文章编号: 1000-5862(2012)02-0177-03

抛物型模糊二叉树欧式期权定价模型

胡　华, 陈清风

(宁夏大学数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 利用可信性理论对抛物型模糊二叉树期权定价模型进行了研究, 推导出单期二叉树模型欧式期权价值的期望值, 拓展了上升因子为三角模糊变量的单期二叉树欧式期权定价模型. 而抛物型模糊数能够更好地捕捉股价变化过程中的不确定性, 使模型的适用范围更广.

关键词: 模糊二叉树模型; 抛物型模糊数; 欧式期权定价

中图分类号: O 211.6; O 159; F 224.9　　文献标志码: A

0　引言

Liu Bao-ding等[1-3]定义了可信性测度, 以及2004年Liu Bao-ding等[4-5]建立了可信性理论, 使之成为模糊数学研究的一个分支, 为利用模糊理论建立金融期权定价模型提供了思路. 李伟等[6]设标的资产的股价服从一种模糊随机过程, 运用抛物型模糊二叉树模型对欧式期权进行定价, 得到的期权价格及风险中性概率为一个赋权区间. 陈怡[7]在传统二叉树模型中引入可信性理论,当股票上升因子u为三角模糊变量时建立一种模糊二叉树的模型, 把股价变化作为模糊变量,利用求解期望值的方法来消除模型结果中的模糊性. 从文献[6]可知, 三角模糊数是抛物型模糊数的特殊情况, 而抛物型模糊数能够更好地刻画股票上升因子u的模糊度. 因此, 考虑股票上升因子u为抛物型模糊数, 利用可信性理论求欧式期权的二叉树模型的期权价值的期望, 以便得到精确的数值, 为决策者更好地服务.

1　*L-R* 型模糊数及抛物型模糊数

称一个模糊数M为L-R型模糊数, 如果其隶属函数为

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L\left[(\underline{m}-x)/\alpha\right], x\leqslant \underline{m}, \alpha>0,\\ 1, \qquad \underline{m}\leqslant x\leqslant \bar{m},\\ R\left[(x-\bar{m})/\beta\right], x\geqslant \bar{m}, \beta>0,\end{cases}$$

其中L、R是参考函数, 称L为左枝、R为右枝, α、β分别为左、右展形, L-R数可简记为$M=(\underline{m},\bar{m},\alpha,\beta)_{LR}$, 约定当$\alpha=\beta=0$且$\underline{m}\neq\bar{m}$时, M为区间数, 当$\alpha=\beta=0$且$\underline{m}\neq\bar{m}$时, L-R型模糊数退化为确定数, 即$M=(\underline{m},\bar{m},0,0)_{LR}$. 若取$L(x)=R(x)=\max\{0,1-|x|\}$, 则$M$为梯形模糊数, 若$\underline{m}\neq\bar{m}$也满足, 则$M$为三角模糊数.

特殊的 L-R 模糊数──抛物型模糊数, 其隶属函数[8] (见图 1)为

$$\mu_M(x)=\begin{cases}((x-a)/(b-a))^n, a<x\leqslant b,\\ 1, \qquad b<x\leqslant c,\\ ((d-x)/(d-c))^n, c<x\leqslant d,\\ 0, \qquad 其它,\end{cases}$$

其中$n>0, a<b\leqslant c<d$. 上述抛物型模糊数可以简记为$M=(a,b,c,d)_n$. 当n=1时上述模糊数就是梯形模糊数, 记为$M=(a,b,c,d)$. 当$n=1$且$b=c$时上述模糊数就是三角模糊数. 可以看出, 三角模糊数及梯形模糊数是n次抛物型模糊数的特例.

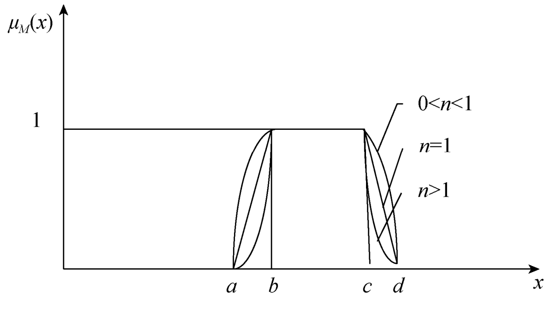

图 1　抛物型模糊数的隶属函数

收稿日期: 2011-12-20
基金项目: 国家自然科学基金 (61063020), 宁夏自然科学基金(NZ1050)和宁夏研究生教育创新计划(2010)资助项目.
作者简介: 胡　华(1962-), 男, 宁夏中宁人, 教授, 主要从事随机过程与金融数学的研究.

2 单期模糊二叉树模型

仍沿用文献[6]的假设: (i)市场是没有摩擦的, 即市场中资产是无限可分的, 无税收, 无卖空限制以及无交易成本; (ii)在整个交易期间无风险利率r和波动率σ是不变的; (iii)市场中无套利机会, 根据文献[9]可知, u和d也是不变的; (iv)市场中每一个投资者都是价格的接受者; (v)所有的投资者做决策时都有相同信念.

由于金融市场上的不确定性是大量存在着, 在经过 Δt 后, 股价更是不可能准确预测, 因而在传统的二叉树模型中股价变化的程度也同样存在着模糊性. 由可信性理论, 定义股价变动的上升因子 u 为在可信性空间 $(\Theta, P\Theta, Cr)$ 中的抛物型模糊变量, 即 $u=(a,b,c,d)_n$, 并且 $1<a<b<c<d$, 同时 $d=1/u$ 同样成立. 如图1所示. 且可以得到模糊变量 d 的隶属函数为

$$\mu(x)=\begin{cases}((dx-1)/[x(d-c)])^n, & 1/d<x\leqslant 1/c,\\ 1, & 1/c<x\leqslant 1/b,\\ ((1-ax)/[x(b-a)])^n, & 1/b<x\leqslant 1/a,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由于标的资产和期权的风险源是同样的, 所以在单期二叉树模型中, 构造包括一个看涨期权空头和 Δ 股资产多头的证券组合. 用 S 表示标的资产, 它是指在期权执行期限内无分红的股票的价格, 记 X 为相应的期权执行价格. 为消除市场中存在的套利机会, 可以假设

$$S/a<X<\alpha S \text{ 和 } S/a<\mathrm{e}^{r\Delta t}<\alpha S .$$

同样, 根据风险中性原理, 模糊二叉树模型中期权价值[10] 为

$$\begin{aligned}f&=\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left[pf_u+(1-p)f_d\right]\left(p=(\mathrm{e}^{r\Delta t}-d)/(u-d)\right)=\\ &\mathrm{e}^{-r\Delta t}\frac{\mathrm{e}^{r\Delta t}-d}{u-d}(uS-X)\left(f_d=0\right)=\\ &\mathrm{e}^{-r\Delta t}\frac{u\mathrm{e}^{r\Delta t}-1}{u^2-1}(uS-X).\end{aligned}\tag{1}$$

因为 u 和 d 为模糊变量, 从而此时期权价值 f 也是一个模糊变量, 这对决策者做决策是不利的, 因此, 为了得到精确的结果, 需要对结果进行求解. 结合可信性理论中求解模糊变量函数的期望值的条件, 当因变量为准确值时(1)式一定是单调函数. 通过简单地推理, 易知这个条件能够成立. 对(1)式取期望值得

$$\begin{aligned}&E(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}\left(Cr\leqslant x\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n\right]+\\
&\int_b^c f(x)\mathrm{d}(1)+\int_c^d f(x)\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(2-\frac{d-x}{d-c}\right)^n\right]=\frac{n}{2(b-a)^n}\cdot\\
&\int_a^b\frac{x^2S-\left(X+\mathrm{e}^{r\Delta t}S\right)x+\mathrm{e}^{r\Delta t}X}{x^2-1}(x-a)^{n-1}\mathrm{d}x+\frac{n}{2(d-c)^n}\cdot\\
&\int_c^d\frac{x^2S-\left(X+\mathrm{e}^{r\Delta t}S\right)x+\mathrm{e}^{r\Delta t}X}{x^2-1}\left[x-(2c-d)\right]^{n-1}\mathrm{d}x=\\
&\frac{S}{2}+\frac{n}{4(b-a)^n}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}X+S\right)\Big[(1-a)^{n-1}\ln\frac{b-1}{a-1}-(-1-\\
&a)^{n-1}\ln\frac{b+1}{a+1}\Big]+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^i\frac{(b-1)^i-(a-1)^i-(b+1)^i+(a+1)^i}{i}\cdot\\
&\left[(1-a)^{n-1-i}-(-1-a)^{n-1-i}\right]-\frac{n}{4(b-a)^n}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}S+X\right)\\
&\left[(1-a)^{n-1}\ln\frac{b-1}{a-1}+(-1-a)^{n-1}\ln\frac{b+1}{a+1}\right]+\\
&\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^i\frac{(b-1)^i-(a-1)^i+(b+1)^i-(a+1)^i}{i}\Big[(1-a)^{n-1-i}-\\
&(-1-a)^{n-1-i}\Big]+\frac{2^n-1}{2}S+\frac{n}{4(d-c)^n}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}X+S\right)\cdot\\
&\left[(1-2c+d)^{n-1}\ln\frac{d-1}{c-1}-(-1-2c+d)^{n-1}\ln\frac{d+1}{c+1}\right]+\\
&\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^i\frac{(d-1)^i-(c-1)^i-(d+1)^i+(c+1)^i}{i}\cdot\\
&\left[(1-2c+d)^{n-1-i}-(-1-2c+d)^{n-1-i}\right]-\\
&\frac{n}{4(d-c)^n}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}S+X\right)\Big[(1-2c+d)^{n-1}\ln\frac{d-1}{c-1}+(-1-2c+\\
&d)^{n-1}\ln\frac{d+1}{c+1}\Big]+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^i\frac{(d-1)^i-(c-1)^i+(d+1)^i-(c+1)^i}{i}\cdot\\
&\left[(1-2c+d)^{n-1-i}-(-1-2c+d)^{n-1-i}\right].\end{aligned}\tag{2}$$

(2)式即为当股票价格变动的上升因子 u 为抛物型模糊变量时, 单期二叉树模型看涨期权的价值 f 的期望值.

当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}&E(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}\left(Cr\leqslant x\right)=\\
&S+\frac{1}{4(b-a)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}X+S\right)\left[\ln\frac{b-1}{a-1}-\ln\frac{b+1}{a+1}\right]-\\
&\frac{1}{4(b-a)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}S+X\right)\left[\ln\frac{b-1}{a-1}+\ln\frac{b+1}{a+1}\right]+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4(d-c)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}X+S\right)\left[\ln\frac{d-1}{c-1}-\ln\frac{d+1}{c+1}\right]-$$
$$\frac{1}{4(d-c)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}S+X\right)\left[\ln\frac{d-1}{c-1}+\ln\frac{d+1}{c+1}\right]. \tag{3}$$

(3)式为当股票价格变动的上升因子 u 为梯形模糊变量时, 单期二叉树模型看涨期权的价值 f 的期望值.

当 $n=1$, $b=c$ 时,

$$\begin{aligned}E(f)=S+&\frac{1}{4(b-a)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}X+S\right)\left[\ln\frac{b-1}{a-1}-\ln\frac{b+1}{a+1}\right]-\\&\frac{1}{4(b-a)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}S+X\right)\left[\ln\frac{b-1}{a-1}+\ln\frac{b+1}{a+1}\right]+\\&\frac{1}{4(d-b)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}X+S\right)\left[\ln\frac{d-1}{b-1}-\ln\frac{d+1}{b+1}\right]-\\&\frac{1}{4(d-b)}\left(\mathrm{e}^{r\Delta t}S+X\right)\left[\ln\frac{d-1}{b-1}+\ln\frac{d+1}{b+1}\right].\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式为当股票价格变动的上升因子 u 为三角型模糊变量时, 单期二叉树模型看涨期权的价值 f 的期望值, 这个结果同参考文献中的结果是一致的.

综合(2)~(4)式可知, 当股票价格变动的上升因子 u 为梯形模糊变量时, 单期二叉树欧式看涨期权价格的期望值是当 u 为抛物型模糊变量且 $n=1$ 时的特殊情况; 当股票价格变动的上升因子 u 为三角模糊变量时, 其单期二叉树欧式看涨期权价格期望值是当 u 为梯形模糊变量且 $b=c$ 时的特殊情况. 即当 u 为梯形模糊变量和当 u 为三角模糊变量时, 单期二叉树欧式看涨期权价格期望值是当 u 为抛物型模糊变量时的特殊情况. 也可以说成当 u 为抛物型模糊变量时单期二叉树欧式看涨期权价格期望值是 u 为梯形模糊变量和 u 为三角模糊变量的拓展. 因此, 本文基于三角模糊变量的单期二叉树欧式看涨期权定价模型拓展为基于抛物型模糊变量单期的二叉树欧式看涨期权定价模型. 对于欧式看跌期权价值只需令(1)式中的 f_u 为 0 即可求出. 而抛物型模糊数能更好地捕捉股价过程的不确定性, 使模型的适用范围更广.

3　结束语

金融市场上存在着不确定性, 因此在期权定价的二叉树模型中, 股票价格的上升及下降因子存在一定的模糊性. 本文将股价上升因子 u 看成是抛物型模糊变量, 这主要是抛物型模糊数能更好地捕捉股价过程的不确定性, 三角模糊数和梯形模糊数只是其特例. 并取得了如下的研究结果: (i)在 $ud=1$ 的条件下, 给出下降因子 d 的隶属函数, 在传统的二叉树模型中引入了抛物型模糊数; (ii)利用可信性理论推导出单期抛物型模糊二叉树欧式期权价格的期望值(看涨和看跌), 能对期权市场价格进行较为精确的预测. 该模型不仅可以更好地描述股价变化的不确定性与模糊性, 使适用范围更广, 还可以消除结果中的模糊性, 有利于决策.

4　参考文献

[1] Liu Baoding, Liu Yiankui. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 445-450.

[2] Li Xiang, Liu Baoding. A sufficient and necessary condition for credibility measures [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2006, 14(5): 527-535.

[3] 彭锦, 刘宝碇. 不确定规划的研究现状及其发展前景 [J]. 运筹与管理, 2002, 11(2): 1-10.

[4] Liu Baoding. Uncertainty theory: an introduction to its axiomatic foundations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 81-147.

[5] 彭锦, 刘宝碇. 不确定理论及其公理化体系 [J]. 黄冈师范学院学报, 2004, 24(3): 1-9.

[6] 李伟, 韩立岩. Knight 不确定条件下的模糊二叉树期权定价模型 [J]. 中国管理科学, 2009, 17(6): 9-16.

[7] 陈怡. 关于欧式看涨期权的模糊二叉树模型 [J]. 哈尔滨商业大学学报: 社会科学版, 2007, 97(6): 10-12.

[8] 支林仙, 朱宇阳, 程德巧. 基于多层次模糊综合评判的网络成瘾评价 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2008, 32 (5): 525-529.

[9] Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach [J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3): 229-263.

[10] 陈怡. 关于期权定价的模糊二叉树模型及其应用 [D]. 天津: 天津大学, 2007.

(下转第 188 页)