第 36 卷 第 3 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 36 No.3
2012 年 5 月　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　May 2012

文章编号: 1000-5862(2012)03-0238-03

# 有关 Mersenne 数 $M_p$ 的一个注记

张四保

(喀什师范学院数学系, 新疆 喀什 844008)

摘要: 设 $p$ 为素数, $M_p=2^p-1$ 为 Mersenne 数. 讨论了 $M_p$ 是否与其它正整数构成亲和三数组的问题, 证明了其不与任何正整数构成亲和三数组的结论.

关键词: Mersenne 数; 亲和数; 亲和三数组
中图分类号: O 156　　文献标志码: A

设 $\mathbf{Z}^+$ 为正整数集合, $a\in\mathbf{Z}^+$, 定义 $\sigma(a)$ 是 $a$ 的全部正因数的和. 如果正整数 $a$、$b$ 满足

$$\sigma(a)=\sigma(b)=a+b,$$

则称数组$(a, b)$为一组亲和数[1]. 如果正整数 $a$、$b$、$c$ 满足

$$\sigma(a)=\sigma(b)=\sigma(c)=a+b+c,$$

则称数组$(a, b, c)$为亲和三数组[2].

Mersenne 数是形如 $2^p-1$ 的数, 其中 $p$ 为素数, 它是以 17 世纪法国数学家 M.Mersenne 的名字命名的[3], 记为 $M_p$, 即 $M_p=2^p-1$. Mersenne 数 $M_p$ 在数论经典问题和现代应用中有着重要地位[4], 并且其中的素数是当今科学探索的热点问题之一[5], 2007 年, 李伟勋证明了 Mersenne 数 $M_p$ 不与任何正整数构成亲和数. 本文将给出有关 Mersenne 数 $M_p$ 的如下性质.

**定理 1**　Mersenne 数 $M_p$ 不与任何正整数构成亲和三数组.

## 1　有关引理

为了证明定理 1 需要以下几个引理.

**引理 1**[6]　设 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 $a$ 的标准分解式, 其中 $p_i\,(i=1,2,\cdots,s)$是素数, 且满足 $p_1<p_2<\cdots<p_s$, $\alpha_i$ 是正整数, 则有

$$\sigma(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}=\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

**引理 2**[7]　对于奇素数 $p$, Mersenne 数 $M_p$ 的素因数 $q$ 满足 $q\equiv 1(\bmod 2p)$.

**引理 3**　如果 $y\geqslant z>\mathrm{e}$, 那么 $\dfrac{\ln(y+1)}{\ln(z+1)}\leqslant\dfrac{\ln y}{\ln z}$.

证　构造函数 $f(y)=\ln(y+1)\ln z-\ln(z+1)\ln y$, 则有

$$f'(y)=\frac{1}{y+1}\ln z-\frac{1}{y}\ln(z+1)\cdot$$

如果 $y>\mathrm{e}>0$, 那么

$$f'(y)=\frac{1}{y+1}\ln z-\frac{1}{y}\ln(z+1)<$$

$$\frac{1}{y+1}(\ln z-\ln(z+1))=\frac{1}{y+1}\ln\frac{z}{z+1}.$$

当 $z>\mathrm{e}$时, 有 $0<\dfrac{z}{z+1}<1$, 且 $\ln\dfrac{z}{z+1}<0$. 所以

$$f'(y)=\frac{1}{y+1}\ln z-\frac{1}{y}\ln(z+1)<0.$$

因此当 $y\geqslant z>\mathrm{e}$ 时, 函数 $f(y)=\ln(y+1)\ln z-\ln(z+1)\ln y$ 是单调递减的, 那么就有

$$\frac{\ln(y+1)}{\ln(z+1)}\leqslant\frac{\ln y}{\ln z}.$$

**引理 4**[8]　若自然数 $y\geqslant 3$, 则

$$\sigma(y)<\left(1.8\ln\ln y+\frac{2.6}{\ln\ln y}\right)y.$$

**引理 5**　当 $0<x<1$时, 有 $2x/3<\ln(1+x)<x$.

## 2　定理 1 的证明

由于 Mersenne 数 $M_p$ 有素数与合数之类, 那么将 $M_p$ 分素数与合数 2 种情况分别进行考虑.

收稿日期: 2012-01-10
基金项目: 新疆维吾尔自治区高校科研计划(XJEDU2008I31)和喀什师范学院校内一般课题(112390)资助项目.
作者简介: 张四保(1978-), 男, 江西峡江人, 讲师, 硕士, 主要从事数论与代数研究.

**第 1 种情况** 当 $M_p$ 为素数时，即 $M_p = 2^p - 1$ 为素数,

$$\sigma(M_p) = 2^p - 1 + 1 = 2^p.$$

设存在正整数 $x, y$ 与 $M_p$ 构成一对拟亲和数，则有

$$\sigma(M_p) = \sigma(x) = \sigma(y) = (2^p - 1) + x + y = 2^p,$$

那么有 $x + y = 1$. 由于 $x, y \in \mathbf{Z}^+$，$x + y = 1$ 无解. 因而当 $M_p$ 为素数时, Mersenne 数 $M_p$ 不与任何正整数构成亲和三数组.

**第 2 种情况** 当 $M_p$ 为合数时，由于 Mersenne 数 $M_p = 2^p - 1$ 中的 $p$ 为素数，当 $p = 2$，$p = 3$，$p = 5$ 与 $p = 7$ 时，$M_2$，$M_3$，$M_5$ 与 $M_7$ 都是素数，所以由第 1 种情况可得，当考虑 $M_p$ 为合数时，只需考虑 $p \geqslant 11$.

设 $M_p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 $M_p$ 的标准分解式，其中 $p_i$ ( $i = 1, 2, \cdots, s$ ) 是素数，且满足 $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$，$\alpha_i$ 是正整数. 由引理 2 可知，$p_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 满足

$$p_i \equiv 1 \pmod{2p}, i = 1, 2, \cdots, s.$$

进而有

$$p_i \geqslant 2ip + 1, i = 1, 2, \cdots, s,$$

$$2^p > M_p \geqslant p_1 p_2 \cdots p_s \geqslant (2p+1)^s > (2p)^s,$$

对上式两边取自然对数，有 $s < p \ln 2 / \ln(2p)$.

假定当 $p \geqslant 11$ 时，存在正整数 $x, y \in \mathbf{Z}^+$，使得 Mersenne 数 $M_p$ 与 $x, y$ 构成亲和三数组，即

$$\sigma(M_p) = \sigma(x) = \sigma(y) = M_p + x + y.$$

由引理 1 知,

$$1 + \frac{x+y}{M_p} = \frac{\sigma(M_p)}{M_p} = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) < \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\,l}}\right) = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right). \tag{1}$$

对(1)式两边取自然对数有

$$\ln\left(1 + \frac{x+y}{M_p}\right) < \ln \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right),$$

而

$$\ln \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_s - 1}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{p_1 - 1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{p_2 - 1}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{p_s - 1}\right) = \sum_{i=1}^{s} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right).$$

那么根据引理 5 以及 $p_i \geqslant 2ip + 1$，有

$$\ln\left(1 + \frac{x+y}{M_p}\right) < \ln \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) = \sum_{i=1}^{s} \ln\left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) < \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p_i - 1} \leqslant \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2ip} = \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}\right) \leqslant \frac{1}{2p}(1 + \ln s). \tag{2}$$

由于 $s < p \ln / \ln(2p)$，那么有

$$1 + \ln s < 1 + \ln \frac{p \ln 2}{\ln 2p} = 1 + \ln(p \ln 2) - \ln \ln(2p) = 1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p).$$

从而将(2)式简化为

$$\ln\left(1 + \frac{x+y}{M_p}\right) < \frac{1 + \ln s}{2p} < \frac{1}{2p}\left(1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p)\right). \tag{3}$$

若 $x + y \geqslant M_p$，则由(3)式有

$$\ln 2 \leqslant \ln\left(1 + \frac{x+y}{M_p}\right) < \frac{1}{2p}(1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p)),$$

构造函数

$$f(p) = 2p \ln 2 - (1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p)),$$

则有

$$f'(p) = 2 \ln 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p \ln(2p)}.$$

当 $p \geqslant 11$ 时，有 $f'(p) = 2 \ln 2 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p \ln(2p)} > 0$，

则有

$$\ln 2 > \frac{1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p)}{2p},$$

进而有

$$\ln\left(1 + \frac{x+y}{M_p}\right) > \frac{1}{2p}\left(1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p)\right).$$

这与(3)式相矛盾. 故 $x + y \geqslant M_p$ 不成立，则一定有 $x + y < M_p$.

由引理 5 可得

$$\frac{2(x+y)}{3M_p} < \ln\left(1 + \frac{x+y}{M_p}\right) < \frac{1}{2p}(1 + \ln p + \ln \ln 2 - \ln \ln(2p)). \tag{4}$$

根据引理 4，有

$$\frac{M_p}{y} + \frac{x+y}{y} = \frac{\sigma(y)}{y} < 1.8 \ln \ln y + \frac{2.6}{\ln \ln y} < 1.8 \ln \ln M_p + \frac{2.6}{\ln \ln M_p}.$$

当 $p \geqslant 11$ 时, $M_{11} = 2\,047$ 是最小的一个, 那么有

$$\frac{M_p}{y} + \frac{x+y}{y} = \frac{\sigma(y)}{y} < 1.8\ln\ln M_p + \frac{2.6}{\ln\ln M_p} < 1.8\ln\ln M_p + 1.28. \quad (5)$$

而 $\ln\ln\left(2^p - 1\right) < \ln\ln 2^p = \ln(p\ln 2) = \ln p + \ln\ln 2$, 那么由(5)式知,

$$\frac{M_p}{y} + \frac{x+y}{y} = \frac{\sigma(y)}{y} < 1.8\ln\ln M_p + 1.28 < 1.8(\ln p + \ln\ln 2) + 1.28,$$

进而有

$$\frac{y}{M_p} > \frac{1}{1.8(\ln p + \ln\ln 2) + 1.28},$$

再由(4)式得,

$$p < \left(1.35(\ln p + \ln\ln 2) + 0.96\right)\left(1 + \ln p + \ln\ln 2 - \ln\ln(2p)\right) < 1.35(\ln p)^2. \quad (6)$$

构造函数 $f(p) = 1.35(\ln p)^2 - p$, 则当 $p \geqslant 11$ 时, $f'(p) = (2.7\ln p - p)/p < 0$. 因而, 当 $p \geqslant 11$ 时, (6)式不成立. 所以, Mersenne 数 $M_p$ 不与任何正整数构成亲和三数组. 定理 1 得证.

## 3 参考文献


[1] 盖伊 R K. 数论中未解决的问题 [M]. 张明尧, 译. 3 版. 北京: 科学出版社, 2006.

[2] 沈忠华. 关于亲和三数组的一个注记 [J]. 杭州师范学院学报: 自然科学版, 2005, 4(2): 102-104.

[3] 张四保. 梅森素数研究综述 [J]. 科技导报, 2009, 26(18): 88-92.

[4] 李伟勋. Mersenne 数 $M_p$ 都是孤立数 [J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 693-696.

[5] 石永进, 成启明. 梅森素数的一些注记 [J]. 科技导报, 2010, 28(6): 25-28.

[6] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[7] 乐茂华. 初等数论 [M]. 广州: 广东高等教育出版社, 1995.

[8] Rosser J B, Schoenfeld L. Approximate formulas for some functions of prime numbers [J]. Illinois of Math, 1962, 6(2): 64-94.

[9] 刘志伟. 广义 Fermat 数中的孤立数 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2006, 34(2): 133-134.


# A Note on Mersenne Numbers $M_p$


ZHANG Si-bao

(Department of Mathematics, Kashgar Teachers College, Kashgar Xinjiang 844008, China)



**Abstract:** Let $p$ be a prime, and $M_p = 2^p - 1$ be Mersenne number. The problem whether a Mersenne number is part of an amicable triple is discussed, and a conclusion that it is not part of an amicable triple is proved.



**Key words**: Mersenne numbers; amicable number; amicable triple

(责任编辑: 曾剑锋)