文章编号: 1000-5862(2012)03-0249-04

具有时间变化效应的信度模型

郑 丹[1], 章 溢[2], 温利民[1*]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌, 330022; 2. 江西师范大学计算机信息工程学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 利用信度理论方法研究了具有时间变化效应的风险保费的估计问题. 结论表明, 具有时间变化效应的信度模型, 其信度估计仍然是个体索赔数据与聚合保费的加权平均, 且信度因子依赖时间变化效应, 从而推广了经典的信度原理.

关键词: 信度估计; 时间变化效应; 正交投影

中图分类号: O 211.9 文献标志码: A

0 引言

信度理论是用于计算基于某个保单持有人的样本数据来调整保单组合聚合保费的一种保费定价方法. 这个方法广泛应用于商业责任险、群体健康、生命保险等. 信度理论中计算保费的著名公式为个体索赔数据样本均值与聚合保费的加权和[1].

现代的信度原理起源于 H.Bühlmann[2], 在他的文章中得到了任意分布下净保费的信度估计, 关于信度理论的详细介绍可以参见文献[3-4]. 令 X_i 表示保单持有人在第 i 个保单时期的总索赔数量. X_i 的分布依赖于风险参数 Θ. 由于风险的非齐次性, 一般假设 Θ 是随机变量, 具有先验分布为 $\pi(\theta)$. 若给定 $\Theta=\theta$, $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立, 且有相同的分布函数 $F(x,\theta)$. 信度理论的目的是在给定保单持有人的前 n 个时期的索赔经历来计算第 $n+1$ 个时期的保费[5]. 如果将估计限制在索赔数据的线性函数中, 则这个估计为著名的信度公式

$$\widehat{\mu(\Theta)}=Z\bar{X}+(1-Z)\mu,$$

其中 $Z=n/(n+k)$ 称为信度因素, $k=\sigma^2/\tau^2$ 为条件方差的期望值和条件方差的值的比率. 另外, $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本平均值, μ 为聚合保费.

注意到, 经典的信度理论中假定不同年份的索赔序列有共同的风险参数 Θ, 在风险参数给定下, 各年的索赔相互独立且具有相同的分布, 没有考虑不同年份之间风险的时间效应. Wen Limin 等[6]研究了误差等相关情况下的信度模型, 考虑了各年索赔的风险之间具有等相关的信度模型, 得到了相应的信度估计. 事实上, C.Bolancé 等[7]建立了索赔频率风险模型, 并得到了时间效应为自相关时间序列时的信度估计, O.Purcaru 与 M.Denuit[8-9]在 Poisson 索赔频率风险模型中讨论了相依结构对信度估计的影响, E.W.Frees 等[10]在时间效应 Student-t copula 假设下研究了信度估计.

本文考虑在具有时间变化效应情况下所得到的信度模型. 假设时间变化效应由某种相关矩阵刻画, 讨论相应的信度估计.

1 模型假设与准备知识

在信度理论中, 假设保单组合风险参数为 Θ, 且有 n 年的索赔记录 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 由于风险的非齐次性, 风险参数 Θ 假定为随机变量. 本文的目标是预测保单组合在未来一年的索赔 X_{n+1}. 但与经典的信度理论不同, 本文假设在风险参数给定的条件下, 索赔随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 有各自的风险参数 $\Theta_1,\Theta_2,\cdots$, 且这些风险参数具有某种相依结构. 把这个模型的基本假设列于下面.

收稿日期: 2012-03-10

基金项目: 国家自然科学基金(71001046)和江西省自然科学基金(20114BAB211004)资助项目.

作者简介: 温利民(1978-), 男, 江西石城人, 副教授, 博士, 主要从事精算学的研究.

假设 **1** 当给定时间变化效应 $\Theta_i=\theta$ 时，索赔频率 $X_i, i=1,2,\cdots,n,\cdots$ 是相互独立的，并具有相同的分布，且有

$$E(X_i\mid\Theta_i)=\mu(\Theta_i),$$
$$\mathrm{Var}(X_i\mid\Theta_i)=\sigma^2(\Theta_i),\ i=1,2,\cdots.$$

假设 **2** 风险参数 Θ_i 的分布函数为 $\pi_i(\theta)$，有相同的均值 $E[\mu(\Theta_i)]=\mu$，但不同的方差 $E[\sigma^2(\Theta_i)]=\sigma_i^2$ 和协方差 $\mathrm{Cov}(\mu(\Theta_i),\mu(\Theta_j))=\tau_i\tau_j$，这里 $i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$.

下面的引理阐明了结构相依性的一些简单但重要的基本性质.

引理 **1** 在假设 1、假设 2 成立和前面作出的记号的前提下，有

(i) X_i 的均值为

$$E(X_i)=\mu, i=1,2,\cdots,n,\cdots; \tag{1}$$

(ii)将 $\boldsymbol{X}$ 表示为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$，则现在和将来的索赔的协方差为

$$\mathbf{Cov}(X_{n+1},\boldsymbol{X})=\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n); \tag{2}$$

(iii) $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵为

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\tau_1\\ \vdots\\ \tau_n\end{pmatrix}(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2\end{pmatrix}; \tag{3}$$

(iv) $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵的逆为

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^n\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\begin{pmatrix}\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\\ \vdots\\ \frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\right). \tag{4}$$

证 (i)令 $\boldsymbol{\Theta}=(\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_K)'$，则由二重期望定理，可以得到

$$E(X_i)=E[E(X_i\mid\boldsymbol{\Theta})]=E[\mu(\Theta_i)]=\mu.$$

(ii)由于 $\mathrm{Cov}(X_{n+1},X_i\mid\boldsymbol{\Theta})=0$ 对 $i=1,\cdots,n$，则由双重条件期望公式有

$$\mathrm{Cov}(X_{n+1},X_i)=E[\mathrm{Cov}(X_{n+1},X_i\mid\boldsymbol{\Theta})]+\mathrm{Cov}(E(X_{n+1}\mid\boldsymbol{\Theta}),E(X_i\mid\boldsymbol{\Theta}))=\tau_{n+1}\tau_i,$$

从而可以得到

$$\mathbf{Cov}(X_{n+1},\boldsymbol{X})=\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

其中 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$.

(iii)注意到

$$E[\mathrm{Var}(X_i\mid\boldsymbol{\Theta})]=E[\sigma^2(\Theta_i)]=\sigma_i^2,\mathrm{Var}(\mu(\Theta_i))=\tau_i^2$$

及

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j\mid\boldsymbol{\Theta})=0, i\neq j,$$

则可得

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E[\mathrm{Cov}(X_i,X_j\mid\boldsymbol{\Theta})]+\mathrm{Cov}(E(X_i\mid\boldsymbol{\Theta}),$$
$$E(X_j\mid\boldsymbol{\Theta}))=\begin{cases}\tau_i\tau_j, & i\neq j,\\ \tau_i^2+\sigma_i^2, & i=j,\end{cases}$$

即(3)式得证.

(iv)最后，要证(4)式，回顾著名的求逆矩阵[11]有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}.$$

由(3)式和

$$\left(1+(\tau_1,\cdots,\tau_n)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1\\ \vdots\\ \tau_n\end{pmatrix}\right)^{-1}=\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^n\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}},$$

则有

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^n\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\cdot$$
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1\\ \vdots\\ \tau_n\end{pmatrix}(\tau_1,\cdots,\tau_n)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^n\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\begin{pmatrix}\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\\ \vdots\\ \frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\right),$$

则(4)式得证.

故引理 1 得证.

在信度理论中，本文的目的是基于样本数据 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的线性函数类来预测第 i 个保单的未来保费，即求解最小值问题:

$$\underset{a_i\in\mathbf{R}}{\mathrm{Min}}\, E\left[X_{n+1}-a_0-\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right]^2. \tag{5}$$

X_{n+1} 的非齐次信度保费定义为(5)式的解，表示为 $\widehat{X_{n_i+1}}^*$．为求解最优化问题(5)，记

$$L(X,1):=\left\{a_0-\sum_{i=1}^{n}a_iX_i, a_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}.$$

下面介绍一些随机变量在平方可积空间中关于正交投影的概念.

定义 1　称 2 个元素 $X,Y\in L^2=\{Z{:}Z$ 是 1 个随机变量且 $E(Z^2)<\infty\}$ 为相互正交，若 $E(XY)=0$，表示为 $X\perp Y$．

定义 2　对 1 个闭子集 $M\subset L^2$，称 Y^* 是 $Y\in L^2$ 在 M 上的正交投影，表示为 $Y^*=\mathrm{pro}(Y\,|\,M)$，当且仅当 $Y-Y^*\perp M$，即 $Y-Y^*\perp Z_1-Z_2$，对所有的 $Z_1,Z_2\in M$．

根据文献[4]知，X_{n_i+1} 的非齐次信度估计其实就是 X_{n_i+1} 在 $L(\boldsymbol{X},1)$ 上的正交投影，即 $\widehat{X_{n_i+1}}^*=\mathrm{pro}(X_{n_i+1}\,|\,L(\boldsymbol{X},1))$．

引理 2　在假设 1、假设 2 和前面记号的前提下，记随机向量 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{p\times1}\\ \boldsymbol{Y}_{q\times1}\end{pmatrix}$ 的期望与方差协方差矩阵分别为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu_X}\\ \boldsymbol{\mu_Y}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma_{XX}} & \boldsymbol{\Sigma_{XY}}\\ \boldsymbol{\Sigma_{YX}} & \boldsymbol{\Sigma_{YY}}\end{pmatrix}$，则当

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\mu_Y}-\boldsymbol{\Sigma_{YX}}\boldsymbol{\Sigma_{XX}^{-1}}\boldsymbol{\mu_X},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Sigma_{YX}}\boldsymbol{\Sigma_{XX}^{-1}}$$

时，期望损失

$$E(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BX})'$$

在矩阵的非负定意义下达到最小.

因此，根据引理 2，基于随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的非齐次函数类的随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 的最优预测为

$$\mathbf{pro}(\boldsymbol{Y}\,|\,L(\boldsymbol{X},1))=\boldsymbol{\mu_Y}+\boldsymbol{\Sigma_{YX}}\boldsymbol{\Sigma_{XX}}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu_X}), \tag{6}$$

其中 $\mathbf{pro}(\boldsymbol{Y}\,|\,L(\boldsymbol{X},1))$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数空间的正交投影. 表达式(6)称为随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 的线性空间的(非齐次)正交投影.

结合前面的模型假设，则有下面的结论.

引理 3　风险 X_{n+1} 的非齐次信度估计实际上就是 X_{n+1} 在 $L(\boldsymbol{X},1)$ 上的正交投影，并且有公式

$$\mathrm{pro}(X_{n+1}\,|\,L(\boldsymbol{X},1))=E(X_{n+1})+$$
$$\mathbf{Cov}(X_{n+1},\boldsymbol{X})\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})),$$

其中 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$．

2　信度估计

由前面几个部分的准备，得到了未来索赔 X_{n+1} 的信度保费[12].

定理 1　在假设 1 和假设 2 成立时，X_{n+1} 的最佳线性非齐次估计为

$$\widehat{X_{n+1}}^*=Z\bar{X}_\tau+(1-Z)\mu,$$

其中

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{n+1}\tau_i}{\sigma_i^2}\Bigg/\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}\right),\ \bar{X}_\tau=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_iX_i}{\sigma_i^2}\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{\sigma_i^2}.$$

证　根据引理 2，有

$$\widehat{X_{n+1}}^*=\mathrm{pro}(X_{n+1}\,|\,L(\boldsymbol{X},1))=E(X_{n+1})+$$
$$\mathbf{Cov}(X_{n+1},\boldsymbol{X})\mathbf{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})).$$

同时由(1)式、(2)式和(4)式，可以得到

$$\widehat{X_{n+1}}^*=\mu+\tau_{n+1}(\tau_1,\cdots,\tau_n)\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}-\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\\ \vdots\\ \frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2},\cdots,\frac{\tau_n}{\sigma_n^2}\right)\right)\begin{pmatrix}X_1-\mu\\ \vdots\\ X_n-\mu\end{pmatrix}=\mu+$$

$$\tau_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{\sigma_i^2}(X_i-\mu)-\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{\sigma_i^2}(X_i-\mu)\right)=$$

$$\mu+\tau_{n+1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{\sigma_i^2}(X_i-\mu)=$$

$$\mu+\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{n+1}\tau_i}{\sigma_i^2}(X_i-\mu)=Z\bar{X}_\tau+(1-Z)\mu.$$

注 1　在定理 1 中，信度因子 Z 是关于样本 n 的增函数，且有 $0\leqslant Z\leqslant1$．说明样本容量越大，信度保费赋予样本加权均值 $\bar{X}_\tau$ 更多的权重，反之亦然.

注 2　在定理 1 中，若 $\tau_i=\tau,\sigma_i^2=\sigma^2,i=1,2,\cdots$，则

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{n+1}\tau_i}{\sigma_i^2}}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}=\frac{n\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2},$$

$$\bar{X}_\tau=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i}{\sigma_i^2}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i X_i}{\sigma_i^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

因此，信度估计成为

$$\widehat{X_{n+1}}^*=\frac{n\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}\bar{X}+\frac{\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}\mu,$$

即它是 Bühlmann 信度估计.

3 结论

在大部分信度理论的研究中，一般假设风险参数是相互独立的. 然而，由于现实世界的复杂性，风险之间一般呈现相依. 本文研究了某种相依风险下信度保费的估计，得到的信度保费为样本的某种均值和聚合索赔的“信度”形式，推广了经典的信度原理.

4 参考文献

[1] 丁树良，周新莲. 一种新的信度估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2002, 26(3): 222-224.

[2] Bühlmann H. Experience rating and credibility I [J]. Astin Bulletin, 1967, 4(3): 199-207.

[3] Norberg R. Credibility theory [M]. Chichester: Wiley-Blackwell, 2004.

[4] Bühlmann H, Gisler A. A course in credibility theory and its applications [M]. Netherlands: Springer, 2005: 77-264.

[5] 邓国华. 风险非同质时索赔次数的统计研究 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2004, 28(3): 228-231.

[6] Wen Limin, Wang Wei, Yu Xueli. Credibility models with error uniform dependence [J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 2009(5): 118-126.

[7] Bolancé C, Guillén M, Pinquet J. Time-varying credibility for frequency risk models: estimation and tests for autoregressive specifications on the random effects [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33(2): 273-282.

[8] Purcaru O, Denuit M. On the dependence induced by frequency credibility models [J]. Belgian Actuarial Bulletin, 2002, 2(1): 73-79.

[9] Purcaru O, Denuit M. Dependence in dynamic claim frequency credibility models [J]. Astin Bulletin, 2003, 33(1): 23-40.

[10] Frees E W, Wang Ping. Credibility using copulas [J]. North American Actuarial Journal, 2005, 9(2): 31-48.

[11] Rao C R, Toutenburg H. Linear models: least squares and alternatives [M]. New York: Springer, 1995.

[12] Wen Limin, Wu Xianyi, Zhou Xian. The credibility premiums for models with dependence induced by common effects [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(1): 19-25.

The Credibility Models with Time Changeable Effects

ZHENG Dan[1], ZHANG Yi[2], WEN Li-min[1*]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. College of Computer Information Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The credibility premiums with time changeable effects are derived by means of credibility theory methods. Conclusions show that credibility estimator of the credibility models with time changeable effects can still be expressed as weighted sums of claim data and collective premium, and the credibility factor depends on the time changeable effects. Thus the classical credibility theory is generalized.

Key words: credibility estimator; time changeable effects; orthogonal projection

(责任编辑：曾剑锋)