

文章编号: 1000-5862(2012)05-0257-06

# 均匀 B 样条 1 次升降多阶的矩阵表示

徐少平, 刘小平, 李春泉, 胡凌燕, 杨晓辉

(南昌大学信息工程学院, 江西 南昌 330031)

摘要: 研究了均匀 B 样条曲线的 1 次升降多阶的矩阵表示, 提出了将计算过程表示为多个矩阵连续相乘的形式, 矩阵的乘积作为 B 样条升降阶的转换矩阵, 得到 B 样条曲线升降阶后的控制顶点矢量可以表示为转换矩阵与原曲线控制顶点矢量乘积的形式. 该方法不需要使用节点插入、节点删除和节点优化技术, 具有模块化、可扩展性、便于实现等优点.

关键词: 计算机图形学; B 样条; 转换矩阵; 矩阵表示

中图分类号: TP 391.7

文献标志码: A

## 0 引言

均匀 B 样条曲线(Uniform B-spline Curves)的升降阶是计算机辅助几何设计、计算机辅助设计和计算机图形学等领域在表示和设计自由曲线曲面方面的重要研究内容<sup>[1-6]</sup>. 大多数 B 样条曲线的升降阶算法主要是通过节点矢量(Knot Vector)中插入或删除节点方法来实现的. M.Eck等提出了 B 样条曲线的节点矢量插入和删除算法, 该算法研究了节点矢量的插入和删除对曲线控制顶点的影响以及修改后的 B 样条曲线与原曲线的逼近差值, 以后许多研究者都是以他们工作为基础展开的. 如 L.Piegl 和 W.Tiller 在 1995 年提出首先使用节点插入算法将 B 样条曲线分解为多个 Bézier 曲线段, 然后利用最小平方和约束条件完成 Bézier 曲线段的降阶<sup>[7]</sup>, 最后利用节点删除和节点优化的算法将 Bézier 曲线段合并为 1 条新 B 样条曲线; 文献[4]提出了一个相对速度较快并且易于理解和实现的 B 样条升阶算法, 但该算法仍然需要节点矢量的插入、删除过程; 秦开怀等<sup>[8-9]</sup>利用约束优化方法先求出退化的 B 样条曲线来逼近原曲线, 再对退化的曲线通过分段解线性方程组进行降阶, 解线性方程组过程仍然比较繁琐复杂; 潘日晶等<sup>[10]</sup>在 B 样条曲线系数矩阵的有关结果的基础上, 给出 B 样条曲线可降阶(退化)的充要条件, 并进一步推导出 B 样条曲线的递归降

阶公式. 虽然不用解线性方程组, 然而它 1 次只能完成降 1 阶, 并且没有给出显式矩阵表示形式. H.J.Wolters 等提出了利用 Blossom 函数性质和最小平方和方法研究 B 样条的降阶, Blossom 函数在数学上表示节点矢量插入和删除非常优美, 但是在这个方向上的研究成果还较少见.

以上所提到的各种 B 样条曲线升降阶算法计算过程一般比较复杂, 从工程实践的角度来看, 不利于理解和软件实现. 本文根据文献[6]提出的 B 样条的降阶算法思想, 把 B 样条的升降阶 3 个关键计算步骤分别表示为矩阵形式. 在给定 B 样条当前阶  $n$  和目标阶  $m$  这 2 个参数的条件下, 3 个矩阵就能立刻生成, 它们的乘积作为 B 样条升降阶转换矩阵. B 样条曲线升降阶后的新控制顶点矢量可以表示为转换矩阵与原曲线控制顶点矢量乘积的形式. 当系统之间大量交换 B 样条曲线数据时, 只要是转换参数条件不变则这个转换矩阵就不用重新计算(也可事先固化), 从而节约了大量的转换时间. 新方法主要依赖调整控制顶点个数和位置的变化实现 B 样条 1 次升降多阶而不使用插入、删除和优化 B 样条节点矢量的方法, 具有模块化、可扩展性、便于实现等优点.

## 1 B 样条升降阶的矩阵表示

按照文献[6]提出的 B 样条降阶算法思想, B 样

收稿日期: 2012-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(61163023, 61175072)和江西省自然科学基金(20114BAB211024)资助项目.

作者简介: 徐少平(1976-), 男, 江西九江人, 副教授, 博士, 主要从事图形图像处理方面的研究.

条升降阶的计算过程可以表示为

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}_{z-b}^m \mathbf{T}_{n,r} \mathbf{T}_{b-z}^n \mathbf{P}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{P}$  为 B 样条曲线降阶前的控制顶点矢量,  $\mathbf{P}'$  为完成降阶后 B 样条的控制顶点矢量,  $\mathbf{T}_{b-z}^n$  是将  $n$  阶的 B 样条转换为  $n$  阶 Bézier 曲线的转换矩阵;  $\mathbf{T}_{n,r}$  表示将 Bézier 曲线升降  $r$  阶的转换矩阵( $r$  为正表示升阶,  $r$  为负表示降阶);  $\mathbf{T}_{z-b}^m$  是将  $m$  阶 Bézier 曲线转换为  $m$  阶 B 样条的转换矩阵. 这 3 个矩阵可随研究进展而被替换为新的矩阵, 具有模块化特点. 下面就这 3 个矩阵具体计算方法进行详细地阐述.

## 2 B 样条曲线分解为 Bézier 曲线段

### 2.1 B 样条与 Bézier 曲线转换矩阵

B 样条曲线由  $N$  段多项式首尾相连组成, 这些多项式可以转换为 Bézier 曲线段. B 样条的升降阶实际上就是这  $N$  段多项式(Bézier 曲线段)的升降阶问题.  $N+1$  控制顶点  $K$  次 B 样条有  $N-K+1$  段多项式, 相邻 2 段多项式共享  $K$  个控制顶点. 为简单起见, 本文仅讨论某一段 B 样条多项式的转换矩阵, 这是因为每一段多项式的转换为 Bézier 曲线段的过程均相同. B 样条与 Bézier 曲线转换实际上就是基函数之间的转换, 具体转换公式<sup>[11]</sup>为

$$\begin{aligned} [N_{-n,n}(u) \cdots N_{0,n}(u)] &= [B_{0,n}(u) \cdots B_{n,n}(u)] \mathbf{S}^{(n)}, \\ N_{j-n,n}(u) &= \sum_{i=0}^n S_{i,j}^{(n)} B_{i,n}(u), \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\forall j=0, \cdots, n, u \in [0, 1]$ ,  $N_{-i,n}(u)$  是 B 样条曲线的基函数,  $B_{i,n}(u)$  是 Bézier 曲线的基函数, B 样条基函数第 1 个下标从  $-n$  开始计数, 主要是保证公式(2)中参数  $u \in [0, 1]$ .  $\mathbf{S}^{(n)}$  是 B 样条曲线某一段多项式转换成 Bézier 曲线段的转换矩阵, 大小为  $(n+1) \times (n+1)$ . 矩阵  $\mathbf{S}^{(n)}$  中元素由下式计算:

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{(n)} &= \frac{n-j}{n} S_{i,j-1}^{(n-1)} + \frac{j+1}{n} S_{i,j}^{(n-1)}, \\ S_{i+1,j}^{(n)} &= \frac{n+1-j}{n} S_{i,j-1}^{(n-1)} + \frac{j}{n} S_{i,j}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\forall j=0, \cdots, n, i=0, \cdots, n-1$ .

公式(3)可以等价表示为

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{E}^n (\mathbf{S}_u^{(n)}) + \mathbf{E}_1 (\mathbf{S}_d^{(n)}), \quad (4)$$

其中  $\mathbf{S}_u^{(n)} = \mathbf{S}^{(n-1)} \mathbf{L}^{(n-1)}$ ,  $\mathbf{S}_d^{(n)} = \mathbf{S}^{(n-1)} \mathbf{M}^{(n-1)}$ ,  $\mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{1}$ .

算子  $\mathbf{E}^n(\cdot)$  表示将矩阵  $\mathbf{S}_u^{(n)}$  增广为  $n+1$  阶矩阵,

增广矩阵中第  $N$  行第  $N$  列的元素为 0, 其它行列元素与原矩阵相同;  $\mathbf{E}_1(\cdot)$  表示将矩阵  $\mathbf{S}_d^{(n)}$  增广为  $n+1$  阶矩阵, 其第 0 行第 0 列的元素为 0, 其它行列元素与原矩阵相同.  $\mathbf{L}^{(n-1)}$ 、 $\mathbf{M}^{(n-1)}$  具体的形式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(n-1)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & \frac{n-2}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{j}{n} & \frac{n-j}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}^{(n-1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{n-j}{n} & \frac{j}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.2 B 样条与 Bézier 曲线转换矩阵改进的计算方法

公式(4)给出的计算  $\mathbf{S}^{(n)}$  方法比较复杂. 首先, 它是以递推形式给出的, 每次递推需要分别计算  $\mathbf{S}_u^{(n)}$  和  $\mathbf{S}_d^{(n)}$  这 2 个矩阵, 其实矩阵  $\mathbf{S}_u^{(n)}$  和  $\mathbf{S}_d^{(n)}$  的元素存在大量重复计算的情况, 浪费了大量机器时间; 其次, 矩阵的  $\mathbf{S}^{(n)}$  元素具有以下特点: (i) 矩阵  $\mathbf{S}^{(n)}$  每一行元素的和  $\sum_{j=0}^n \frac{1}{n!} \mathbf{S}^{(n)}(i, j) = 1$ ; (ii) 矩阵  $\mathbf{S}^{(n)}$  的第  $i$  行元素  $\mathbf{S}_i^{(n)}$

与第  $n-i$  行  $\mathbf{S}_{n-i}^{(n)}$  的元素具有倒序关系, 即  $\mathbf{S}^{(n)}(i, j) = \mathbf{S}^{(n)}(n-i, n-j)$ . 特别地, 将第 1 行元素的循环右移可获得最后一行元素; (iii)  $\mathbf{S}^{(n)}(0, 0) = \mathbf{S}^{(n)}(n, n) = 1$ ,  $\mathbf{S}^{(n)}(i, 0) = \mathbf{S}^{(n)}(j, n) = 0, i=1, 2, \cdots, n, j=0, 1, \cdots, n-1$ . 基于此, 更为简单地计算  $\mathbf{S}^{(n)}$  的公式为

$$\mathbf{S}^{(n)} = \mathbf{S}^{(0)} \mathbf{L}^{(0)} \mathbf{E}^0 \mathbf{R}^0 \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{E}^1 \mathbf{R}^1 \cdots \mathbf{L}^{(n-1)} \mathbf{E}^{n-1} \mathbf{R}^{n-1}, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{E}^n$  的定义与公式(4)相同,  $\mathbf{R}^n$  表示将矩阵  $\mathbf{E}^n$  的第 1 行元素循环右移置入最后 1 行(增广矩阵和循环右移矩阵算符均可以用矩阵的乘法和加法表示, 增广矩阵和循环右移矩阵算符可以放入公式(5)中, 以矩阵初等计算形式体现). 在公式(5)中, 没有使用公式(4)中的矩阵  $\mathbf{M}^{(n-1)}$  而只使用矩阵  $\mathbf{L}^{(n-1)}$ , 省略了约 1/2 的重复计算, 并且  $\mathbf{S}^{(n)}$  可以写成矩阵连续相乘的简单形式.

当  $n=1, 2, 3$  时, 矩阵  $S^{(n)}$  具体的计算过程如下:

$$S^{(0)} = 1, \quad S^{(0)}L^{(0)} = 1, \quad S^{(0)}L^{(0)}E^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S^{(1)} = S^{(0)}L^{(0)}E^0R^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^{(1)}L^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{(1)}L^{(1)}E^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S^{(2)} = S^{(1)}L^{(1)}E^1R^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^{(2)}L^{(2)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad S^{(2)}L^{(2)}E^2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S^{(3)} = S^{(2)}L^{(2)}E^2R^2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

当  $n=4, 5$  时, 矩阵  $S^{(n)}$  的计算结果如下:

$$S^{(4)} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 11 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 11 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^{(5)} = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 66 & 36 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 60 & 48 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 48 & 60 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 36 & 66 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据公式(2)有

$$\begin{aligned} & [N_{-n,n}(u) \cdots N_{0,n}(u)] [p_0 \cdots p_n]^T = \\ & [B_{0,n}(u) \cdots B_{n,n}(u)] S^{(n)} [p_0 \cdots p_n]^T = \\ & [B_{0,n}(u) \cdots B_{n,n}(u)] [p'_0 \cdots p'_n]^T. \end{aligned}$$

也就是说, 要将 B 样条某一段多项式转换 Bézier 曲线段只需要将 B 样条曲线这一段对应的控制顶点矢量左乘转换矩阵  $S^{(n)}$ , 计算结果就是转换后 Bézier 曲线段的控制顶点矢量, 而曲线本身不变. 在公式(1)中,  $T_{b-z}^n = S^{(n)}$ .

### 3 Bézier 曲线段升降阶

在 B 样条曲线分解为多段首尾相连 Bézier 曲线段后, B 样条的升降阶的问题实际上就转换为各段 Bézier 曲线段升降阶的问题.

#### 3.1 Bézier 曲线的升降阶

在给定一组控制顶点  $\{p_i\}_{i=0}^n$  的条件下,  $n$  次 Bézier 曲线段定义为

$$p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

其中  $B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$  为  $n$  次 Bézier 基函数.

Bézier 曲线段升降阶的问题可定义为寻找以  $\{q_i\}_{i=0}^m$  为控制顶点的  $m$  次 Bézier 曲线

$$q(t) = \sum_{i=0}^m q_i B_i^m(t), \quad t \in [0, 1],$$

使得曲线  $p(t)$  和  $q(t)$  之间的某种范数距离函数  $d(p, q)$  的值最小<sup>[7, 12-14]</sup>. 如果用矩阵形式表示, Bézier 曲线升降阶的关键问题就是找出 1 个升降阶转换矩阵  $Q$  使其满足:

$$q = Qp, \quad (6)$$

其中  $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)^T$ ,  $q = (q_0, q_1, \dots, q_m)^T$ ,  $p$ ,  $q$  分别表示 Bézier 曲线  $p(t)$  和  $q(t)$  的控制顶点矢量.

#### 3.2 Bézier 曲线的升阶矩阵表示

如果公式(6)是升阶公式, 那么矩阵  $Q$  的元素  $Q(i, j)$  的计算公式<sup>[15]</sup>为

$$Q(i, j) = \frac{(C_n^j C_r^{i-j})}{C_{n+r}^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n+r, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

#### 3.3 Bézier 曲线段降阶矩阵表示

与升阶情况不同, 由于 Bézier 曲线降阶后的曲线与原曲线之间不可能完全相同. 为了尽量减少这个误差, 在不同约束条件下已经有许多成熟的算法被提出来, 其中有些算法是以矩阵形式表示的. 如 H.Sunwoo 等对早期 Bézier 曲线降阶各类降阶算法研究成果进行了充分的总结, 给出了统一的矩阵表示<sup>[16]</sup>; 近年来, B.Lee 等将 Bezier 曲线的基函数转换为其它类型的多项式(Legendre、Jacobi、Chebyshev)进行研究, 利用这些多项式的直交性质完成升降阶后再转换回 Bezier 曲线, 也取得了一些成果<sup>[17]</sup>. 这些算法均可以在新提出的 B 样条降阶算法的框架内进行利用, 并且随着研究进展可以随时更新, 具有可扩展的特点. 在公式(1)中,  $T_{n,r} = Q$ .

## 4 Bézier 曲线段合并为 B 样条

当多段 Bézier 曲线段各自完成升降阶后, 需要将这些 Bézier 曲线段合并成一条连续的 B 样条. 根据合并后节点矢量的不同, 有 2 种基本合并方法.

### 4.1 无误差合并法

假设  $k$  次的 Bézier 曲线段的  $q(u)$  具有  $p_0, \dots, p_k$  个控制顶点, 如果 B 样条曲线  $p(t)$  具有相同控制顶点, 且节点矢量为  $T = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1]$  (由  $k+1$  个值为 0 和  $k+1$  个值为 1 的节点组成), 那么  $N_{i,k+1}(u) = C_k^i u^i (1-u)^{k-i}$ . 也就是, 在这种情况下, Bézier 曲线与 B 样条曲线的控制顶点是相同的. 根据这个结论, 可以将多段 Bézier 曲线段在保持控制顶点不变的情况下, 合并为 1 条新的 B 样条, 这实际上是一种特殊的 B 样条曲线. 如合并 2 个 3 次的 Bézier 曲线  $q_0(u)$  和  $q_1(u)$  成为 B 样条曲线  $p(u)$ , 它们的控制顶点分别为  $p_0, \dots, p_3$  和  $p'_0, \dots, p'_3$ . 合并后的  $p(u)$  控制顶点为  $p_0, \dots, p_3, p'_0, \dots, p'_3$ , 节点矢量为  $T = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2]$ , 节点的重度为 4. 由于第 1 段 Bezier 曲线的终点  $p_3$  和第 2 段的起点  $p'_0$  重合, 可以对上述合并后的 B 样条曲线的再次进行优化, 即合并后的控制顶点为  $p_0, p_1, p_2, p_3(p'_0), p'_1, p'_2, p'_3$  7 个点, 节点矢量为  $T = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2]$ , 很显然这种方法是牺牲节点矢量存储容量为代价获得了无需计算 B 样条控制顶点的时间, 并且不会引入新的误差.

### 4.2 有误差合并法

由公式(2)可以推出

$$\begin{aligned} & [B_{0,m}(u) \cdots B_{m,m}(u)] [p_0 \cdots p_m]^T = \\ & [N_{-m,m}(u) \cdots N_{0,m}(u)] S^{(-m)} [p'_0 \cdots p'_m]^T, \end{aligned}$$

其中  $S^{(-m)}$  是  $S^{(m)}$  的逆矩阵, 将完成升降阶的 Bézier 曲线的控制顶点左乘矩阵  $S^{(-m)}$  即可得到对应阶的 B 样条的曲线的控制顶点. 在公式(1)中,  $T_{z-b}^m = S^{(-m)}$ . 但是, 采用这种方法前后端点相连的 Bézier 曲线段在转换后的 B 样条所共享  $m$  个控制顶点可能不完全一致. 可以将这  $m$  个对应点做加权平均来作为 B 样条的控制顶点, 这一步将引入系统误差, 但节点矢量可以是标准的均匀节点矢量  $T = [0, 1, 2, 3, 4, \dots]$  的形式, 与无误差合并方法相比节约了节点矢量的存储容量, 但引入了相应的合并误差. 为减小误差方法, 需要进一步进行相应地研究<sup>[18]</sup>.

## 5 实验和结果分析

实验选择通用的 VC++ 作为开发平台, 未采用任何数值计算软件包, 图形输出采用 Matlab 工具的 plot 函数完成. 测试用例是将 7 次的均匀 B 样条曲线降阶为 3 次均匀 B 样条曲线. 降级前的控制顶点为  $p_0 = (3, 3), p_1 = (5, 9.5), p_2 = (7, 2), p_3 = (8, 9), p_4 = (10, 3), p_5 = (11, 8), p_6 = (13, 5), p_7 = (14, 6), p_8 = (16, 4)$ , 节点矢量为  $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$ , 所以这个 7 次的 B 样条曲线有 2 段多项式构成.

首先, 计算 7 次 B 样条转换为 7 次 Bezier 曲线的控制顶点坐标. 第 1 段的坐标为  $p_0 = (8.236\ 309, 5.914\ 087), p_1 = (8.450\ 793, 5.946\ 429), p_2 = (8.668\ 254, 5.935\ 714), p_3 = (8.888\ 889, 5.876\ 191), p_4 = (9.111\ 111, 5.783\ 333), p_5 = (9.331\ 746, 5.696\ 429), p_6 = (9.549\ 207, 5.641\ 071), p_7 = (9.763\ 492, 5.625\ 099)$ ; 第 2 段 Bezier 坐标为  $p'_0 = (9.763\ 492, 5.625\ 099), p'_1 = (9.977\ 777, 5.609\ 127), p'_2 = (10.188\ 889, 5.632\ 540), p'_3 = (10.396\ 826, 5.703\ 175), p'_4 = (10.603\ 174, 5.811\ 111), p'_5 = (10.811\ 111, 5.924\ 603), p'_6 = (11.022\ 223, 6.019\ 444), p'_7 = (11.236\ 508, 6.083\ 730)$ .

显然, 第 1 段最后 1 个点和第 2 段最前面 1 个点重合, 说明这 2 段曲线是首尾相连的, 满足  $C^0$  连续性; 然后, 将前后这 2 段 7 次 Bezier 曲线降阶到 3 次得到新的控制顶点. 第 1 段 3 次 Bezier 曲线的控制顶点为  $p_0 = (8.236\ 309, 5.914\ 087), p_1 = (8.736\ 772, 5.989\ 551), p_2 = (9.263\ 494, 5.662\ 372), p_3 = (9.763\ 491, 5.625\ 096)$ ; 第 2 段 3 次 Beizer 曲线的控制顶点为  $p'_0 = (9.763\ 491, 5.625\ 096), p'_1 = (10.263\ 492, 5.587\ 830), p'_2 = (10.736\ 496, 5.933\ 730), p'_3 = (11.236\ 519, 6.083\ 730)$ .

显然, 经过降阶后,  $p_3$  和  $p'_0$  重合, 说明这 2 段曲线首尾相连处仍然满足  $C^0$  连续性; 最后, 将 2 段 3 次 Bezier 曲线转换 2 段 3 次 B 样条的控制顶点(有误差合并法). 第 1 段 B 样条控制顶点为  $q_0 = (6.787\ 442, 4.882\ 410), q_1 = (8.210\ 049, 6.316\ 730), q_2 = (9.790\ 217, 5.335\ 192), q_3 = (11.210\ 026, 6.093\ 079)$ . 第 2 段 B 样条控制顶点为  $q'_0 = (8.209\ 498, 6.503\ 245), q'_1 = (9.790\ 487, 5.241\ 930), q'_2 = (11.209\ 500, 6.279\ 630), q'_3 = (12.790\ 627, 6.141\ 928)$ .

显然, 第 1 段后 3 个点  $q_1, q_2, q_3$  与第 2 段的

前 3 个点  $q'_0$ 、 $q'_1$ 、 $q'_2$  并不完全重合, 会引入误差. 将这 3 个对应点做平均后使得  $\bar{q}_1 = (q_1 + q'_0)/2$ 、 $\bar{q}_2 = (q_2 + q'_1)/2$ 、 $\bar{q}_3 = (q_3 + q'_2)/2$  为 B 样条的控制顶点.

降阶前后的 B 样条和误差曲线如图 1 所示. 从图 1 中可以看出降阶后的 3 次 B 样条与 7 次 B 样条误差平均为  $5 \times 10^{-3}$ , 说明降阶的效果比较好.

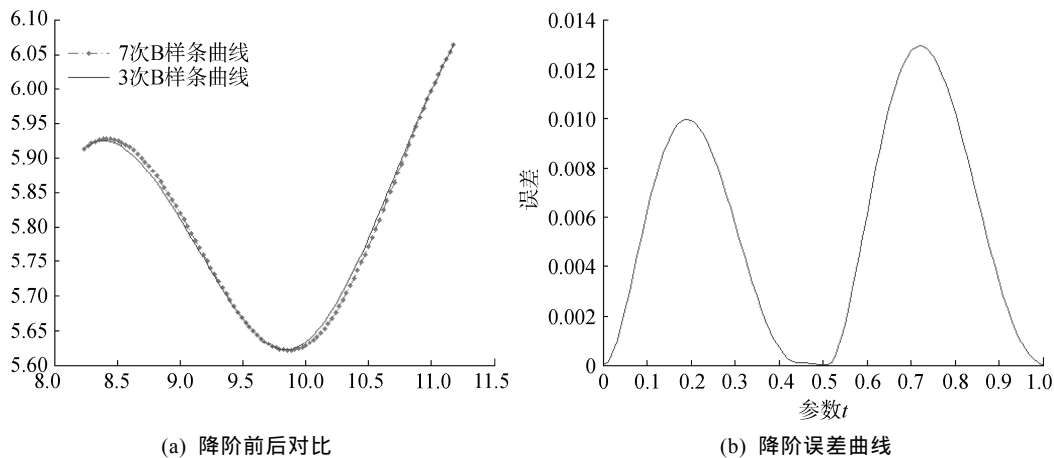


图 1 7 次 B 样条曲线降为 3 次 B 样条曲线前后对比以及误差曲线

## 6 结论

提出了一种 B 样条 1 次升降多阶算法的矩阵表示方法. 与传统的做法不同, 新方法主要依赖调整控制顶点个数和位置的变化实现升降阶, 不需要执行节点矢量的插入和删除. 新方法中, B 样条与 Bézier 曲线之间的相互转换矩阵和 Bézier 曲线段降阶矩阵可根据研究进展得到更新, 具有模块化、可扩展的特点, 整个降阶算法实现也非常简单. 未来的工作可基于 B 样条由分段多项式构成的特点设计并行执行的 B 样条升降阶算法, 并就当多段 Bézier 曲线合并为 B 样条曲线时减少引入误差, 在各段首尾连接处保持更高参数连续性问题进行进一步地研究.

## 7 参考文献

- [1] 孙家广, 胡事民. 计算机图形学基础教程 [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [2] Samuel R Buss. 3D computer graphics: a mathematical introduction with OpenGL [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [3] Eck M, Hadenfeld J. Knot removal for B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(3): 259-282.
- [4] Liu W. A simple efficient degree raising algorithm for B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(7): 693-698.
- [5] Huang Qixing, Hu Shimin, Martin Ralph R. Fast degree elevation and knot insertion for B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(2): 183-197.
- [6] Piegl L, Tiller W. Algorithm for degree reduction of B-spline curves [J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(2): 101-110.
- [7] Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves [J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(11): 845-851.
- [8] 秦开怀, 黄海昆. B 样条曲线降阶新方法 [J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 306-310.
- [9] Yong Junhai, Hu Shimin, Sun Jianguang, et al. Degree reduction of B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(2): 117-127.
- [10] 潘日晶. NURBS 曲线曲面的显式矩阵表示及其算法 [J]. 计算机学报, 2001, 24 (4) : 358-366.
- [11] Rommani L, Sabin M A. The conversion matrix between uniform B-spline and Bézier representations [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(6): 549-560.
- [12] Kim H O, Moon S Y. Degree reduction of Bézier curves by  $L^1$ -approximation with endpoint interpolation [J]. Computers Math Applic, 1997, 33(5): 67-77.
- [13] Kim H J, Ahn Y J. Good degree reduction of Bézier curves using Jacobi polynomials [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2000, 40(10): 1205-1215.
- [14] Ahn Y J. Using Jacobi polynomials for degree reduction of Bézier curves with  $C^k$ -constraints [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(7): 423-434.
- [15] Rababah A, Lee B, Yoo J. A simple matrix form for degree reduction of Bézier curves using Chebyshev-Bernstein basis

- transformations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(1): 310-318.
- [16] Sunwoo Hasik, Lee Namyong. A unified matrix representation for degree reduction of Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2): 151-164.
- [17] Lee B, Park Y, Yoo J. Application of Legendre-Bernstein basis transformations to degree elevation and degree reduction [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(9): 709-718.
- [18] 成敏, 王国瑾. 基于显式矩阵表示和多项式逼近论的 NURBS 曲线降多阶 [J]. 中国科学: E 辑, 2003, 33(8): 673-680.

## The Matrix Representation for Multi-Degree Reduction or Elevation of Uniform B-Spline Curves

XU Shao-ping, LIU Xiao-ping, LI Chun-quan, HU Lin-yan, YANG Xiao-hui

(School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang Jiangxi 330031, China)

**Abstract:** Multi-degree elevation and degree reduction of B-Spline curves in a matrix representation was proposed. The control points of the degree elevated or reduced B-Spline curve can be obtained as a product of the transformation matrix and the vector of original control points. The method does not need knots inserting or knots refinement. In this way, the process of degree changing of B-spline simply express.

**Key words:** computer graphic; B-spline; transformation matrix; matrix representation

(责任编辑: 曾剑锋)

---

(上接第 244 页)

## The Coloring Problems for Double Graph of Path and Circle

LU Jian-li, REN Feng-xia, MA Mei-lin

(College of Mathematics and Information Science, He'nan Normal University, Xinxiang He'nan 453007, China)

**Abstract:** Through classification discussion and inductive exploration, the adjacent strong edge coloring of double graphs of path and circle and the equitable adjacent strong edge coloring of double graphs of path are studied by setting up a corresponding relation between the set of vertices and edges and the set of color. Corresponding chromatic numbers are obtained by this new relation, at the same time, the corresponding coloring schemes are given.

**Key words:** double graph; equitable adjacent strong edge coloring; equitable adjacent strong edge chromatic number

(责任编辑: 曾剑锋)