第 36 卷 第 3 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 36 No.3
2012 年 5 月　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　May 2012

文章编号: 1000-5862(2012)03-0230-04

一类高阶线性微分方程解的增长性

石　磊, 易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 利用 Nevanlinna 的基本理论和方法, 研究了齐次线性微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{k-1}+\cdots+Af=0$ 及非齐次线性微分方程解的增长性. 在假设存在某个 $A_s(1\leqslant s\leqslant k-1)$ 具有有限亏值的有限级整函数的情况下, 证明了齐次线性微分方程的任一非零解均为无穷级, 非齐次方程除 1 个例外解外, 其它的非零解也均为无穷级.

关键词: 微分方程; 整函数; 亏值; 无穷级
中图分类号: O 174.52　　文献标志码: A

0　引言与结果

本文使用值分布的标准记号[1-2], 用 $\rho(f)$ 和 $\mu(f)$ 分别表示亚纯函数 f 的级与下级, $\lambda(f)$、$\overline{\lambda}(f)$ 分别表示亚纯函数 f 的零点及不同零点收敛指数, $N(r,f)$ 表示函数 f 在 $|z|\leqslant r$ 内的极点的密指量, $m(r,f)$ 表示 f 的均值函数, 用 $T(r,f)$ 表示 f 的特征函数, $\deg A_j$ 表示多项式 A_j 的次数.

关于 2 阶线性微分方程
$$f''+A(z)f'+B(z)f=0, \tag{1}$$
众所周知, 当 $A(z)$、$B(z)$ 是整函数时, 方程(1)的解都是整函数, 并且如果 $B(z)$ 是超越的, 而 f_1 和 f_2 是方程(1)的 2 个线性无关解, 那么 f_1、f_2 中至少有 1 个是无穷级. 自然会问: 当 $A(z)$、$B(z)$ 满足什么条件时, 会使得方程(1)的任一非零解都是无穷级呢? 1988 年 G.Gunderson 在文献[3]中给出 $A(z)$、$B(z)$ 是整函数并满足 $\rho(A)<\rho(B)$; 以及 1991 年 S.Hellerstein、J.Miles 和 J.Rossi 在文献[4]中给出 $A(z)$ 是多项式, $B(z)$ 是超越的, 或者 $\rho(B)<\rho(A)\leqslant 1/2$, 在这些条件下方程(1)的任一非零解均为无穷级.

由此自然会想到: 如果给出 $\rho(A)=\rho(B)$,或者 $\rho(A)>1/2$, $\rho(B)<\rho(A)$, 是否方程(1)的任一非零解的级还会是无穷? 2011 年伍鹏程在文献[5]中, 利用亏值进一步研究了相关问题, 证明了下面的定理.

定理 A　假设 $A(z)$ 是具有有限亏值的有限级整函数, $B(z)$ 是超越整函数, $\mu(B)<1/2$, 则方程(1)的任一非零解均为无穷级.

1993 年, 陈宗煊在文献[6]中, 证明了以下 2 个定理.

定理 B　设 $A,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数, 假设下面的(i)或(ii)成立

(i)　$\rho(A_j)<\rho(A)<\infty$ $(j=1,2,\cdots,k-1)$;

(ii)　A 是有限级整函数, $A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是多项式,

那么微分方程
$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{k-1}+\cdots+Af=0 \tag{2}$$
的所有非零解具有无穷级.

定理 C　设 $A,A_1,\cdots,A_{k-1},F\ (\not\equiv 0)$是有限级整函数, $k\geqslant 2$, 并假设下面的(i)或(ii)成立

(i)　$\rho(A_j)<\rho(A)$ $(j=1,2,\cdots,k-1)$;

(ii)　$A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是多项式, A 是超越的,

那么微分方程
$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{k-1}+\cdots+Af=F \tag{3}$$
至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0, 其它的所有解 f 满足
$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty .$$

涂金等在文献[7]中也研究了关于方程(2)~(3)解的增长级问题, 是在假定其系数 $A_j(z)$ 具有某类特殊形式时证明了方程的非零解具有无穷级.

收稿日期: 2012-02-10
基金项目: 国家自然科学基金(11171170)资助项目.
作者简介: 易才凤(1955-), 女, 江西吉安人, 教授, 主要从事复分析的研究.

本文一方面将定理 A 中 2 阶微分方程推广到高阶微分方程形式，同时在对定理 B、定理 C 中的条件 $\rho(A_j)<\rho(A)$ 也有所改变的情况下，仍可以得到相同的结论，其主要结果如下.

定理 1　设 A 为超越整函数，$0<\mu(A)<1/2$，$A_1,\cdots,A_{k-1}(k\geqslant 2)$ 是有限级整函数，存在某个 s，$1\leqslant s\leqslant k-1$，满足

(i) A_s 具有有限亏值;

(ii) 对任一 $j\neq s$，有 $\rho(A_j)<\mu(A)$ $(j=1,2\cdots,k-1)$，

则方程(2)的任一非零解均为无穷级.

定理 2　假设 A，$A_1,\cdots,A_s,\cdots,A_{k-1}$ $(1\leqslant s\leqslant k-1)$ 满足定理 1 的条件，$F\,(\not\equiv 0)$是有限级整函数，则方程(3)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0，其它所有解 f 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty .$$

定理 3　设 $A,A_1,\cdots,A_{k-1}(k\geqslant 2)$是整函数，存在某个 s $(1\leqslant s\leqslant k-1)$，满足

(i) A_s 具有有限亏值，$\rho(A_s)<\infty$，对于 $j\neq s$，A_j 为多项式;

(ii) 假设$\exists\ \alpha>0,\beta>0$，$\forall\ \varepsilon>0$，实数集 $\{\phi_k\}$，$\{\theta_k\}$ 满足 $\phi_1<\theta_1<\phi_2<\theta_2<\cdots<\phi_m<\theta_m<\phi_{m+1}(\phi_{m+1}=\phi_1+2\pi)$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{m}(\phi_{k+1}-\theta_k)<\varepsilon$，使得在角域 $\phi_k\leqslant\arg z\leqslant\theta_k\,(k=1,\cdots,m)$ 内，当 $|z|\to\infty$ 时，有

$$|A(z)|\geqslant\exp\left\{(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\right\},$$

则方程(2)的任一非零解均为无穷级.

定理 4　假设 A，$A_1,\cdots,A_s,\cdots,A_{k-1}$ $(1\leqslant s\leqslant k-1)$ 满足定理 3 的条件，$F\,(\not\equiv 0)$是有限级整函数，则方程(3)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0，其它的所有解 f 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty .$$

1　引理

为了证明定理，引用如下引理.

引理 1[8]　设 $\omega(z)$ 是开平面上的有限 ρ 级超越亚纯函数，$\varGamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是由不同整数对组成的有限集，满足 $k_i>j_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m$，又设 $\varepsilon>0$ 是给定的常数，则

(i) 存在零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$，使得如果 $\psi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$，则存在常数 $R_0=R_0(\psi_0)>0$，对满足 $\arg z=\psi_0$ 及 $|z|\geqslant R_0$ 和所有 $(k,j)\in\varGamma$，都有

$$\left|\omega^{(k)}(z)/\omega^{(j)}(z)\right|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)};\tag{4}$$

(ii)存在对数测度为有限的集合 $E_2\subset(1,\infty)$，使得满足 $|z|\notin E_2\cup[0,1]$ 的所有 z 及对所有 $(k,j)\in\varGamma$，(4)式成立;

(iii)存在测度有限的集合 $E_3\subset(1,\infty)$，使得对满足 $|z|\notin E_3$ 的所有 z 及对所有 $(k,j)\in\varGamma$，都有

$$\left|\omega^{(k)}(z)/\omega^{(j)}(z)\right|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}.$$

引理 2[9]　假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F\,(\not\equiv 0)$，$f$ 满足微分方程(3)且

$$\max\{\rho(F),\rho(A_j);j=0,1,\cdots,k-1\}<\rho(f)=\rho(0<\rho\leqslant\infty),$$

那么

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f).$$

引理 3　设 $g(z)$ 是 $0<\mu(g)<1/2$ 的整函数，$A(z)$为 $\rho(A)<+\infty$ 的亚纯函数，如果 $A(z)$有 1 个有限亏值 a，亏量 $\delta=\delta(a,A)>0$，则$\forall\ \varepsilon>0$，存在实数序列$\{R_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，$R_n\to\infty$，使得下面 2 个不等式

$$\left|g(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\right|>\exp\{R_n{}^{\mu(g)-\varepsilon}\},\quad\varphi\in[0,2\pi);$$

$$m(F_n)=:m\left\{\theta\in[0,2\pi):\log\left|A(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-a\right|\leqslant-\frac{\delta}{4}T(R_n,A)\right\}\geqslant d>0$$

对充分大的 n 成立，其中 d 是仅依赖于 $\rho(A)$、$\mu(g)$ 和 δ 的常数.

2　定理的证明

定理 1 的证明　假设方程(2)存在非零解 f 满足 $\rho(f)<\infty$，下面来推出矛盾.

设 a 是 $A_s(z)$ 的有限亏值，亏量 $\delta=\delta(a,A_s)>0$，由方程(2)，有

$$|A(z)|\leqslant\left|\frac{f^{k}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{k-1}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\left|A_j(z)\right|+\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right|(\left|A_s(z)-a\right|+|a|).\tag{5}$$

由引理 1(ii)可知，存在集合 $E_1\subset(1,\infty)$，其对数测度 $m_l(E_1)<+\infty$，当

$$|z|=r\notin(E_1\cup[0,r_0]),\quad r_0>1$$

时, 有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|\leqslant|z|^{k\rho(f)}\ (k\geqslant1). \tag{6}$$

取

$$\max\{\rho(A_1),\cdots,\rho(A_{s-1}),\rho(A_{s+1}),\cdots,\rho(A_{k-1})\}=\rho_0<\mu(A),$$

对 $A_s(z)$ 应用引理 3, 对给定 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}(\mu(A)-\rho_0)>0$, 则$\exists\{R_n\}$, 满足 $R_n<R_{n+1}$, $R_n\to\infty$ (当 $n\to\infty$ 时), 对每个 n 有

$$m(F_n)=:m\left\{\varphi\in[0,2\pi):\log\left|A_s(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})-a\right|\leqslant-\frac{\delta}{4}T(R_n,A_s)\right\}\geqslant d>0, \tag{7}$$

$$\left|A(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\right|>\exp\left\{R_n^{\mu(A)-\varepsilon_0}\right\}=\exp\left\{R_n^{(\mu(A)+\rho_0)/2}\right\}, \tag{8}$$

$\varphi\in[0,2\pi)$, 其中 d 是仅依赖于 $\rho(A_s)$、$\mu(g)$ 和 δ 的常数.

由于

$$\rho(A_j)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,A_j)}{\log r}\leqslant\rho_0,$$

其中 $M(r,A_j)=\max\limits_{|z|=r}\left|A_j\right|$. 从而对上述的 $\{R_n\}$, 有

$$\overline{\lim_{R_n\to\infty}}\frac{\log\log M(R_n,A_j)}{\log R_n}\leqslant\rho_0\ (j\neq s).$$

取 $\varepsilon^*=(\mu(A)-\rho_0)/4>0$, $\exists\ n_0$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\frac{\log\log M(R_n,A_j)}{\log R_n}<\rho_0+\varepsilon^*=\frac{1}{4}\mu(A)+\frac{3}{4}\rho_0.$$

由此可得

$$\left|A_j(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|<\exp\left\{R_n^{(\mu(A)+3\rho_0)/4}\right\},\theta\in[0,2\pi)(j\neq s). \tag{9}$$

对每个 $n>n_0$, 取 $\theta_n\in F_n$, 由(5)~(9)式可知,

$$\exp\left\{R_n^{(\mu(A)+\rho_0)/2}\right\}<|z|^{k\rho(f)}\left[1+(k-2)\exp\left\{R_n^{(\mu(A)+3\rho_0)/4}\right\}+\exp\{-\delta T(R_n,A_s)/4\}+|a|\right].$$

即

$$\exp\left\{R_n^{(\mu(A)+\rho_0)/2}\right\}<R_n^{k\rho(f)}\left[1+(k-2)\exp\left\{R_n^{(\mu(A)+3\rho_0)/4}\right\}+\exp\{-\delta T(R_n,A_s)/4\}+|a|\right].$$

两边同时取 2 次对数再除以 $\log R_n$, 当 n 充分大时, 有

$$\frac{1}{2}\mu(A)+\frac{1}{2}\rho_0<\frac{1}{4}\mu(A)+\frac{3}{4}\rho_0,$$

即

$$\frac{1}{4}\mu(A)<\frac{1}{4}\rho_0.$$

这与题设矛盾. 定理 1 证毕.

定理 2 的证明 假设 f_0 是方程(3)的有限级解, 如果方程(3)还有另一个有限级解 f^* ($\not\equiv f_0$), 那么 $\rho(f^*-f_0)<\infty$, 且 f^*-f_0 为方程(3)所对应的齐次方程(2)的解, 但由定理 1 知, $\rho(f^*-f_0)=\infty$, 矛盾. 所以方程(3)至多有 1 个可能的有限级解 f_0.

现假设 f 为(3)的无穷级解, 由定理的假设, 有 $\max\{\rho(F),\rho(A),\rho(A_j),j=1,\cdots,k-1\}<\infty=\rho(f)$. 应用引理 2, 有 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty$. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明 断言方程(2)的任一非零解均为无穷级. 否则, 若存在非零解 f 满足 $\rho(f)<\infty$, 设 a 是 $A_s(z)$ 的有限亏值,亏量 $\delta=\delta(a,\ A_s)>0$. 由引理 1 可知, 存在集合 $E_1\subset(1,\infty)$,满足 $m_l(E_1)<+\infty$, 当 $|z|=r\notin E_1\bigcup[0,r_0]$, $r_0>1$时, 有不等式(6)成立.

由引理 3 可知, $\exists\{R_n\}$, 满足 $R_n<R_{n+1}$, $R_n\to\infty$ (当 $n\to\infty$ 时), 当 n 充分大时, 对每个 n 有(7)式成立. 设 $0<\varepsilon<d/2$, 此时 $F_n\bigcap\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m}[\phi_k,\theta_k]\right)\neq\varnothing$,于是对每个 n, 选取 $\varphi_n\in F_n\bigcap\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m}[\phi_k,\theta_k]\right)$, 所以 $\exists\ k\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使得 $\varphi_n\in F_n\bigcap[\phi_k,\theta_k]$.

因此由题设可知, $\exists\ \alpha>0,\beta>0$, 使得

$$\left|A(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n})\right|\geqslant\exp\left\{(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\right\}. \tag{10}$$

不妨设 $A_1,\cdots,A_{s-1},A_{s+1},\cdots,A_{k-1}$ 都是次数不超过 m 的多项式, 即 $\deg A_j\leqslant m$ ($j\neq s$), 因此, 对上述的 $\{R_n\}$, 当 $n\to\infty$ 时, 在 $|z|=R_n$ 上有

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{k-1}\left|A_j(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|=O(R_n{}^m)\leqslant MR_n{}^m(M>0),\theta\in[0,2\pi). \tag{11}$$

由(5)~(7)式和(10)~(11)式知,

$$\left|A(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n})\right|<|z|^{k\rho(f)}\left[1+MR_n{}^m+\exp\left\{-\frac{\delta}{4}T(R_n,A_s)\right\}+|a|\right],$$

即

$$\exp\left\{(1+o(1))\alpha\left|R_n\right|^{\beta}\right\}<R_n{}^{k\rho(f)}\left[1+MR_n{}^m+\exp\left\{-\frac{\delta}{4}T(R_n,A_s)\right\}+|a|\right].$$

显然上式是矛盾的. 定理 3 证毕.

定理 4 的证明 用类似于定理 2 的证明方法即可得证.

关于线性微分方程解的增长性的研究还有许多有意义的问题, 如涂金等对系数为[p, q]级的整函数

的微分方程，讨论了其解的$[p,q]$级与系数的$[p,q]$级之间的关系，详见文献[10].

3　参考文献

[1] Hayman W. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社, 1982.

[3] Gundersen G. Finite order solution of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc, 1988, 305: 415-429.

[4] Hellenstein S, Miles J, Rossi J. On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 324: 693-705.

[5] Wu Pengcheng, Zhu Jun. On the growth of solutions of the complex differential equation $f''+Af'+Bf=0$ [J]. Science China: Mathematics, 2011(5): 939-947.

[6] Chen Zongxuan, Gao Shian. The complex oscillation theory of certain nonhomogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients [J]. J Math Analy App, 1993, 179: 403-416.

[7] 涂金，陈宗煊. 某些高阶微分方程的复振荡 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2005, 29(1): 8-11.

[8] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[9] Chen Zongxuan, Gao Shian. On the complex oscillantion of non-homogeous linear differential equations with meromorphic coefficients [J]. Kodai Math J, 1992, 15: 66-78.

[10] 涂金，时玲芝. 系数为$[p,q]$级整函数的高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2010, 34(3): 257-261.

The Growth of Solutions for a Class Higher Order Linear Differential Equations

SHI Lei, YI Cai-feng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: By using the fundamental theory and method of Nevanlinna, the growth of solutions of the homogeneous linear differential equation $f^{(k)}+A_{k-1}f^{k-1}+\cdots+Af=0$ and non-homogeneous linear differential equation was investigated. Assuming some $A_s(1\leqslant s\leqslant k-1)$ is entire functions with a finite deficient value, it was proved that every solution $f\not\equiv 0$ of the homogeneous differential equation has infinite order. Furthermore, the solutions $f\not\equiv 0$ of non-homogeneous linear differential equation have the same property except for an extra solution.

Key words: differential equations; entire function; deficient value; infinite order

(责任编辑：王金莲)