文章编号: 1000-5862(2012)02-0165-03

# 具有连续变量的 2 阶差分方程的振动性

赵玉萍

(青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁 810007)

摘要: 利用振动理论研究一类具有连续变量的 2 阶非线性差分方程的振动性, 得到了方程的解和解的 1 阶差分振动的充分条件, 并且利用 Banach 空间的不动点原理研究这类方程的非振动解, 得到了这类方程在特殊情形下的有界正解.

关键词: 振动性; 连续变量; 差分方程

中图分类号: O 175.7 文献标志码: A

## 0 引言

差分方程在计算机科学、经济学、生物数学等领域有着广泛应用, 差分方程的研究越来越受到人们的重视. 近年来, 关于离散变量的差分方程定性理论研究成果比较多[1-5], 且对于连续变量的差分方程解的振动性, 也引起许多学者的关注[6-10].

文献[6-7]研究了一类连续变量的 1 阶非线性差分方程

$$\Delta\left(x(t)-p(t)x(t-\tau)\right)+\sum_{i=1}^{n}h_i(t,x(t-\sigma_i))=0$$

的振动性.

本文研究 2 阶非线性差分方程

$$\Delta\left(p(t)\Delta x(t)\right)+q(t)f(x(t-\sigma))=0(0<t_1\leqslant t<+\infty) \quad (1)$$

解的振动性, 其中 $\Delta x(t)=x(t+\tau)-x(t)$ , $\tau>0$ 是步长, $p(t)\in C([t_1,+\infty),(0,1])$ , $\sigma>0$ 是给定的正数, $q(t)\in C([t_1,+\infty),[0,+\infty))$, $f(u)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $f(u)/u\geqslant 1$ .

## 1 主要结果

**定理1** 设 $\sum_{n=0}^{\infty}q(t+n\tau)=\infty$ , 则方程(1)的一切解振动.

证(反证法) 设方程(1)具有非振动解, 不失一般性, 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解, $x(t)>0$ , $t>t_1$ .

由方程(1)可得

$$\Delta\left(p(t)\Delta x(t)\right)=-q(t)f(x(t-\sigma))\leqslant 0,$$

则

$$p(t)\Delta x(t)\geqslant 0,\quad t>t_1. \quad (2)$$

事实上, 如果 $\exists t_2\geqslant t_1$, $p(t_2)\Delta x(t_2)=c<0$ , 则当 $t>t_2$ 时, $p(t)\Delta x(t)\leqslant c$ , 从而 $\Delta x(t)\leqslant c/p(t)$ , 因此, 当 $n\to\infty$ 时,

$$x(t+(n+1)\tau)\leqslant x(t+n_0\tau)+c\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{p(t+k\tau)}\to -\infty.$$

上式与 $x(t)$ 最终为正解矛盾. 故当 $t>t_1$ 时, $x(t)>0$ , $\Delta x(t)\geqslant 0$ , $\Delta\left(p(t)\Delta x(t)\right)\leqslant 0$ . 因此 $\exists l>0$ , $t>t_1$ , 使得 $f(x(t-\sigma))\geqslant x(t-\sigma)\geqslant l>0$.

由方程(1)知,

$$\Delta\left(p(t)\Delta x(t)\right)+lq(t)\leqslant 0, \quad (3)$$

$$p(t+(n+1)\tau)\Delta x(t+(n+1)\tau)-$$

$$p(t+n_1\tau)\Delta x(t+n_1\tau)+l\sum_{k=n_1}^{n}q(t+k\tau)\leqslant 0,$$

$$l\sum_{k=n_1}^{n}q(t+k\tau)\leqslant p(t+n_1\tau)\Delta x(t+n_1\tau),$$

当 $n\to\infty$ 时, $l\sum_{k=n_1}^{\infty}q(t+k\tau)\leqslant p(t+n_2\tau)\Delta x(t+n_2\tau)$, 这与已知矛盾, 则方程(1)的一切解振动. 定理 1 得证.

**定理 2** 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(t+n\tau)}\sum_{k=n}^{\infty}q(t+k\tau)=\infty$ , 则方程(1)的每个有界解振动.

收稿日期: 2012-01-12

基金项目: 国家自然科学基金(10961020)和国家民委(10QH03)资助项目.

作者简介: 赵玉萍(1975-), 女, 青海湟中人, 副教授, 硕士, 主要从事差分方程定性理论的研究.

证(反证法) 设方程(1)具有非振动有界解, 不失一般性, 设 $x(t)$ 是最终有界正解, $x(t)>0$, $t>t_1$. 类似定理 1 的证明知, (2)式和(3)式成立. 由不等式(3)知,

$$\Delta\big(p(t)\Delta x(t)\big)+lq(t)\leqslant 0,$$
$$p(t+(n+m+1)\tau)\Delta x(t+(n+m+1)\tau)-p(t+n\tau)\Delta x(t+n\tau)+l\sum_{k=n}^{n+m}q(t+k\tau)\leqslant 0.$$

由(2)式得, 令 $m\to\infty$,

$$\frac{l}{p(t+n\tau)}\sum_{k=n}^{\infty}q(t+k\tau)\leqslant \Delta x(t+n\tau),$$
$$l\sum_{n=N}^{k}\frac{1}{p(t+n\tau)}\sum_{k=n}^{\infty}q(t+k\tau)\leqslant x(t+(k+1)\tau).$$

因为 $x(t)$ 有界, 从而

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{p(t+n\tau)}\sum_{k=n}^{\infty}q(t+k\tau)<\infty,$$

这与已知矛盾. 故 $x(t)$ 振动.定理 2 得证.

**定理 3** 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q(t+n\tau)=\infty$, $f(u)$ 是非减的连续函数, 则方程(1)的任意解 $x(t)$ 的差分 $\Delta x(t)$ 是振动的.

证(反证法) 设方程(1)的一个解 $x(t)$ 的差分 $\Delta x(t)$ 是非振动的. 不失一般性, 设当 $t>t_1$ 时, $\Delta x(t)<0$, $x(t)$ 为减函数, 即 $x(t)$ 也是非振动的. 令

$$z(t)=p(t)\Delta x(t)/f(x(t-\sigma)),\tag{4}$$
$$\Delta z(t)=p(t+\tau)\Delta x(t+\tau)/f(x(t+\tau-\sigma))-p(t)\Delta x(t)/f(x(t-\sigma))=\Delta\big(p(t)\Delta x(t)\big)/f(x(t-\sigma))+p(t+\tau)\Delta x(t+\tau)[f(x(t-\sigma))-f(x(t+\tau-\sigma))]/f[f(x(t+\tau-\sigma))(x(t-\sigma))].$$

因为 $x(t)$ 非振动, 故

$$f(x(t+\tau-\sigma))f(x(t-\sigma))>0.$$

又因为 $x(t)$ 是减函数, $f(u)$ 是非减的连续函数, 所以

$$f(x(t-\sigma))\geqslant f(x(t+\tau-\sigma)),$$
$$\Delta z(t)\leqslant \Delta\big(p(t)\Delta x(t)\big)/f(x(t-\sigma))=-q(t),$$
$$z(t+n\tau)-z(t+n_1\tau)\leqslant -\sum_{k=n_1}^{n-1}q(t+k\tau).$$

由已知得 $\lim\limits_{n\to\infty}z(t+n\tau)=-\infty$. 于是, 由(4)式得, 当 $t>t_2$ 时, $f(x(t+n\tau-\sigma))>0$, 则 $x(t+n\tau-\sigma)>0$.

设当 $t>t_3$ 时, $z(t)\leqslant -(m+1)$, 其中 $m>0$. 由(4)式知, $\exists t_4$, 当 $t>t_4$ 时,

$$p(t)\Delta x(t)+(m+1)f(x(t-\sigma))\leqslant 0,$$
$$p(t)\Delta x(t)+f(x(t-\sigma))<0,$$
$$\Delta x(t)+f(x(t-\sigma))\leqslant p(t)\Delta x(t)+f(x(t-\sigma))<0.\tag{5}$$

因为 $f(u)/u\geqslant 1$, 所以

$$\Delta x(t)+f(x(t-\sigma))\geqslant \Delta x(t)+x(t-\sigma).\tag{6}$$

又因为 $x(t)$ 是减函数, 故

$$\Delta x(t)+x(t-\sigma)=x(t+\tau)+\big(x(t-\sigma)-x(t)\big)>0.\tag{7}$$

由(6)式和(7)式得

$$\Delta x(t)+f(x(t-\sigma))>0.$$

显然这与(5)式矛盾. 定理 3 得证.

下面研究当 $p(t)=1$, $q(t)<0$ 时方程(1)的非振动解. 考虑方程

$$\Delta^2x(t)-q(t)f(x(t-\sigma))=0,\tag{8}$$

其中 $q(t)\in C\big([t_{0,}+\infty),\mathbf{R}^+\big)$, 假设如下条件:

($H_1$) $f(u)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}), f(0)=0,$ 当 $u\neq 0$ 时, $uf(u)>0;$

($H_2$) 存在常数 $\alpha>0$, $l>0$, 使得 $\forall x,y$, $0\leqslant x\leqslant\alpha$, $0\leqslant y\leqslant\alpha$, $|f(x)-f(y)|\leqslant l|x-y|$;

($H_3$)当 $t\geqslant t_1$ 时, $\sum\limits_{s_1=n_0}^{+\infty}\sum\limits_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)<+\infty$, 整数 $n_0\geqslant 0$.

**定理 4** 假设方程(8)满足条件($H_1$)~($H_3$), 则方程(8)至少存在 1 个有界的最终正解.

证 设 $0\leqslant p<1$, 当 $t>t_1$ 时, 取充分大 $n_1$ 且 $n_1\geqslant n_0$, 使得

$$\sum_{s_1=n_1}^{+\infty}\sum_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)<(1-p)/(2l).\tag{9}$$

设 $B$ 是所有有界实数序列 $x=\{x(t+n\tau)\}_{n=0}^{+\infty}$ 构成的集合, 在其上定义范数为 $\|x\|=\sup\limits_{n\geqslant 0}|x(t+n\tau)|$, 则 $B$ 为 Banach 空间. 令 $B_1=\{x\in B:(1-p)\alpha/2\leqslant x(t+n\tau)\leqslant\alpha\}$, 则 $B_1$ 是 $B$ 的有界闭凸子集, 在 $B_1$ 上定义算子 $T:B_1\to B$ 为

$$(Tx)(t+n\tau)=\begin{cases}\dfrac{1-p}{2}\alpha+\sum\limits_{s_1=n}^{+\infty}\sum\limits_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)f\big(x(t+s\tau-\sigma)\big), & n\geqslant n_1,\\ (Tx)(t+n_1\tau), & n\leqslant n_1.\end{cases}$$

由于 $T$ 是连续的, 则 $\forall x\in B_1$,

$$(Tx)(t+n\tau)\leqslant\frac{1-p}{2}\alpha+\sum_{s_1=n}^{+\infty}\sum_{s=s_1}^{+\infty}lq(t+s\tau)|x(t+s\tau-\sigma)|\leqslant\frac{1-p}{2}\alpha+l\alpha\sum_{s_1=n}^{+\infty}\sum_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)\leqslant\frac{1-p}{2}\alpha+l\alpha\frac{1-p}{2l}\leqslant\alpha,$$

且 $(Tx)(t+n\tau)\geqslant(1-p)\alpha/2$. 因此

$$(1-p)\alpha/2\leqslant(Tx)(t+n\tau)\leqslant\alpha,$$

所以 $TB_1\subseteq B_1$.

因为 $\forall x^{(1)},x^{(2)}\in B_1$，由$(H_2)$和(9)式可得

$$\left|(Tx^{(1)})(t+n\tau)-(Tx^{(2)})(t+n\tau)\right|\leqslant$$

$$\sum_{s_1=n}^{+\infty}\sum_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)l\left|x^{(1)}(t+n\tau-\sigma)-x^{(2)}(t+n\tau-\sigma)\right|\leqslant$$

$$l\frac{1-p}{2l}\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|=\frac{1-p}{2}\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,$$

因此 $\left\|Tx^{(1)}-Tx^{(2)}\right\|\leqslant\frac{1-p}{2}\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|$，$0<(1-p)/2<1$．所以 $T$ 为压缩映射．由 Banach 压缩映射原理知，映射 $T$ 一定有唯一的不动点 $x\in B_1$，使得 $Tx=x$，此不动点有界且满足

$$x(t+n\tau)=\begin{cases}\frac{1-p}{2}\alpha+\sum\limits_{s_1=n}^{+\infty}\sum\limits_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)f\left(x(t+s\tau-\sigma)\right), & n\geqslant n_1,\\ (Tx)(t+n_1\tau), & n\leqslant n_1.\end{cases}$$

当 $n$ 充分大时，有

$$x(t+n\tau)=\frac{1-p}{2}\alpha+\sum_{s_1=n}^{+\infty}\sum_{s=s_1}^{+\infty}q(t+s\tau)f(t+s\tau-\sigma),$$

对上式求 2 次差分得

$$\Delta^2x(t+n\tau)=q(t+n\tau)f(t+n\tau-\sigma),$$

即 $x(t)$ 就是方程(8)的 1 个有界的最终正解．定理 4 得证．

## 2　参考文献


[1] Agarwal R P. Difference equations and inequalities:theory, methods and applications [M]. 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 2000.

[2] Morchalo J. On convergence of solutions of a second order nonlinear difference equations [J]. Appl Math Comput, 2003, 12(1/2): 59-66.

[3] 史红波．3 阶非线性差分方程组边值问题的多个正解 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2009, 33(3): 331-334.

[4] 杨柳，罗李平．一类带连续分布滞量的高阶偏微分方程组的振动性 [J]．江西师范大学学报：自然科学版，2007，31(6): 591-595.

[5] 陈慧琴，靳祯．带有强迫项 2 阶差分方程的振动性 [J]．太原师范学院学报：自然科学版, 2011, 10(2): 35-37.

[6] 申建华．具连续变量差分方程振动性的比较定理及应用 [J]．科学通报, 1996, 41(16): 1441-1444.

[7] 张广，高英．差分方程的振动理论 [M]．北京:高等教育出版社, 2001.

[8] 罗交晚，刘正荣，俞元洪．带有极大值项的中立型差分方程的振动性和非振动性 [J]．应用数学学报, 2002, 25(3): 385-391.

[9] 熊万民，王志成．具连续变量的中立型差分方程的振动性 [J]．湖南大学学报：自然科学版, 2001, 28(1): 8-12.

[10] 毕平．连续变量差分方程的振动性 [J]．河北师范大学学报：自然科学版, 2003, 27(6): 549-552, 556.


# Oscillation Criteria for a Family of Second Order Nonlinear Difference Equations with Continuous Arguments


ZHAO Yu-ping

(School of Mathematics and Statistics, Qinghai University for Nationalities, Xining Qinghai 810007, China)



**Abstract:** Oscillation criteria for a family of second order nonlinear difference equations with continuous arguments is studied by theory of oscillation. Then some sufficient conditions for the oscillations of all solutions and first order difference of solutions of this equation are established. Using the fixed point theorem in Banach space, the non-oscillatory solution of the equation is studied and positive solution of the equation in special conditions is obtained.



**Key words**: oscillation; continuous arguments; difference equation

(责任编辑：曾剑锋)