

文章编号: 1000-5862(2012)02-0155-05

拟内射半模与伪内射半模

王 聪, 黄福生*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 利用半模理论对半模的拟内射性和伪内射性进行了研究, 得出了拟内射半模和 Hom 函子的关系; 同时, 在半模中引入拟内射盖, 并且获得了一些性质.

关键词: 拟内射半模; 伪内射半模; 拟内射盖

中图分类号: O 153.3

文献标志码: A

0 引言

本文将拟内射模的概念推广至半模中, 给出了拟内射半模的等价判定, 并且讨论了拟内射半模 U 与反变函子 $\text{Hom}_R(-, U)$ 的关系, 拟内射半模对直积运算的封闭性问题. 同时还引入了半模的拟内射(预)盖, 并且对半模的拟内射(预)盖进行了研究. 为了对拟内射半模进行更深入研究, 引入了伪内射半模的概念, 并深入研究了其性质.

本文中的 R 均表示含零元和单位元的加法交换半环. 如果不特别说明, 所有的半模 M 都是指满足条件 $1m = m$ 的左 R -半模, $\forall m \in M$, 而且所有的同态是指左 R -半模同态. 下面给出一些本文用到的相关概念和结论^[1-10].

(i) 设 E 为左 R -半模, 若半模 M 的任意子半模 N 到 E 的左 R -半模同态必可开拓为 M 到 E 的左 R -同态, 则称 E 为 M -内射半模; 若对任意左 R -半模 M , E 都为 M -内射的, 则称 E 为内射左 R -半模.

(ii) 若 A, B 为左 R -半模, 称单同态 $f: A \rightarrow B$ 为可裂的, 若存在左 R -半模同态 $g: B \rightarrow A$, 满足 $gf = I_A$.

(iii) 设 M 是半模, 若 M 的所有子半模都是可减的, 则称 M 为优半模.

(iv) 若优半模 M 是由它的单子半模族 $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ 张成的, 则 $\exists B \subseteq A$, 使 $M = \bigoplus_B M_\beta$, 即 M 是半单优半模.

(v) 设 M, M', N', N 是左 R -半模, 且 $f: M \rightarrow N$

是 R -半模同态, 则

(a) 若 $g: M \rightarrow M'$ 是 k -正则满同态且满足 $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$, 则存在唯一的半模同态 $h: M' \rightarrow N$ 使得 $f = hg$; 此外, 若 f 是单同态, 则 h 也是单同态且有 $\text{Ker}(h) = g(\text{Ker}(f))$, $\text{Im}(h) = \text{Im}(f)$ 及 $f(M) = h(M')$; 所以 h 是半单同态当且仅当 $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$ 且 h 是满同态当且仅当 f 是满同态;

(b) 如果 $g: N' \rightarrow N$ 是 i -正则单同态, 并且满足 $\text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(g)$, 则存在唯一半模同态 $h: M \rightarrow N'$ 使得 $f = gh$; 又 $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f)$, $\text{Im}(h) = g^{-1}(\text{Im}(f))$. h 是单同态当且仅当 f 是单同态, 且 h 是满的当且仅当 $g(N') = f(M)$.

1 拟内射半模

定义 1 设 U 为半模, 如果对于任意半模 K , 单同态 $f: K \rightarrow U$ 及任意半模同态 $\gamma: K \rightarrow U$, 存在半模同态 $\bar{\gamma}: U \rightarrow U$, 使得 $\gamma = \bar{\gamma}f$, 即图 1 交换, 则称 U 是拟内射半模.

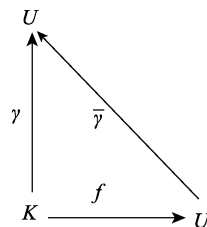


图 1 交换图

收稿日期: 2011-10-20

基金项目: 江西省自然科学基金(2010GZS0093)和江西师范大学 2011 年度研究生创新基金(YJS2011017)资助项目.

作者简介: 黄福生(1962-), 男, 江西抚州人, 教授, 主要从事半环和半模理论的研究.

由定义 1 可以看出, 拟内射半模是比内射半模更广的一类模.

命题 1 设 U 是一个半模, 则下列论断等价:

(i) U 是拟内射半模;

(ii) 对任意半模 K 和单同态 $f: K \rightarrow N$ (其中 N 嵌入于 U 中) 及任意半模同态 $\gamma: K \rightarrow U$, 都存在一个半模同态 $\bar{\gamma}: N \rightarrow U$, 使得 $\gamma = \bar{\gamma}f$.

证 (i) \Rightarrow (ii) 如图 2 所示, 任取单同态 $f: K \rightarrow N$ 及任意半模同态 $\gamma: K \rightarrow U$, 其中 N 嵌入于 U 中, 设 $i: N \rightarrow U$ 为标准嵌入, 则 $if: K \rightarrow U$ 是单同态. 因为 U 是拟内射半模, 所以存在半模同态 $\gamma_1: U \rightarrow U$, 使得 $\gamma = \gamma_1 if$, 取 $\bar{\gamma} = \gamma_1 i: N \rightarrow U$, 则 $\gamma = \bar{\gamma}f$, 从而(ii)成立.

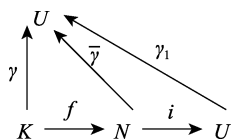


图 2 交换图

(ii) \Rightarrow (i) 令 $N = U$ 即得.

定理 1 设 U 是拟内射半模, 对每一个以 U 为中间项的短真正合列 $0 \rightarrow K \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$, 其中 f, g 为 k -正则同态, 则序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, U) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(U, U) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(K, U) \rightarrow 0$ 是短真正合列, 其中 $\bar{g}(\alpha) = \alpha g$.

证 (i) 任取 $\alpha \in \text{Ker}(\bar{g}) \subseteq \text{Hom}_R(N, U)$, 则有 $\bar{g}(\alpha) = \alpha g = 0$. 又因为 g 为满同态, 故 $\alpha(N) = 0$, 即 $\alpha = 0$, 从而 $\text{Ker}(\bar{g}) = 0$.

(ii) 任取 $\alpha \in \text{Hom}_R(N, U)$, 则 $\bar{f}\bar{g}(\alpha) = \bar{f}(\alpha g) = \alpha g f = 0$, 即 $\bar{g}(\text{Hom}_R(N, U)) \subseteq \text{Ker}(\bar{f})$.

(iii) 任取 $\beta \in \text{Ker}(\bar{f}) \subseteq \text{Hom}_R(U, U)$, 即 $\bar{f}(\beta) = \beta f = 0$, 从而 $\text{Ker}(g) = f(K) \subseteq \text{Ker}(\beta)$. 又因为 g 是 k -正则满同态, 故由半模因子定理知, 存在半模同态 $h: N \rightarrow U$, 使得 $\beta = hg$, 即 $\beta = \bar{g}(h)$. 因此 $\text{Ker}(\bar{f}) \subseteq \bar{g}(\text{Hom}_R(N, U))$.

(iv) 任取 $\gamma \in \text{Hom}_R(K, U)$, 由 U 是拟内射半模知, $\exists \beta \in \text{Hom}_R(U, U)$, 使得 $\gamma = \beta f = \bar{f}(\beta)$, 即 \bar{f} 为满同态.

因此, 综合上述可知, 序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, U) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(U, U) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(K, U) \rightarrow 0$ 是短真正合列.

推论 1 设 U 是拟内射半模, 当半模同态

$f: K \rightarrow U$ 是单同态时, 则 $\text{Hom}_R(U, U) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(K, U)$ 是满同态.

证 设任取 $\gamma \in \text{Hom}_R(K, U)$, 因为 $f: K \rightarrow U$ 是单同态, 所以由 U 的拟内射性知, $\exists \bar{\gamma} \in \text{Hom}_R(U, U)$, 使得 $\gamma = \bar{\gamma}f = f^*(\bar{\gamma})$, 因此 f^* 是满同态.

命题 2 设 U 是一个拟内射半模, 则对任意单同态 $f: U \rightarrow M$ (其中 M 嵌入于 U 中), f 是可裂的.

证 如图 3 所示, 因为 U 是拟内射半模, 且 M 嵌入于 U 中, 根据命题 1 知, 对于单同态 $f: U \rightarrow M$ 和同态 $I_U: U \rightarrow U$, 存在半模同态 $\bar{\gamma}: M \rightarrow U$, 使得 $\bar{\gamma}f = I_U$. 因此 f 是可裂的.

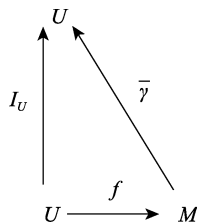


图 3 交换图

推论 2 若 U 是拟内射半模, 则所有单同态 $f: U \rightarrow U$ 可裂.

定理 2 设 U 是半模, 若对任意半模 A 及任意单同态 $f: A \rightarrow U$, 都有 f 是可裂的, 则 U 是拟内射半模.

证 如图 4 所示, 设 A 是任意半模, 由单同态 $f: A \rightarrow U$ 是可裂的, 则存在同态 $f_1: U \rightarrow A$, 使得 $f_1 f = I_A$. 对任意半模同态 $\gamma: A \rightarrow U$, 令 $\bar{\gamma} = \gamma f_1: U \rightarrow U$, 则 $\bar{\gamma}f = \gamma f_1 f = \gamma I_A = \gamma$, 即图 4 交换. 因此 U 是拟内射半模.

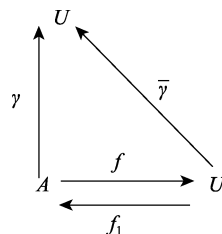


图 4 交换图

定理 3 设 $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是一些左 R -半模的指标集, 若 $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是拟内射半模, 则 $\forall \alpha \in I, U_\alpha$ 是拟内射的.

证 如图 5 所示, 设 K 为任意半模, $\pi_\alpha: \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \rightarrow U_\alpha$ 和 $\lambda_\alpha: U_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ 分别为标准投射和标准内射, $f: A \rightarrow U_\alpha$ 为单同态, $g: A \rightarrow U_\alpha$ 为任意同态, 由于 $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是拟内射半模, 则由命题 1 知, 存在半模同态 $h_1: U_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$, 使得 $\lambda_\alpha g = h_1 f$. 又令 $h = \pi_\alpha h_1: U_\alpha \rightarrow U_\alpha$, 则有 $hf = \pi_\alpha h_1 f = \pi_\alpha \lambda_\alpha g = g$, 即图 5 交换, 因此 U_α 是拟内射半模.

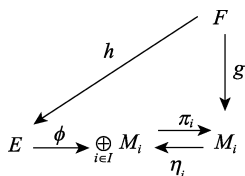


图 5 交换图

2 半模的拟内射盖

定义 2 设 M 为左 R -半模, 称半模同态 $\phi: E \rightarrow M$ 为 M 的拟内射盖, 如果 E 是拟内射半模, 并且满足下述条件:

(i) 对于每个半模同态 $\varphi: F \rightarrow M$, 其中 F 是拟内射半模, 存在一个半模同态 $g: F \rightarrow E$, 使得 $\varphi = \phi g$ (见图 6);

(ii) 如果使得 $\phi = \phi g$ 的同态 $g: E \rightarrow E$ 只能是 E 的自同构.

如果上述条件只有(i)满足, 则称 ϕ 为 M 的拟内射预盖.

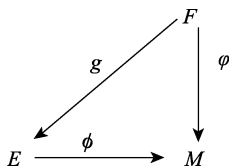


图 6 交换图

定理 4 设 M 为左 R -半模, E_1, E_2 为拟内射半模, 若 $\phi_1: E_1 \rightarrow M$ 和 $\phi_2: E_2 \rightarrow M$ 都是 M 的拟内射盖, 则存在同构 $h: E_1 \rightarrow E_2$, 即 M 的拟内射盖在同构意义下是唯一的.

证 如图 7 所示, 因为 $\phi_1: E_1 \rightarrow M$ 和 $\phi_2: E_2 \rightarrow M$ 都是 M 的拟内射盖, 所以存在半模同态 $g_1: E_2 \rightarrow E_1$, $g_2: E_1 \rightarrow E_2$ 使得 $\phi_2 = \phi_1 g_1$, $\phi_1 = \phi_2 g_2$, 从而 $\phi_2 =$

$\phi_2 g_2 g_1$, $\phi_1 = \phi_1 g_1 g_2$, 即 $g_2 g_1 = I_{E_2}$, $g_1 g_2 = I_{E_1}$, 因此存在同构 $h: E_1 \rightarrow E_2$, 即半模 M 的拟内射盖在同构意义下是唯一的.

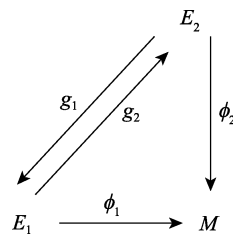


图 7 交换图

命题 3 设 $(M_i)_{i \in I}$ 是一些左 R -半模的指标集, E 为拟内射半模, 若 $\oplus_{i \in I} M_i$ 有拟内射预盖 $\phi: E \rightarrow \oplus_{i \in I} M_i$, 则 M_i 有拟内射预盖 $\pi_i \phi: E \rightarrow M_i$, 其中 $\pi_i: \oplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ ($\forall i \in I$) 是标准投射.

证 如图 8 所示, 记 $\pi_i: \oplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ 和 $\eta_i: M_i \rightarrow \oplus_{i \in I} M_i$ 分别为标准投射和标准内射. 设 F 为拟内射半模, 对于任意同态 $g: F \rightarrow M_i$, 由于 $\phi: E \rightarrow \oplus_{i \in I} M_i$ 是拟内射预盖, 因此, 存在半模同态 $h: F \rightarrow E$, 使得 $\eta_i g = \phi h$, 则 $\pi_i \phi h = \pi_i \eta_i g = g$, 因此 $\pi_i \phi: E \rightarrow M_i$ 是拟内射预盖.

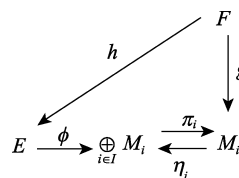


图 8 交换图

命题 4 设 M 是左 R -半模, E_1, E 是拟内射半模, 若 $\phi_1: E \rightarrow M$, $\phi_2: E_1 \rightarrow E$ 均是拟内射预盖, 则 $\phi_1 \phi_2: E_1 \rightarrow M$ 也是拟内射预盖.

证 如图 9 所示, 对于任意半模同态 $\varphi: F \rightarrow M$, 其中 F 是拟内射半模. 由 E 是 M 的拟内射预盖知, 存在一个半模同态 $g_1: F \rightarrow E$, 使得 $\varphi = \phi_1 g_1$. 又因为 E_1 是 E 的拟内射预盖, 所以 $\exists g: F \rightarrow E_1$, 使得 $g_1 = \phi_2 g$. 取 $\phi = \phi_1 \phi_2: E_1 \rightarrow M$, 则

$$\varphi = \phi_1 g_1 = \phi_1 \phi_2 g = \phi g.$$

因此 E_1 是 M 的拟内射预盖.

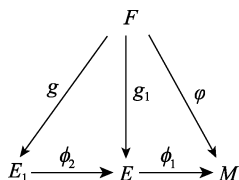


图 9 交换图

命题 4 说明半模的拟内射预盖具有传递性.

3 伪内射半模

定义 3 设 M 为左 R -半模, 如果对于任意左 R -半模 A , 单同态 $f: A \rightarrow M$ 和 $g: A \rightarrow M$, 存在一个半模同态 $h: M \rightarrow M$, 使得 $f = hg$, 即图 10 交换, 则称 M 为伪内射半模.

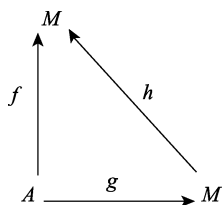


图 10 交换图

由定义 3 可以看出, 拟内射半模一定是伪内射半模.

命题 5 设 M 是左 R -半模, 则下列各条等价:

(i) M 是伪内射半模;

(ii) 对任意左 R -半模 A , 任意半模单同态 $f: A \rightarrow M$, $g: A \rightarrow N$ (其中 N 嵌入于 M 中), 则存在一个半模同态 $h: N \rightarrow M$, 使得 $f = hg$.

定理 5 半单优半模是伪内射半模.

证 如图 11 所示, 设 U 是半单优半模 M 的任意子半模. α, β 是 U 到 M 的任意单同态, 则 $\alpha(U), \beta(U)$ 都是 M 的直和项, 将 α, β 分别限制在 $\alpha(U), \beta(U)$ 上, 分别记为 α', β' , 显然它们都是同构. 设 $\iota_\alpha, \iota_\beta$ 分别是 $\alpha(U), \beta(U)$ 到 M 的包含映射, 则 $\alpha = \iota_\alpha \alpha', \beta = \iota_\beta \beta'$. $\forall u \in U$, 规定 $\beta(u) \mapsto \alpha'(u)$, 则得到 $\beta(U)$ 到 $\alpha(U)$ 的一个同态, 记为 γ , 显然 $\alpha' = \gamma \beta'$, 由于 $\beta(U)$ 是 M 的直和项, 所以 γ 可扩张为 M 到 $\alpha(U)$ 的同态 λ . 显然 $\gamma = \lambda \iota_\beta$, 取 $\iota_\alpha \lambda = \delta$. 于是, $\alpha = \iota_\alpha \alpha' = \iota_\alpha (\gamma \beta') = \iota_\alpha (\lambda \iota_\beta \beta') = \iota_\alpha (\lambda \beta) = (\iota_\alpha \lambda) \beta = \delta \beta$, 即 M 是伪内射半模.

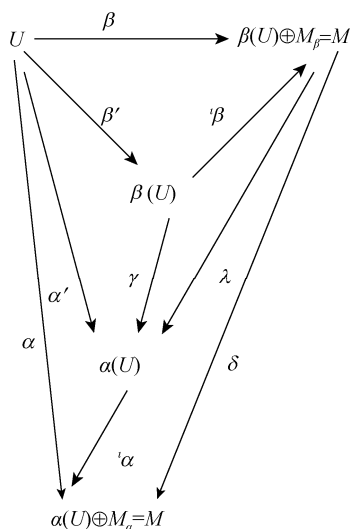


图 11 交换图

定理 5 指出了伪内射半模和半单优半模的关系.

定理 6 设 $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是一些左 R -半模的指标集, 如果 $\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是伪内射半模, 则对任意单同态 $f: A \rightarrow U_\alpha$ ($\alpha \in I$) 和 $g: A \rightarrow U_\beta$ ($\beta \in I$) 都存在同态 $h: U_\beta \rightarrow U_\alpha$, 使得 $f = hg$.

证 设 A 为任意半模, 对任意单同态 $f: A \rightarrow U_\alpha$ 和 $g: A \rightarrow U_\beta$, 记 $\pi_\alpha: \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha \rightarrow U_\alpha$ 和 $i_\alpha: U_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$ 分别为标准投射和标准内射. 所以对单同态 $i_\alpha f: A \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$ 和 $g: A \rightarrow U_\beta$, 因 U_β 嵌入于 $\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$ 中, 由命题 5 知, 存在一个半模同态 $h_1: U_\beta \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$, 使得 $i_\alpha f = h_1 g$. 令 $h = \pi_\alpha h_1: U_\beta \rightarrow U_\alpha$, 则 $hg = \pi_\alpha h_1 g = \pi_\alpha i_\alpha f = f$ (见图 12).

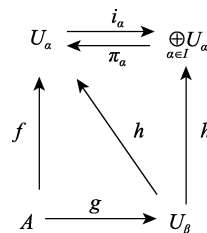


图 12 交换图

推论 3 设 $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是一些左 R -半模的指标集, 如果 $\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是伪内射半模, 则 $\forall \alpha \in I, U_\alpha$ 是伪内射半模.

定理 7 设 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ ($n \geq 2$), 若 M 是伪内射半模, 则 M_i 是 M_j -内射的 ($1 \leq i \neq j \leq n$) 且 M_i 是伪内射的 ($1 \leq i \leq n$).

证 因 M 是伪内射半模, 由推论 3 知, M_i 是伪内射的. 下面仅需要证明对于 $1 \leq i \neq j \leq n$, M_i 是 M_j -内射的. 首先证明当 $n=2$ 时结论成立. 而对于当 $n>2$ 时的结论容易推广得到. 如图 13 所示, 若 $M = M_1 \oplus M_2$ 是伪内射半模, 记 $\pi_1: M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1$ 和 $\lambda_1: M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2$ 分别为标准投射和标准内射. 任取同态 $f: A \rightarrow M_1$ 和单同态 $g: A \rightarrow M_2$, 定义 $u: A \rightarrow M_1 \oplus M_2$, 其中 $u(a) = (f(a), g(a)) (\forall a \in A)$, 容易验证 u 是一个单同态. 因为 $M_1 \oplus M_2$ 是伪内射的, 从而由命题 5 知, 存在同态 $h': M_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2$, 使得 $u = h'g$. 取 $h = \pi_1 h': M_2 \rightarrow M_1$, 则 $hg = \pi_1 h'g = \pi_1 u = f$. 因此 M_1 是 M_2 -内射半模. 同理 M_2 是 M_1 -内射的.

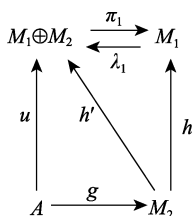


图 13 交换图

定理8 设 $N_1 \oplus N_2$ 是伪内射半模, $\sigma: N_1 \rightarrow N_2$ 是单同态, 则 σ 可裂.

证 设 $q: N_2 \rightarrow N_1 \oplus N_2$ 和 $p: N_1 \oplus N_2 \rightarrow N_1$ 分别为标准内射和标准投射. 如图 14 所示, 定义 $\eta: \sigma(N_1) \rightarrow N_1 \oplus N_2$, 其中 $\eta(\sigma(x)) = (x, 0)$, 易知 η 是单同态. 又由 $q|_{\sigma(N_1)}: \sigma(N_1) \rightarrow N_1 \oplus N_2$ 是单同态, 且 $N_1 \oplus N_2$ 是伪内射半模, 则 $\exists \eta^*: N_1 \oplus N_2 \rightarrow N_1 \oplus N_2$, 使得 $\eta = \eta^* q|_{\sigma(N_1)}$. 记 $\lambda = p\eta^* q: N_2 \rightarrow N_1$,

则 $\forall x \in N_1$, $\lambda\sigma(x) = p\eta^* q\sigma(x) = p\eta^* q(\sigma(x)) = p\eta\sigma(x) = p(x, 0) = x = I_{N_1}(x)$, 即 $\lambda\sigma = I_{N_1}$, 因此 σ 可裂.

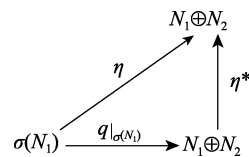


图 14 交换图

4 参考文献

- [1] Golan J S. Semirings and their application [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] 江俊. 优半模的半单分解 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2008, 32(4): 395-398.
- [3] Al-Thani H M J. k -projective semimodules [J]. Kobe J Math, 1996, 13(1): 49-59.
- [4] 曾慧平. i -内射半模 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(5): 488-491.
- [5] 周梦. 拟内射模及其应用 [J]. 赣南师范学院学报, 1991, 6: 11-21.
- [6] Du Xianneng, Zhao Chun'e. Pseudo-injective modules and principally pseudo-injective modules [J]. Mathematical Research and Exposition, 2007, 27(2): 223-228.
- [7] Jainand S K, Singh Surjeet. Quasi-injective and pseudo-injective modules [J]. Canad Math Bull, 1975, 18(3): 359-366.
- [8] 甘爱萍, 黄福生. 半模正合列 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2003, 27(2): 131-134.
- [9] 曾慧平, 黄福生, 肖贤明. 非零 i -内射半模的存在性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(4): 494-497.
- [10] 黄福生, 杨俊燕, 余安安. P -内射半模 [J]. 南昌大学学报: 理科版, 2011, 35(2): 111-114.

Quasi-Injective and Pseudo-Injective Semimodule

WANG Cong, HUANG Fu-Sheng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: By the semimodular theory, the properties of quasi-injective and pseudo-injective to semimodules are studied. The relationship of quasi-injective semimodules and $\text{Hom}_R(-, U)$ is got. And the quasi-injective cover to semimodules is introduced, then its properties are obtained.

Key words: quasi-injective semimodule; pseudo-injective semimodule; quasi-injective cover

(责任编辑: 曾剑锋)