilattice additive reduct [J]. Semigroup Forum, 2010, 80(2): 293-301.
[10] Sen M K, Bhuniya A K. On additive idempotent k-regular semirings [J]. Bull Cal Math Soc, 2001, 93(5): 371-384.
[11] Kehayopulu N. Note on Green's relations in ordered semigroups [J]. Mathematica Japonica, 1991, 36(2): 211-214.
[12] Kehayopulu N. Ideals and green's relations in ordered semigroups [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2006(1): 1-8.
[13] Kehayopulu N, Tsingelis M. On left regular ordered semigroups [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2002, 25(4): 609-615.
[14] Burris S N, Sankappanavar H P. A course in universal algebra [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
[15] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机 [M]. 南昌: 江西高校出版社, 1993.

The Green's Relations on a Semiring with Additive Semigroup as Semilattice

QIN Song, GAN Ai-ping*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Four different kinds of Green's relations on a semiring with additive semigroup as semilattice is studied by the algebraic theory of semigroups. Some characterizations of these Green's relations are given. Also, it is shown that $\dot{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$ and $\dot{\mathcal{R}}=\mathcal{R}$ on such a semiring.

Key words: Green's relations; semiring; ideal; k -set

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 126 页)

The Ultrashort Pulse Figure-8 Passively Mode-Locked Erbium Doped Laser

CHEN Zhi-yu, TANG Zhi-jie, SANG Ming-huang*

(College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The experimental study of Erbium doped fiber lasers using the nonlinear amplifying loop mirror for mode-locked operating is reported. we optimize dispersion management in the cavity. The fiber figure-8 erbium doped laser can realize self-starting passively mode-locked and directly produce 1.77×10^{-13} s ultrashort pulses output in 1 550 nm wavelengths. The average output power was 12 mW under a 300 mW pump power with a repetition rate of 19.7 MHz. The laser is operated simply because of all-fiber construction in the cavity. It can steady work hours in optical platform under the mode-locking condition.

Key words: fiber laser; passively mode-locked; nonlinear amplifying loop mirror; ultrashort pulse

(责任编辑: 冉小晓)