文章编号: 1000-5862(2012)03-0241-04

路,圈的倍图的染色问题

卢建立, 任凤霞, 马美琳

(河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘要: 通过分类讨论、归纳探究, 在图的点边集合与色集合间构造了一种一一对应关系. 通过这种新关系,研究了路和圈的倍图的邻强边染色以及路的倍图的均匀邻强边染色, 得到相应的色数, 并给出了具体的染色方案.

关键词: 倍图; 邻强边染色; 均匀邻强边染色

中图分类号: O 157.5　　文献标志码: A

0 引言

图的染色问题是图论研究的经典领域, 它源于 4 色定理的研究, 是图论研究中一个很活跃的课题. 随着染色问题在现实中被广泛应用, 各类染色问题被相继提出并加以发展和应用. 本文所考虑的图都是有限无向的简单图[1], 用 $V(G)$ 、$E(G)$ 分别表示 G 的点、边的集合, $\Delta(G)$ 表示 G 的顶点的最大度. 本文未加述及的术语记号可参见文献[2].

文献[2-3]提出的点可区别边染色(或强边染色)是一个十分困难的问题. 张忠辅, 马刚等[4]得到了星、扇和轮的倍图的均匀邻强边色数. 文献[5]提出图的倍图的概念.

本文给出了路和圈的倍图的邻强边染色, 并得到了路的倍图的均匀邻强边染色.

1 定义和引理

定义 1[6] 对 $|V(G)|\geqslant 2$ 的简单图 $G(V,E)$ 的 k-正常边染色 f , 若满足 $\forall uv\in E(G), u\neq v, C(u)\neq C(v)$, 则称 f 为 $G(V,E)$ 的一个 k-邻强边染色, 简记为 $G(V,E)$ 的 k-$ASEC$, $\chi'_{as}(G)=\min\{k|G的k\text{-}ASEC\}$ 称为 $G(V,E)$ 的邻强边染色数, 其中 $C(u)=\{f(uv)|uv\in E(G)\}$ 称为点 u 在 f 下的色集合. $C(u)$ 在色集合 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 中的补集记为 $\bar{C}(u)=C\setminus C(u)$.

定义 2[7-8] 对 $|V(G)|\geqslant 2$ 的简单图 $G(V,E)$ 的一个 k-邻强边染色 f , 若满足 $\forall i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\}$, $||E_i|-|E_j||\leqslant 1$, 则称 f 为 $G(V,E)$ 的一个 k-均匀邻强边染色, 简记作 $G(V,E)$ 的 $k\text{-}EASEC$. $\chi'_{eas}(G)=\min\{k|G的k\text{-}EASEC\}$ 称为 $G(V,E)$ 的均匀邻强边染色数, 其中 $E_i=\{e|e\in E(G), f(e)=i\}$, $i=1,2,3,\cdots,k$.

由定义 1 和定义 2, 显然有 $\chi'_{eas}(G)\geqslant\chi'_{as}(G)\geqslant\Delta(G)$, 其中 $\Delta(G)$ 表示 G 的顶点的最大度.

猜想1 对 $|V(G)|\geqslant 3$ 的简单连通图 $G(V,E)$, 若 $G\neq C_5(5圈)$, 则 $\chi'_{as}(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

猜想 2 对 $|V(G)|\geqslant 3$ 的简单连通图 $G(V,E)$, 若 $G\neq C_5(5圈)$, 则 $\chi'_{eas}(G)\leqslant\Delta(G)+2$, 且 $\chi'_{eas}(G)=\chi'_{as}(G)$.

定义 3[9] 设 G' 是简单图 G 的拷贝, 记 G 的顶点为 u_i , G' 相应的顶点为 v_i , 若满足 $V(D(G))=V(G)\cup V(G'), E(D(G))=E(G)\cup E(G')\cup\{u_iv_j|u_i\in V(G), v_j\in V(G'), 且 u_iu_j\in V(G)\}$, 则称 $D(G)$ 为 G 的倍图.

引理 1[10] 对 $|V(G)|\geqslant 3$ 的简单连通图 $G(V,E)$, 若有最大度点相邻, 则 $\chi'_{eas}(G)\geqslant\chi'_{as}(G)\geqslant\Delta(G)+1$.

2 主要结果

定理 1 $\chi'_{as}(D(P_n))=\begin{cases}4, n=3,\\5, n\geqslant 4.\end{cases}$

证 记 $P_n=u_1u_2\cdots u_n$, $P'_n=v_1v_2\cdots v_n$.

当 $n\geqslant 4$ 时, $\Delta(D(P_n))=4$, 并且有最大度点相

收稿日期: 2011-12-27

基金项目: 河南省杰出青年计划(084100510013)资助项目.

作者简介: 卢建立(1953-), 男, 河南洛阳人, 副教授, 主要从事图论与离散数学的研究.

邻, 所以由引理 1 可知, $\chi'_{as}(G) \geqslant 5$. 下证 $\chi'_{eas}(G) \leqslant 5$, 仅需证明 $D(P_n)$ 存在 5- $ASEC$ 染色即可.

如下定义从 $E(D(P_n))$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 f:

$$f(u_iu_{i+1}) = f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 1, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,2), \\ 2, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,2), \end{cases}$$

$$f(u_iv_{i+1}) = f(v_iu_{i+1}) = \begin{cases} 3, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \\ 4, i \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \\ 5, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\bar{C}(u_i) = \bar{C}(v_i) = \begin{cases} \{5\}, i \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \\ \{3\}, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ \{4\}, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

其中 $2 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$C(u_1) = \{1,3\}, C(v_1) = \{1,3\},$$

$$C(u_n) = C(v_n) = \begin{cases} \{1,5\}, n \equiv 4(\mathrm{mod}\,6), \\ \{2,3\}, n \equiv 5(\mathrm{mod}\,6), \\ \{1,4\}, n \equiv 0(\mathrm{mod}\,6), \\ \{2,5\}, n \equiv 1(\mathrm{mod}\,6), \\ \{1,3\}, n \equiv 2(\mathrm{mod}\,6), \\ \{2,4\}, n \equiv 3(\mathrm{mod}\,6). \end{cases}$$

由点的色集合可知, 相邻边的染色不同, 所以 f 是正常边染色, u_1 的邻接点为 u_2, v_2, 由点的色集合和色集合的补集可知, $C(u_1) \neq C(u_2)$, $C(u_1) \neq C(v_2)$.

同理可证, v_1, u_n, v_n 分别与它们的邻接点的色集合也不同.

当 $2 \leqslant i \leqslant n-1$ 时, u_i 的邻接点为 $u_{i-1}, v_{i-1}, u_{i+1}, v_{i+1}$, 显然

$$C(u_i) \neq C(u_{i-1}),\quad C(u_i) \neq C(u_{i+1}),$$
$$C(u_i) \neq C(v_{i+1}),\quad C(u_i) \neq C(v_{i-1}).$$

同理可证, v_i 与它的邻接点的色集合也不同.

当 $n = 3$ 时, 染色数如图 1 所示.

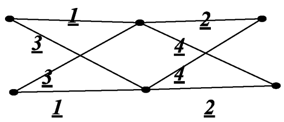

图 1 $D(P_n)$的邻强边染色图

所以, f 是 $D(P_n)$ 的邻强边染色.

定理 2 当 $n \geqslant 3, n \neq 4,7$ 时, $\chi'_{as}(D(C_n)) = 5$.

证 记 $C_n = u_1u_2\cdots u_nu_1$, $C'_n = v_1v_2\cdots v_nv_1$.

当 $n \geqslant 3$ 时, $\Delta(D(C_n)) = 4$, 并且有最大度点相邻, 所以由引理 1 可知, $\chi'_{as}(G) \geqslant 5$. 下证 $\chi'_{as}(G) \leqslant 5$, 仅需证明 $D(C_n)$ 存在 5- $ASEC$ 染色即可.

分以下几种情形定义从 $E(D(C_n))$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 f.

情形 1 当 $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ 时,

$$f(u_iu_{i+1}) = f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 2, i \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \\ 1, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ 3, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

$$f(u_iv_{i+1}) = f(v_iu_{i+1}) = \begin{cases} 4, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,2), \\ 5, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,2), \end{cases}$$

其中 $2 \leqslant i \leqslant n-2$,

$$f(u_1u_2) = 1,\ f(v_1v_2) = 1,\ f(u_1v_2) = 3,$$
$$f(v_1u_2) = 3, f(u_{n-1}u_n) = 2, f(v_{n-1}v_n) = 2,$$
$$f(u_{n-1}v_n) = 3, f(v_{n-1}u_n) = 3, f(u_1v_n) = 5,$$
$$f(v_1u_n) = 5, f(u_1u_n) = 4, f(v_1v_n) = 4.$$

证明方法同定理 1. 所以, f 是 $D(C_n)$ 的邻强边染色.

情形 2 当 $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ 时,

$$f(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} 1, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \\ 2, i \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \\ 3, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

$f(u_iv_{i+1}) = 4$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 1, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \\ 2, i \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \\ 3, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

$f(v_iu_{i+1}) = 5$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$f(u_1v_n) = 5, f(v_1u_n) = 4, f(u_1u_n) = 3, f(v_1v_n) = 3$.

证明方法同定理 1.

情形 3 当 $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$且$n \neq 4,7$ 时,

(i)当 $n = 10 + 3k$ (k 为偶数)时,

$f(u_1u_2) = 1, f(u_2u_3) = 2, f(u_3u_4) = 3, f(v_1v_2) = 1,$
$f(v_2v_3) = 2, f(v_3v_4) = 3, f(u_1v_2) = 3, f(u_2v_3) = 4,$
$f(u_3v_4) = 5, f(v_1u_2) = 3, f(v_2u_3) = 4, f(v_3u_4) = 5,$
$f(u_{n-2}u_{n-1}) = 5, f(u_{n-1}u_n) = 1, f(v_{n-2}v_{n-1}) = 5, f(v_{n-1}v_n) = 1,$
$f(u_{n-1}v_n) = 4, f(v_{n-1}u_n) = 4, f(u_1u_n) = 2, f(v_1v_n) = 2,$
$f(u_1v_n) = 5, f(v_1u_n) = 5.$

当 $4 \leqslant i \leqslant n-3$ 时,

$$f(u_iu_{i+1}) = f(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} 1, i \equiv 0(\mathrm{mod}\,2), \\ 2, i \equiv 1(\mathrm{mod}\,2). \end{cases}$$

当 $4\leqslant i\leqslant n-2$ 时,

$$f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})=\begin{cases}4,i\equiv 1(\bmod 3),\\3,i\equiv 2(\bmod 3),\\5,i\equiv 0(\bmod 3).\end{cases}$$

(ii)当 $n=10+3k$ (k 为奇数)时,

$f(u_1u_2)=1,f(u_2u_3)=2,f(u_3u_4)=3,f(v_1v_2)=1,$
$f(v_2v_3)=2,f(v_3v_4)=3,f(u_1v_2)=3,f(u_2v_3)=4,$
$f(u_3v_4)=5,\ f(v_1u_2)=3,f(v_2u_3)=4,f(v_3u_4)=5$,
$f(u_{n-2}u_{n-1})=5,f(u_{n-1}u_n)=1,f(v_{n-2}v_{n-1})=5,f(v_{n-1}v_n)=1,$
$f(u_{n-1}v_n)=2,f(v_{n-1}u_n)=2,f(u_1u_n)=4,f(v_1v_n)=4,$
$f(u_1v_n)=5,f(v_1u_n)=5.$

当 $4\leqslant i\leqslant n-3$ 时,

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1,i\equiv 0(\bmod 2),\\2,i\equiv 1(\bmod 2).\end{cases}$$

当 $4\leqslant i\leqslant n-2$ 时,

$$f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})=\begin{cases}4,i\equiv 1(\bmod 3),\\3,i\equiv 2(\bmod 3),\\5,i\equiv 0(\bmod 3).\end{cases}$$

证明方法同定理 1.

定理 3　$\chi'_{eas}(D(P_n))=\begin{cases}4,n=3,\\5,n\geqslant 4.\end{cases}$

证　记 $P_n=u_1u_2\cdots u_n$ ，$P'_n=v_1v_2\cdots v_n$.

当 $n\geqslant 6$ 时，$\Delta(D(P_n))=4$ ，并且有最大度点相邻，所以由引理 1 可知，$\chi'_{eas}(G)\geqslant\chi'_{as}(G)\geqslant 5$. 下证 $\chi'_{eas}(G)\leqslant 5$, 仅需证明 $D(P_n)$ 存在 5- *EASEC* 染色即可.

分以下几种情形定义从 $E(D(G))$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 f .

情形 1　当 $n\equiv 1(\bmod 5)$ 时,

$$f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1,i\equiv 1(\bmod 5),\\2,i\equiv 2(\bmod 5),\\3,i\equiv 3(\bmod 5),\\4,i\equiv 4(\bmod 5),\\5,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

$$f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\bmod 5),\\4,i\equiv 2(\bmod 5),\\5,i\equiv 3(\bmod 5),\\1,i\equiv 4(\bmod 5),\\2,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n-1$.

对此 f 有

$$\overline{C}(u_1)=\overline{C}(v_1)=\{2,4,5\},\overline{C}(u_n)=\overline{C}(v_n)=\{1,3,4\}.$$

当 $2\leqslant i\leqslant n-1$ 时,

$$\overline{C}(u_i)=\overline{C}(v_i)=\begin{cases}\{4\},i\equiv 1(\bmod 5),\\\{5\},i\equiv 2(\bmod 5),\\\{1\},i\equiv 3(\bmod 5),\\\{2\},i\equiv 4(\bmod 5),\\\{3\},i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

$$|E_i|=\frac{4(n-1)}{5},\quad i\in\{1,2,3,4,5\}.$$

由染色方案可知，该染色是以 5 为 1 个周期进行循环，由图的构造可知，u_1,v_1,u_n,v_n 的度数为 2, 其它顶点的度数为 4, 由点的色集合可知，f 为 $D(P_n)$ 的正常边染色. 当 $2\leqslant i\leqslant n-1$ 时，u_i 的邻接点分别为 u_{i-1},u_{i+1}， v_{i-1},v_{i+1} ，显然 u_i 的色集合与 $u_{i-1},u_{i+1},v_{i-1},v_{i+1}$ 的色集合都不相同. v_i 的邻接点分别为 $u_{i-1},u_{i+1},v_{i-1},v_{i+1}$ ，显然 v_i 的色集合与 $u_{i-1},u_{i+1},v_{i-1},v_{i+1}$ 的色集合都不相同. 同理可证 u_1,v_1，u_n,v_n 的色集合分别与邻接点的色集合也不相同. 显然 f 是 $D(P_n)$ 的 5- *EASEC* 染色，即结论成立.

情形 2　当 $n\equiv 2(\bmod 5)$ 时,

$$f(u_iu_{i+1})=\begin{cases}1,i\equiv 1(\bmod 5),\\2,i\equiv 2(\bmod 5),\\3,i\equiv 3(\bmod 5),\\4,i\equiv 4(\bmod 5),\\5,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n-2$,

$$f(v_iu_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\bmod 5),\\4,i\equiv 2(\bmod 5),\\5,i\equiv 3(\bmod 5),\\1,i\equiv 4(\bmod 5),\\2,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n-2$.

当 $2\leqslant i\leqslant n-2$ 时，$f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})$.

当 $1\leqslant i\leqslant n-3$ 时，$f(v_iv_{i+1})=f(u_iu_{i+1})$.

$f(u_1v_2)=5$，$f(u_{n-1}u_n)=1,f(v_{n-1}v_n)=4,$
$f(v_{n-2}v_{n-1})=3,f(u_{n-1}v_n)=3,f(v_{n-1}u_n)=5.$

$$|E_i|=\begin{cases}\dfrac{4(n-2)}{5}+1,i\in\{1,3,4,5\},\\\dfrac{4(n-2)}{5},\quad i=2.\end{cases}$$

情形 3　当 $n\equiv 3(\bmod 5)$ 时,

$$f(u_iu_{i+1})=\begin{cases}1,i\equiv 1(\bmod 5),\\2,i\equiv 2(\bmod 5),\\3,i\equiv 3(\bmod 5),\\4,i\equiv 4(\bmod 5),\\5,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

$$f(u_iv_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\bmod 5),\\4,i\equiv 2(\bmod 5),\\5,i\equiv 3(\bmod 5),\\1,i\equiv 4(\bmod 5),\\2,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中$1\leqslant i\leqslant n-1$.

当$1\leqslant i\leqslant n-2$时, $f(v_iv_{i+1})=f(u_iu_{i+1})$.

当$1\leqslant i\leqslant n-1$时 , $f(v_iu_{i+1})=f(u_iv_{i+1})$.

$$f(v_{n-1}v_n)=5,\ |E_i|=\begin{cases}\dfrac{4(n-3)}{5}+2,i\in\{1,3,4\},\\\dfrac{4(n-3)}{5}+1,i=\{2,5\}.\end{cases}$$

情形 4 当 $n\equiv 4(\bmod 5)$ 时,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1,i\equiv 1(\bmod 5),\\2,i\equiv 2(\bmod 5),\\3,i\equiv 3(\bmod 5),\\4,i\equiv 4(\bmod 5),\\5,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中$1\leqslant i\leqslant n-1$,

$$f(u_iv_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\bmod 5),\\4,i\equiv 2(\bmod 5),\\5,i\equiv 3(\bmod 5),\\1,i\equiv 4(\bmod 5),\\2,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中$1\leqslant i\leqslant n-1$.

当$1\leqslant i\leqslant n-2$时, $f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})$.

当$1\leqslant i\leqslant n-1$时, $f(v_iu_{i+1})=f(u_iv_{i+1})$.

$$f(u_{n-1}u_n)=1,\ |E_i|=\begin{cases}\dfrac{4(n-4)}{5}+3,i\in\{1,3\},\\\dfrac{4(n-4)}{5}+2,i\in\{2,4,5\}.\end{cases}$$

情形 5 当 $n\equiv 0(\bmod 5)$ 时,

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}1,i\equiv 1(\bmod 5),\\2,i\equiv 2(\bmod 5),\\3,i\equiv 3(\bmod 5),\\4,i\equiv 4(\bmod 5),\\5,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中$1\leqslant i\leqslant n-2$,

$$f(v_iu_{i+1})=\begin{cases}3,i\equiv 1(\bmod 5),\\4,i\equiv 2(\bmod 5),\\5,i\equiv 3(\bmod 5),\\1,i\equiv 4(\bmod 5),\\2,i\equiv 0(\bmod 5),\end{cases}$$

其中$2\leqslant i\leqslant n-1$.

当$1\leqslant i\leqslant n-3$时, $f(u_iu_{i+1})=f(v_iv_{i+1})$.

当$2\leqslant i\leqslant n-2$时, $f(u_iv_{i+1})=f(v_iu_{i+1})$.

$f(u_1v_2)=3, f(u_{n-1}u_n)=3, f(v_{n-1}v_n)=2, f(u_{n-2}u_{n-1})=1,$
$f(u_{n-1}v_n)=4, f(v_{n-1}u_n)=1, f(v_1u_2)=5.$

$$|E_i|=\begin{cases}\dfrac{4(n-5)}{5}+3,i\in\{2,3,4,5\},\\\dfrac{4(n-5)}{5}+4,i=1.\end{cases}$$

情形 2~情形 5 的证明方法同情形 1 的证明方法. 当 $n=3,4,5$时, 如图 2 所示.

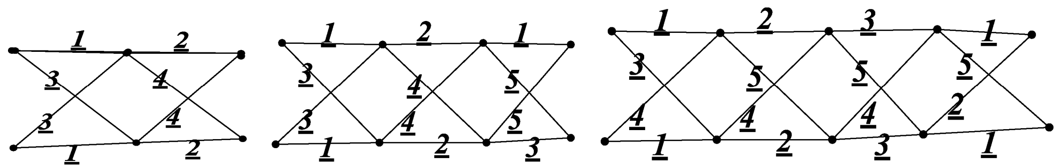

图 2 $D(P_3)$, $D(P_4)$, $D(P_5)$的均匀邻强边染色

3 参考文献

[1] 卢建立, 张志芳. 6 连通图完美匹配上的可收缩边 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(6): 590-593.

[2] Bazgan C, Harkat−Benhamdine A, Li Hao, et al. On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs [J]. J Combin Theory: Series B, 1999, 75(2): 288-301.

[3] Burris A C, Schelp R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings [J]. J Graph Theory, 1997, 26(2): 73-82.

[4] 马刚, 张忠辅. 若干图的倍图的均匀邻强边染色 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(1): 64-68.

[5] Ma Gang, Ma Ming, Zhang Zhongfu. On the equitable total coloring of double graph of some graphs [J]. J Mathematical Study, 2009, 42(1): 40-44.

[6] Zhang Zhongfu, Liu Linzhong, Wang Jianfang. Adjacent strong edge coloring of graphs [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623-626.

[7] 田双亮, 李敬文, 张忠辅. P_n^2和P_n^{n-1} 的均匀邻强边色数 [J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(3): 244-248.

[8] Sheng Bau, Li Mingzhe, Liu Linzhong, et al. On the equitable adjacent strong edge chromatic number of $P_2\times C_n$ [J]. Mathematics in Economics, 2002, 19(3): 15-18.

[9] Zhang Zhongfu, Qiu Pengxiang, Zhang Donghan, et a1.The double graph and the complement double graph of a graph [J]. Advances in Mathematics, 2008, 37(3): 303-310.

[10] 张忠辅, 李敬文, 赵传成, 等. 若干联图的点可区别均匀边色数 [J]. 数学学报: 中文版, 2007, 50(1): 197-204.

(下转第 262 页)