文章编号: 1000-5862(2012)02-0155-05

拟内射半模与伪内射半模

王　聪, 黄福生*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 利用半模理论对半模的拟内射性和伪内射性进行了研究, 得出了拟内射半模和 Hom 函子的关系; 同时在半模中引入拟内射盖, 并且获得了一些性质.

关键词: 拟内射半模; 伪内射半模; 拟内射盖
中图分类号: O 153.3　　　　文献标志码: A

0　引言

本文将拟内射模的概念推广至半模中, 给出了拟内射半模的等价判定, 并且讨论了拟内射半模 U 与反变函子 $\mathrm{Hom}_R(-,U)$ 的关系, 拟内射半模对直积运算的封闭性问题. 同时还引入了半模的拟内射(预)盖, 并且对半模的拟内射(预)盖进行了研究. 为了对拟内射半模进行更深入研究, 引入了伪内射半模的概念, 并深入研究了其性质.

本文中的 R 均表示含零元和单位元的加法交换半环. 如果不特别说明, 所有的半模 M 都是指满足条件 $1m=m$ 的左 R -半模, $\forall m\in M$, 而且所有的同态是指左 R -半模同态. 下面给出一些本文用到的相关概念和结论[1-10].

(i)设 E 为左 R -半模, 若半模 M 的任意子半模 N 到 E 的左 R -半模同态必可开拓为 M 到 E 的左 R -同态, 则称 E 为 M -内射半模; 若对任意左 R -半模 M , E 都为 M -内射的, 则称 E 为内射左 R -半模.

(ii)若 A , B 为左 R -半模, 称单同态 $f:A\to B$ 为可裂的, 若存在左 R -半模同态 $g:B\to A$, 满足 $gf=I_A$.

(iii)设 M 是半模, 若 M 的所有子半模都是可减的, 则称 M 为优半模.

(iv)若优半模 M 是由它的单子半模族 $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ 张成的, 则 $\exists B\subseteq A$, 使 $M=\oplus_B M_\beta$, 即 M 是半单优半模.

(v)设 M,M',N',N 是左 R -半模, 且 $f:M\to N$ 是 R -半模同态, 则

(a) 若 $g:M\to M'$ 是 k-正则满同态且满足 $\mathrm{Ker}(g)\subseteq\mathrm{Ker}(f)$, 则存在唯一的半模同态 $h:M'\to N$ 使得 $f=hg$; 此外, 若 f 是单同态, 则 h 也是单同态且有 $\mathrm{Ker}(h)=g(\mathrm{Ker}(f)),\mathrm{Im}(h)=\mathrm{Im}(f)$ 及 $f(M)=h(M')$; 所以 h 是半单同态当且仅当 $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Ker}(f)$ 且 h 是满同态当且仅当 f 是满同态;

(b)如果 $g:N'\to N$ 是 i-正则单同态, 并且满足 $\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathrm{Im}(g)$, 则存在唯一半模同态 $h:M\to N'$ 使得 $f=gh$; 又 $\mathrm{Ker}(h)=\mathrm{Ker}(f),\mathrm{Im}(h)=g^{-1}(\mathrm{Im}(f))$. h 是单同态当且仅当 f 是单同态, 且 h 是满的当且仅当 $g(N')=f(M)$.

1　拟内射半模

定义 1　设 U 为半模, 如果对于任意半模 K , 单同态 $f:K\to U$ 及任意半模同态 $\gamma:K\to U$, 存在半模同态 $\bar{\gamma}:U\to U$, 使得 $\gamma=\bar{\gamma}f$, 即图 1 交换, 则称 U 是拟内射半模.

$$\begin{tikzcd} U & \\ K \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f"] & U \arrow[ul, "\bar{\gamma}"'] \end{tikzcd}$$

图 1　交换图

收稿日期: 2011-10-20
基金项目: 江西省自然科学基金(2010GZS0093)和江西师范大学 2011 年度研究生创新基金(YJS2011017)资助项目.
作者简介: 黄福生(1962-), 男, 江西抚州人, 教授, 主要从事半环和半模理论的研究.

由定义 1 可以看出, 拟内射半模是比内射半模更广的一类模.

命题 1　设U是一个半模, 则下列论断等价:

(i)U是拟内射半模;

(ii)对任意半模K和单同态$f:K\to N$(其中N嵌入于U中)及任意半模同态$\gamma:K\to U$, 都存在一个半模同态$\overline{\gamma}:N\to U$, 使得$\gamma=\overline{\gamma}f$.

证　(i)$\Rightarrow$(ii)　如图2所示, 任取单同态$f:K\to N$及任意半模同态$\gamma:K\to U$, 其中N嵌入于U中, 设$i:N\to U$为标准嵌入, 则$if:K\to U$是单同态. 因为U是拟内射半模, 所以存在半模同态$\gamma_1:U\to U$, 使得$\gamma=\gamma_1 if$, 取$\overline{\gamma}=\gamma_1 i:N\to U$, 则$\gamma=\overline{\gamma}f$, 从而(ii)成立.

$$\begin{tikzcd}
U & & \\
K \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[ul, "\overline{\gamma}"'] \arrow[r, "i"] & U \arrow[ull, "\gamma_1"']
\end{tikzcd}$$

图 2　交换图

(ii)$\Rightarrow$(i)　令$N=U$即得.

定理 1　设U是拟内射半模, 对每一个以U为中间项的短真正合列$0\longrightarrow K\xrightarrow{f}U\xrightarrow{g}N\longrightarrow 0$, 其中$f,g$为$k$-正则同态, 则序列$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,U)\xrightarrow{\overline{g}}\mathrm{Hom}_R(U,U)\xrightarrow{\overline{f}}\mathrm{Hom}_R(K,U)\longrightarrow 0$是短真正合列, 其中$\overline{g}(\alpha)=\alpha g$.

证　(i)任取$\alpha\in\mathrm{Ker}(\overline{g})\subseteq\mathrm{Hom}_R(N,U)$, 则有$\overline{g}(\alpha)=\alpha g=0$. 又因为$g$为满同态, 故$\alpha(N)=0$, 即$\alpha=0$, 从而$\mathrm{Ker}(\overline{g})=0$.

(ii)任取$\alpha\in\mathrm{Hom}_R(N,U)$, 则$\overline{f}\overline{g}(\alpha)=\overline{f}(\alpha g)=\alpha gf=0$, 即$\overline{g}(\mathrm{Hom}_R(N,U))\subseteq\mathrm{Ker}(\overline{f})$.

(iii)任取$\beta\in\mathrm{Ker}(\overline{f})\subseteq\mathrm{Hom}_R(U,U)$, 即$\overline{f}(\beta)=\beta f=0$, 从而$\mathrm{Ker}(g)=f(K)\subseteq\mathrm{Ker}(\beta)$. 又因为$g$是$k$-正则满同态, 故由半模因子定理知, 存在半模同态$h:N\to U$, 使得$\beta=hg$, 即$\beta=\overline{g}(h)$. 因此$\mathrm{Ker}(\overline{f})\subseteq\overline{g}(\mathrm{Hom}_R(N,U))$.

(iv)任取$\gamma\in\mathrm{Hom}_R(K,U)$, 由$U$是拟内射半模知, $\exists\beta\in\mathrm{Hom}_R(U,U)$, 使得$\gamma=\beta f=\overline{f}(\beta)$, 即$\overline{f}$为满同态.

因此, 综合上述可知, 序列$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(N,U)\xrightarrow{\overline{g}}\mathrm{Hom}_R(U,U)\xrightarrow{\overline{f}}\mathrm{Hom}_R(K,U)\longrightarrow 0$是短真正合列.

推论 1　设U是拟内射半模, 当半模同态$f:K\to U$是单同态时, 则$\mathrm{Hom}_R(U,U)\xrightarrow{f^*}\mathrm{Hom}_R(K,U)$是满同态.

证　设任取$\gamma\in\mathrm{Hom}_R(K,U)$, 因为$f:K\to U$是单同态, 所以由$U$的拟内射性知, $\exists\overline{\gamma}\in\mathrm{Hom}_R(U,U)$, 使得$\gamma=\overline{\gamma}f=f^*(\overline{\gamma})$, 因此$f^*$是满同态.

命题 2　设U是一个拟内射半模, 则对任意单同态$f:U\to M$(其中M嵌入于U中), f是可裂的.

证　如图 3 所示, 因为U是拟内射半模, 且M嵌入于U中, 根据命题1知, 对于单同态$f:U\to M$和同态$I_U:U\to U$, 存在半模同态$\overline{\gamma}:M\to U$, 使得$\overline{\gamma}f=I_U$. 因此f是可裂的.

$$\begin{tikzcd}
U & \\
U \arrow[u, "I_U"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[ul, "\overline{\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

图 3　交换图

推论 2　若U是拟内射半模, 则所有单同态$f:U\to U$可裂.

定理 2　设U是半模, 若对任意半模A及任意单同态$f:A\to U$, 都有f是可裂的, 则U是拟内射半模.

证　如图 4 所示, 设A是任意半模, 由单同态$f:A\to U$是可裂的, 则存在同态$f_1:U\to A$, 使得$f_1f=I_A$. 对任意半模同态$\gamma:A\to U$, 令$\overline{\gamma}=\gamma f_1:U\to U$, 则$\overline{\gamma}f=\gamma f_1 f=\gamma I_A=\gamma$, 即图4交换. 因此$U$是拟内射半模.

$$\begin{tikzcd}
U & \\
A \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "f"] & U \arrow[ul, "\overline{\gamma}"'] \arrow[l, shift left, "f_1"]
\end{tikzcd}$$

图 4　交换图

定理 3　设$(U_\alpha)_{\alpha\in I}$是一些左R-半模的指标集, 若$\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$是拟内射半模, 则$\forall\alpha\in I$, U_α是拟内射的.

证　如图 5 所示，设 K 为任意半模，$\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \to U_\alpha$ 和 $\lambda_\alpha : U_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ 分别为标准投射和标准内射，$f : A \to U_\alpha$ 为单同态，$g : A \to U_\alpha$ 为任意同态，由于 $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ 是拟内射半模，则由命题 1 知，存在半模同态 $h_1 : U_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} U_\alpha$，使得 $\lambda_\alpha g = h_1 f$. 又令 $h = \pi_\alpha h_1 : U_\alpha \to U_\alpha$，则有 $hf = \pi_\alpha h_1 f = \pi_\alpha \lambda_\alpha g = g$，即图 5 交换，因此 U_α 是拟内射半模.

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dll, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "\phi"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, shift left, "\pi_i"] & M_i \arrow[l, shift left, "\eta_i"] \end{tikzcd}$$

图 5　交换图

2　半模的拟内射盖

定义 2　设 M 为左 R-半模，称半模同态 $\phi : E \to M$ 为 M 的拟内射盖，如果 E 是拟内射半模，并且满足下述条件：

(i)对于每个半模同态 $\varphi : F \to M$，其中 F 是拟内射半模，存在一个半模同态 $g : F \to E$，使得 $\varphi = \phi g$ (见图 6)；

(ii)如果使得 $\phi = \phi g$ 的同态 $g : E \to E$ 只能是 E 的自同构.

如果上述条件只有(i)满足，则称 ϕ 为 M 的拟内射预盖.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ E \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

图 6　交换图

定理 4　设 M 为左 R-半模，E_1，E_2 为拟内射半模，若 $\phi_1 : E_1 \to M$ 和 $\phi_2 : E_2 \to M$ 都是 M 的拟内射盖，则存在同构 $h : E_1 \to E_2$，即 M 的拟内射盖在同构意义下是唯一的.

证　如图 7 所示，因为 $\phi_1 : E_1 \to M$ 和 $\phi_2 : E_2 \to M$ 都是 M 的拟内射盖，所以存在半模同态 $g_1 : E_2 \to E_1$，$g_2 : E_1 \to E_2$ 使得 $\phi_2 = \phi_1 g_1$，$\phi_1 = \phi_2 g_2$，从而 $\phi_2 = \phi_2 g_2 g_1$，$\phi_1 = \phi_1 g_1 g_2$，即 $g_2 g_1 = I_{E_2}$，$g_1 g_2 = I_{E_1}$，因此存在同构 $h : E_1 \to E_2$，即半模 M 的拟内射盖在同构意义下是唯一的.

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[dl, shift right, "g_1"'] \arrow[d, "\phi_2"] \\ E_1 \arrow[ur, shift right, "g_2"'] \arrow[r, "\phi_1"] & M \end{tikzcd}$$

图 7　交换图

命题 3　设 $(M_i)_{i\in I}$ 是一些左 R-半模的指标集，E 为拟内射半模，若 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 有拟内射预盖 $\phi : E \to \bigoplus_{i\in I} M_i$，则 M_i 有拟内射预盖 $\pi_i \phi : E \to M_i$，其中 $\pi_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_i$ ($\forall i \in I$)是标准投射.

证　如图 8 所示，记 $\pi_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_i$ 和 $\eta_i : M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ 分别为标准投射和标准内射. 设 F 为拟内射半模，对于任意同态 $g : F \to M_i$，由于 $\phi : E \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ 是拟内射预盖，因此，存在半模同态 $h : F \to E$，使得 $\eta_i g = \phi h$，则 $\pi_i \phi h = \pi_i \eta_i g = g$，因此 $\pi_i \phi : E \to M_i$ 是拟内射预盖.

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dll, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ E \arrow[r, "\phi"] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, shift left, "\pi_i"] & M_i \arrow[l, shift left, "\eta_i"] \end{tikzcd}$$

图 8　交换图

命题 4　设 M 是左 R-半模，E_1，E 是拟内射半模，若 $\phi_1 : E \to M$，$\phi_2 : E_1 \to E$ 均是拟内射预盖，则 $\phi_1\phi_2 : E_1 \to M$ 也是拟内射预盖.

证　如图 9 所示，对于任意半模同态 $\varphi : F \to M$，其中 F 是拟内射半模. 由 E 是 M 的拟内射预盖知，存在一个半模同态 $g_1 : F \to E$，使得 $\varphi = \phi_1 g_1$. 又因为 E_1 是 E 的拟内射预盖，所以 $\exists g : F \to E_1$，使得 $g_1 = \phi_2 g$. 取 $\phi = \phi_1\phi_2 : E_1 \to M$，则

$$\varphi = \phi_1 g_1 = \phi_1 \phi_2 g = \phi g .$$

因此 E_1 是 M 的拟内射预盖.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ E_1 \arrow[r, "\phi_2"] & E \arrow[r, "\phi_1"] & M \end{tikzcd}$$

图 9 交换图

命题 4 说明半模的拟内射预盖具有传递性.

3 伪内射半模

定义 3 设 M 为左 R-半模, 如果对于任意左 R-半模 A, 单同态 $f: A \to M$ 和 $g: A \to M$, 存在一个半模同态 $h: M \to M$, 使得 $f = hg$, 即图 10 交换, 则称 M 为伪内射半模.

$$\begin{tikzcd} M & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

图 10 交换图

由定义 3 可以看出, 拟内射半模一定是伪内射半模.

命题 5 设 M 是左 R-半模,则下列各条等价:

(i) M 是伪内射半模;

(ii) 对任意左 R-半模 A, 任意半模单同态 $f: A \to M$, $g: A \to N$ (其中 N 嵌入于 M 中), 则存在一个半模同态 $h: N \to M$, 使得 $f = hg$.

定理 5 半单优半模是伪内射半模.

证 如图 11 所示, 设 U 是半单优半模 M 的任意子半模. α, β 是 U 到 M 的任意单同态, 则 $\alpha(U)$, $\beta(U)$ 都是 M 的直和项, 将 α, β 分别限制在 $\alpha(U)$, $\beta(U)$ 上, 分别记为 α', β', 显然它们都是同构. 设 ι_α, ι_β 分别是 $\alpha(U)$, $\beta(U)$ 到 M 的包含映射, 则 $\alpha = \iota_\alpha \alpha'$, $\beta = \iota_\beta \beta'$. $\forall u \in U$, 规定 $\beta(u) \mapsto \alpha'(u)$, 则得到 $\beta(U)$ 到 $\alpha(U)$ 的一个同态, 记为 γ, 显然 $\alpha' = \gamma\beta'$, 由于 $\beta(U)$ 是 M 的直和项, 所以 γ 可扩张为 M 到 $\alpha(U)$ 的同态 λ. 显然 $\gamma = \lambda \iota_\beta$, 取 $\iota_\alpha \lambda = \delta$.于是, $\alpha = \iota_\alpha \alpha' = \iota_\alpha(\gamma\beta') = \iota_\alpha(\lambda(\iota_\beta \beta')) = \iota_\alpha(\lambda\beta) = (\iota_\alpha \lambda)\beta = \delta\beta$, 即 M 是伪内射半模.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"] \arrow[ddr, "\alpha'"'] \arrow[dddr, "\alpha"'] & & \beta(U)\oplus M_\beta=M \arrow[ddl, "\lambda"'] \arrow[dddl, "\delta"] \\ & \beta(U) \arrow[ur, "\iota_\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ & \alpha(U) \arrow[d, "\iota_\alpha"] & \\ & \alpha(U)\oplus M_\alpha=M & \end{tikzcd}$$

图 11 交换图

定理 5 指出了伪内射半模和半单优半模的关系.

定理 6 设 $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是一些左 R-半模的指标集, 如果 $\underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha$ 是伪内射半模, 则对任意单同态 $f: A \to U_\alpha$ $(\alpha \in I)$ 和 $g: A \to U_\beta$ $(\beta \in I)$ 都存在同态 $h: U_\beta \to U_\alpha$, 使得 $f = hg$.

证 设 A 为任意半模,对任意单同态 $f: A \to U_\alpha$ 和 $g: A \to U_\beta$, 记 $\pi_\alpha: \underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha \to U_\alpha$ 和 $i_\alpha: U_\alpha \to \underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha$ 分别为标准投射和标准内射. 所以对单同态 $i_\alpha f: A \to \underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha$ 和 $g: A \to U_\beta$, 因 U_β 嵌入于 $\underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha$ 中, 由命题 5 知, 存在一个半模同态 $h_1: U_\beta \to \underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha$, 使得 $i_\alpha f = h_1 g$. 令 $h = \pi_\alpha h_1: U_\beta \to U_\alpha$, 则 $hg = \pi_\alpha h_1 g = \pi_\alpha i_\alpha f = f$ (见图 12).

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[r, shift left, "i_\alpha"] & \underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha \arrow[l, shift left, "\pi_\alpha"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & U_\beta \arrow[ul, "h"'] \arrow[u, "h_1"'] \end{tikzcd}$$

图 12 交换图

推论 3 设 $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是一些左 R-半模的指标集, 如果 $\underset{\alpha\in I}{\oplus} U_\alpha$ 是伪内射半模, 则 $\forall \alpha \in I$, U_α 是伪内射半模.

定理 7 设 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n (n \geqslant 2)$, 若 M 是伪内射半模, 则 M_i 是 M_j- 内射的($1 \leqslant i \neq j \leqslant n$)且 M_i 是伪内射的($1 \leqslant i \leqslant n$).

证　因 M 是伪内射半模，由推论 3 知，M_i 是伪内射的．下面仅需要证明对于 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$，$M_i$ 是 M_j- 内射的．首先证明当 $n=2$ 时结论成立．而对于当 $n>2$ 时的结论容易推广得到．如图 13 所示，若 $M = M_1 \oplus M_2$ 是伪内射半模，记 $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \to M_1$ 和 $\lambda_1 : M_1 \to M_1 \oplus M_2$ 分别为标准投射和标准内射．任取同态 $f : A \to M_1$ 和单同态 $g : A \to M_2$，定义 $u : A \to M_1 \oplus M_2$，其中 $u(a) = (f(a), g(a))(\forall a \in A)$，容易验证 u 是一个单同态．因为 $M_1 \oplus M_2$ 是伪内射的，从而由命题 5 知，存在同态 $h' : M_2 \to M_1 \oplus M_2$，使得 $u = h'g$．取 $h = \pi_1 h' : M_2 \to M_1$，则 $hg = \pi_1 h' g = \pi_1 u = f$．因此 M_1 是 M_2- 内射半模．同理 M_2 是 M_1- 内射的．

$$\begin{tikzcd} M_1 \oplus M_2 \arrow[r, shift left, "\pi_1"] & M_1 \arrow[l, shift left, "\lambda_1"] \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[r, "g"] & M_2 \arrow[ul, "h'"'] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

图 **13**　交换图

定理**8**　设 $N_1 \oplus N_2$ 是伪内射半模，$\sigma : N_1 \to N_2$ 是单同态，则 σ 可裂．

证　设 $q : N_2 \to N_1 \oplus N_2$ 和 $p : N_1 \oplus N_2 \to N_1$ 分别为标准内射和标准投射．如图 14 所示，定义 $\eta : \sigma(N_1) \to N_1 \oplus N_2$，其中 $\eta(\sigma(x)) = (x, 0)$，易知 η 是单同态．又由 $q|_{\sigma(N_1)} : \sigma(N_1) \to N_1 \oplus N_2$ 是单同态，且 $N_1 \oplus N_2$ 是伪内射半模，则 $\exists \eta^* : N_1 \oplus N_2 \to N_1 \oplus N_2$，使得 $\eta = \eta^* q|_{\sigma(N_1)}$．记 $\lambda = p\eta^* q : N_2 \to N_1$，则 $\forall x \in N_1$，$\lambda\sigma(x) = p\eta^* q\sigma(x) = p\eta^* q(\sigma(x)) = p\eta\sigma(x) = p(x,0) = x = I_{N_1}(x)$，即 $\lambda\sigma = I_{N_1}$，因此 σ 可裂．

$$\begin{tikzcd} & N_1 \oplus N_2 \\ \sigma(N_1) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "q|_{\sigma(N_1)}"] & N_1 \oplus N_2 \arrow[u, "\eta^*"'] \end{tikzcd}$$

图 **14**　交换图

4　参考文献

[1] Golan J S. Semirings and their application [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[2] 江俊．优半模的半单分解 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2008, 32(4): 395-398.

[3] Al-Thani H M J. *k*-projective semimodules [J]. Kobe J Math, 1996, 13(1): 49-59.

[4] 曾慧平．*i*-内射半模 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2007, 31(5): 488-491.

[5] 周梦．拟内射模及其应用 [J]．赣南师范学院学报，1991，6: 11-21.

[6] Du Xianneng, Zhao Chun'e. Pseudo-injective modules and principally pseudo-injective modules [J]. Mathematical Research and Exposition, 2007, 27(2): 223-228.

[7] Jainand S K, Singh Surjeet. Quasi-injective and pseudo-injective modules [J]. Canad Math Bull, 1975, 18(3): 359-366.

[8] 甘爱萍，黄福生．半模正合列 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2003, 27(2): 131-134.

[9] 曾慧平，黄福生，肖贤明．非零 *i*-内射半模的存在性 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2009, 33(4): 494-497.

[10] 黄福生，杨俊燕，余安安．*P*-内射半模 [J]．南昌大学学报：理科版, 2011, 35(2): 111-114.

Quasi-Injective and Pseudo-Injective Semimodule

WANG Cong, HUANG Fu-Sheng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: By the semimodular theory, the properties of quasi-injective and pseudo-injective to semimodules are studied. The relationship of quasi-injective semimodules and $\mathrm{Hom}_R(-,U)$ is got. And the quasi-injective cover to semimodules is introduced, then its properties are obtained.

Key words: quasi-injective semimodule; pseudo-injective semimodule; quasi-injective cover

(责任编辑：曾剑锋)