第 36 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No.2
2012 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　　Mar. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)02-0168-03

一类具偏差变元的 2 阶微分方程周期解问题

汪小明, 谢新华

(上饶师范学院数学与计算机科学学院, 江西　上饶　334001)

摘要: 利用重合度理论研究了一类 2 阶具偏差变元的泛函微分方程

$$ax''+f(t,x'(t-\tau_1(t)))+h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)+\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))=p(t)$$

的周期解, 得到了周期解存在性的若干结论, 推广了已有的结论.

关键词: 周期解; 偏差变元; 重合度

中图分类号: O 175.12　　　文献标志码: A

0　引言

非线性泛函微分方程周期解的存在性在生态学和控制理论等方面有重要的应用背景. 随着泛函微分方程应用不断推广及理论研究逐渐深入, 有关具偏差变元的 2 阶微分方程周期解的研究非常活跃, 并得到一些较好的研究结果[1-9]. 文献[5]研究了如下具有偏差变元的泛函微分方程

$$ax''+f(x'(t-\tau_1(t)))+cx(t)+g(x(t-\tau_2(t)))=p(t),\quad (1)$$

其中 f,g,τ_1,τ_2,p 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实连续函数, τ_1,τ_2 和 p 均以 2π 为周期且 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=0$, 得到如下结果.

定理A　如果下列条件成立: (i) 存在常数 $M>0$, 使得 $|g(x)|\leqslant M,\forall x\in\mathbf{R}$; (ii) $0<|c|<|a|/(2\pi)^2$; (iii) $\int_0^{2\pi}f(x'(t-\tau_1(t)))\mathrm{d}t=0$, 则方程(1)至少存在一个 2π 周期解.

本文探讨如下比方程(1)更广泛的一类 2 阶具有偏差变元的泛函微分方程

$$ax''+f(t,x'(t-\tau_1(t)))+h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)+\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))=p(t)\quad (2)$$

周期解的存在性,其中 $f,h,g,\tau_1,\tau_2,\tau_3,p\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, f,h,g 关于第1分量为 2π 周期, τ_1,τ_2,τ_3, $\beta(t),p(t)$ 均为 2π 周期函数且 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=0$, 利用Mawhin拓展定理和一些分析技巧, 得到了一些新的结果. 特别地, 当 $f(t,x'(t-\tau_1(t)))=f(x'(t-\tau_1(t)))$, $h(t,x'(t-\tau_2(t)))\equiv c$, $\beta(t)\equiv 1$ 时, 本文定理1就是文献[5]的结果, 且本文将文献[5]条件(ii)放大了4倍, 从而, 本文定理1包含和推广了文献[5]的结果, 解决了一部分文献[5]不能解决的方程, 可见本文是在文献[5]工作基础上有意义地推广.

为了便于表述, 本文采用如下记号: $X=\{x(t)\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})\mid x(t+2\pi)=x(t)\}$ 具有范数 $\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}\{|x(t)|,|x'(t)|\}$, $Y=\{x(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\mid x(t+2\pi)=x(t)\}$ 具有范数 $\|x\|_0=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}\{|x(t)|\}$, 在上述意义下, X,Y 都是Banach空间, 分别定义算子 L 和 N 为

$$L:X\cap C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})\to Y,x(t)\mapsto ax''(t),\quad (3)$$

$$N:X\to Y,x(t)\mapsto -f(t,x'(t-\tau_1(t)))-h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)-\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))+p(t).\quad (4)$$

同时定义投影算子为

$$P:X\cap\mathrm{dom}L\to\mathrm{Ker}L,$$

$$x\to Px=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\mathrm{d}t,x=x(t)\in X,$$

$$Q:Y\cap Y/\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Ker}L,$$

$$y\to Qy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(t)\mathrm{d}t,y=y(t)\in Y,$$

则有 $\mathrm{Ker}L=\mathrm{Im}\,P=\mathbf{R}$, $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}\,L$.

对某个正数 $\tilde{R}$, 令 $\Omega=\{x(t)\in X:|x(t)|<\tilde{R},|x'(t)|<$

收稿日期: 2011-12-10

基金项目: 国家级特色专业数学与应用数学(教高函[2010]15), 江西省青年自然科学基金(2009GQS0023), 江西省教育厅青年科学基金(GJJ11234)和上饶师范学院自然科学基金(1001)资助项目.

作者简介: 汪小明(1978-), 男, 江西玉山人, 副教授, 硕士, 主要从事微分方程的研究.

$\tilde{R}\}$，则 L 是指标为0的Fredholm算子，且可证明 N 在 $\bar{\Omega}\subset X$ 上 L-紧．由(3)式和(4)式知，算子方程 $Lx=\lambda Nx, \lambda\in(0,1)$ 等价于下列辅助方程

$$ax''+\lambda f(t,x'(t-\tau_1(t)))+\lambda h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)+\lambda\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))=\lambda p(t). \tag{5}$$

引理 1[10]　设 X 和 Y 是Banach空间，$\Omega\subset X$ 是有界开集，$L:\mathrm{dom}L\subset X\to Y$ 为指标为 0 的Fredholm算子，$N:X\to Y$ 在 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧的，若下列条件满足：

(i) $Lx\neq\lambda Nx, \forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$；

(ii) $QNx\neq 0, \forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$；

(iii) Brouwer度 $\deg(QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq 0$，

则方程$Lx=Nx$在 $\bar{\Omega}$ 中至少存在一个 2π 周期解．

引理 2[11]　设$x(t)$是连续可微的 2π-周期函数，则 $\forall t_0\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\max_{t\in[t_0,t_0+2\pi]}|x(t)|\leqslant|x(t_0)|+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

1　主要结果

定理 1　如果下列条件成立：

(A_1) 存在常数 $M>0$, 使得 $|g(t,x)|\leqslant M, \forall t\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}$;

(A_2) $0<|b|\leqslant|h(t,x)|\leqslant|d|<|a|/\pi^2, \forall t\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}$;

(A_3) $\int_0^{2\pi}f(t,x'(t-\tau_1(t))\mathrm{d}t=0$,

则方程(2)至少存在一个 2π 周期解．

证　设$x(t)$是方程(5)的任一 2π 周期解，将方程(5)两边同时从0到 2π 积分得

$$\int_0^{2\pi}[h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)+\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))]\mathrm{d}t=0,$$

则由积分中值定理知，$\exists t_0\in(0,2\pi)$，使得

$$h(t_0,x'(t_0-\tau_2(t_0)))x(t_0)+\beta(t_0)g(t_0,x(t_0-\tau_3(t_0)))=0,$$

于是

$$|x(t_0)|\leqslant\frac{|\beta(t_0)g(t_0,x(t_0-\tau_3(t_0)))|}{|b|}\leqslant\frac{M\|\beta\|_0}{|b|},$$

从而由引理2知

$$\|x\|_0=\max_{t\in[t_0,t_0+2\pi]}|x(t)|\leqslant|x(t_0)|+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{M\|\beta\|_0}{|b|}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

另外，方程(5)的两边同时乘以$x(t)$，并从0到 2π 积分得

$$-a\int_0^{2\pi}x'^2(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_0^{2\pi}x(t)f(t,x'(t-\tau_1(t))\mathrm{d}t+\lambda\int_0^{2\pi}h(t,x'(t-\tau_2(t)))x^2(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_0^{2\pi}\beta(t)x(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{2\pi}x(t)p(t)\mathrm{d}t,$$

那么由 $f(t,x)$ 的连续性知，$\exists L>0$，使得

$$|f(t,x'(t-\tau_1(t))|\leqslant L, \forall t\in[0,2\pi].$$

于是

$$|a|\int_0^{2\pi}|x'^2(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2\pi|d|\max_{t\in[t_0,t_0+2\pi]}|x(t)|^2+2\pi(L+M+\|p\|_0)\max_{t\in[t_0,t_0+2\pi]}|x(t)|\leqslant$$

$$2\pi|d|\left[\frac{M}{|b|}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\right]^2+2\pi(L+M+\|p\|_0)\left[\frac{M}{|b|}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$\frac{\pi|d|}{2}\left(\int_0^{2\pi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\right)^2+\alpha\int_0^{2\pi}|x'(s)|\mathrm{d}s+\beta,$$

这里

$$\alpha=\frac{\pi[2M|d|+|b|(L+M\|\beta\|_0+\|p\|_0)]}{|b|},$$

$$\beta=\frac{2\pi[|d|M^2\|\beta\|_0^2+M|b|(L+M\|\beta\|_0+\|p\|_0)]}{|b|^2}.$$

再由 $\int_0^{2\pi}|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\sqrt{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi}|x'(s)|^2\mathrm{d}s}$ (Schwarz不等式)知，

$$|a|\int_0^{2\pi}|x'^2(t)|\mathrm{d}t\leqslant\pi^2|d|\int_0^{2\pi}|x'(t)|^2\mathrm{d}t+\sqrt{2\pi\alpha^2}\sqrt{\int_0^{2\pi}|x'(t)|^2\mathrm{d}t}+\beta. \tag{6}$$

因此，由(6)式及条件(A_2)知，存在与 λ 无关的常数 $R_1>0$, 使得 $\int_0^{2\pi}|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant R_1$，所以，存在与 λ 无关的常数 $R_2>0$, 使得

$$\|x\|_0\leqslant\frac{M\|\beta\|_0}{|b|}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{M\|\beta\|_0}{|b|}+\frac{1}{2}\sqrt{2\pi R_1}:=R_2,$$

从而，由方程(5)及(A_3)知，

$$|a|\int_0^{2\pi}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant|d|\int_0^{2\pi}|x(t)|\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}|\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))|\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}|p(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2\pi(|d|R_2+M\|\beta\|_0+p_\infty)\,. \tag{7}$$

由于 $x(0)=x(2\pi)$，$\exists t_1\in[0,2\pi]$，使得 $x'(t_1)=0$，故由(7)式知，存在与 λ 无关的常数 $R_3>0$, 使得

$$|x'(t)|=\left|\int_{t_1}^{t}x''(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^{2\pi}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant R_3.$$

取 $\tilde{R}=\max\{R_1,R_2,R_3\}$, 令 $\Omega=\{x(t)\in X:|x(t)|<\tilde{R}, |x'(t)|<\tilde{R}\}$, 则 $Nx=-f(t,x'(t-\tau_1(t)))-h(t,x'(t-\tau_2(t)))\cdot x(t)-\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))+p(t)$ 在 $\bar{\Omega}\subset X$ 上 L-紧. 根据以上对周期解的界计算可知,

$$\forall x\in \mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega, Lx\neq\lambda Nx.$$

下面还需证明 (i) $QNx\neq 0, \forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$; (ii) $\deg(QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq 0$.

事实上, 当 $x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$ 时, x 为常数且 $|x|=\tilde{R}$; 由

$$QNx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)-\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))]\mathrm{d}t$$

知 $|QNx|\geqslant|b|[|x|-|\beta(t)g(x(t-\tau_3(t)))|/|b|]\geqslant|b|[\tilde{R}-M\|\beta\|_0/b]>0$, 即 $QNx\neq 0$, 于是(i)成立.

为了证明 (ii), 作变换 $F(x,\mu)=\mu h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)+(1-\mu)[\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))], 0\leqslant\mu\leqslant 1$, 则对于 $x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega,\mu\in[0,1]$, x 为常数且 $|x|=\tilde{R}$, 有

(a)当 $x=\tilde{R}, b>0$ 时,

$$F(x,\mu)\geqslant b[\mu\tilde{R}+(1-\mu)(\tilde{R}-M\|\beta\|_0/b)]>0;$$

(b)当 $x=\tilde{R}, b<0$ 时,

$$F(x,\mu)\leqslant b[\mu\tilde{R}+(1-\mu)(\tilde{R}-M\|\beta\|_0/|d|)]<0,$$

所以, 当 $x=\tilde{R}$ 时, $F(x,\mu)\neq 0$.

同理可证当 $x=-\tilde{R}$ 时, $F(x,\mu)\neq 0$, 因而 $F(x,\mu)$ 是同伦变换, 因此

$$\deg(QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)=\deg(-h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)-\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t))),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)=\deg(-h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq 0.$$

故根据引理 1 知, 方程(2)至少存在一个 2π 周期解.

2 参考文献

[1] 张正球, 庾建设. 一类时滞 Duffing 型方程的周期解 [J]. 高校应用学报: A 辑, 1998, 13(4): 389-392.

[2] 李建利, 申建华. 具脉冲时滞的 Duffing 型方程的周期解 [J]. 应用数学学报, 2005, 28 (1): 124-133.

[3] 陈新一. 一类时滞 Duffing 方程周期解的存在性 [J]. 科学技术与工程, 2007, 7(18): 4684-4686.

[4] 林壮鹏, 徐远通, 郭志明. 一类有偏差变元的泛函微分方程的 2π周期解 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2000, 15(4): 421-427.

[5] 弭鲁芳, 武延树, 张萍萍. 一类具时滞耗散型 Duffing 方程的周期解 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(19): 235-238.

[6] 肖兵, 周启元. 一类具有偏差变元的 Duffing 型方程的周期解 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(1): 29-33.

[7] 佘志炜, 王全义. 一类具有偏差变元的 2 阶泛函微分方程周期解 [J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(6): 709-714.

[8] 郑春华, 刘文斌, 倪晋波, 等. 具有时滞的 Rayleigh 方程周期解的存在性与唯一性 [J]. 数学杂志, 2010, 30(1): 82-90.

[9] 黄德新, 鲁世平, 柳溦. 一类具偏差变元的 Rayleigh 方程的周期解的存在性 [J]. 安徽师范大学学报:自然科学版, 2011, 34(1): 15-19.

[10] Gains R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[11] Zhou Yinggao, Tang Xianhua. On existence of periodic solutions of a kind of Rayleigh equation with a deviating argument [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(8): 2355-2361.

The Periodic Solution for a Kind of Second Order Differential Equations with Deviating Arguments

WANG Xiao-ming, XIE Xin-hua

(School of Mathematics and Computer Science, Shangrao Normal University, Shangrao Jiangxi 334001, China)

Abstract: By employing the coincidence degree theory, a kind of second order functional differential equations with deviating arguments such as $ax''+f(t,x'(t-\tau_1(t)))+h(t,x'(t-\tau_2(t)))x(t)+\beta(t)g(t,x(t-\tau_3(t)))=p(t)$ is studied. Some results on the existence of periodic solution are obtained, which generalizes the known results.

Key words: periodic solution; deviating argument; coincidence degree

(责任编辑: 曾剑锋)