文章编号: 1000-5862(2012)04-0331-04

周期微分方程中的一个扰动问题

肖丽鹏[1], 程　筠[2]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院 江西 南昌 330022; 2. 南昌航空大学数学与信息科学学院 江西 南昌 330063)

摘要: 利用值分布理论研究了 2 阶周期微分方程中的扰动问题, 得到了系数为无穷 e-型级周期整函数方程的一些扰动结果, 完善了蒋翼迈和高仕安文中的扰动结果.

关键词: 周期微分方程; 线性无关; 扰动
中图分类号: O 174.52;O 175.12　　文献标志码: A

0　引言与结果

本文将使用值分布的标准记号[1-3]. 另外, 用 $\sigma(f)$ 和 $\lambda(f)$ 表示亚纯函数 f 的级和零点收敛指数, 用 $\sigma_2(f)$ 和 $\lambda_2(f)$ 表示亚纯函数 f 的超级和超零点收敛指数. 研究周期微分方程时, 往往用到亚纯函数 f 的 e-型级 $\sigma_e(f)$ 和 e-型零点收敛指数 $\lambda_e(f)$, 分别定义如下[4]:

$$\sigma_e(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\log T(r,f)/r$$

和

$$\lambda_e(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\log N(r,f)/r. \tag{1}$$

当只计 f 在右半平面的零点时, (1)式的右边用 $\lambda_{eR}(f)$ 表示, 同理当只计 f 在左半平面的零点时, (1)式的左边用 $\lambda_{eL}(f)$ 表示. $T_1(r,f)$ 表示亚纯函数 f 在 $C_0=C\setminus\{z:|z|\leqslant R_0\}$ 中的 Nevanlinna 特征, 类似可定义 $m_1(r,f),N_1(r,f)$, $f(z)$ 在 C_0 中的级定义为

$$\sigma_1(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\log T_1(r,f)/\log r.$$

复振荡中的扰动问题由 Bank、Laine 和 Langley 在文献[5]中首次提出并研究. 高仕安、陈特为在文献[6-7]中研究过这个问题.

2002 年, 蒋翼迈和高仕安在文献[4]中首次研究了周期微分方程中的扰动问题, 证明了以下扰动结果.

定理 A　设 $B(\zeta)=g_1(1/\zeta)+g_2(\zeta),C(\zeta)=g_3(\zeta)$, 其中 g_1,g_2,g_3 为有穷级整函数且 $\sigma(g_2)$ 为正整数, $\sigma(g_3)<\sigma(g_2)$, 设 $A(z)=B(\mathrm{e}^z),\pi(z)=C(\mathrm{e}^z)$,进一步, 假设方程

$$f''+A(z)f=0 \tag{2}$$

的一非平凡解 f 满足 $\lambda_e(f)<\sigma(g_2)$ 且 $f(z),f(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性无关, 则

(i) 方程

$$f''+(A(z)+\pi(z))f=0 \tag{3}$$

的任一非平凡解 h 只要满足 $\lambda_e(h)<\sigma(g_2)$, 则有 $h(z)$ 和 $h(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性相关;

(ii) 方程(3)的任意 2 个线性无关解 h_1,h_2 必有

$$\lambda_e(h_1h_2)\geqslant\sigma(g_2).$$

定理 B　设 $g(\zeta)$ 是级为正整数的超越整函数, $C(\zeta)$ 是不恒为 0 的整函数且满足 $\sigma(C)<\sigma(g)$. 设 $A(z)=B(\mathrm{e}^z)$, 其中

$$B(\zeta)=\sum_{j=0}^{p}b_{-j}\zeta^{-j}+g(\zeta),$$

p 是正奇数, 且 $\pi(z)=C(\mathrm{e}^z)$. 假设方程(2)有一非平凡解 f 满足 $\lambda(f)<+\infty$, 则方程(3)的任一非平凡解 h 满足 $\lambda(h)=+\infty$.

事实上, h 满足

$$\log N(r,h)\neq o(r).$$

本文将以上结果扩展到 $A(z)$ 的 e-型级为无穷的情况.

收稿日期: 2012-02-15
基金项目: 国家自然科学基金数学天元专项基金(11126144)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ12207)资助项目.
作者简介: 肖丽鹏(1979-), 女, 江西吉安人, 博士, 主要从事复分析研究.

定理 1 设 $B(\zeta)=g_1(1/\zeta)+g_2(\zeta), C(\zeta)=g_3(\zeta)$，其中 g_1,g_2,g_3 为整函数，

$$\sigma(g_2)=+\infty, \sigma_2(g_2)=\alpha<+\infty, \sigma(g_3)<+\infty.$$

假设 $A(z)=B(e^z)$, $\pi(z)=C(e^z)$．进一步，假设 f 为方程(2)的一非平凡解满足 $\lambda_e(f)<+\infty$，且 $f(z)$ 与 $f(z+2\pi i)$ 线性无关，则

(i) 方程(3)的任一非平凡解 h，只要满足 $\lambda_e(h)<+\infty$，则有 $h(z)$ 和 $h(z+2\pi i)$ 线性相关；

(ii) 方程(3)的任意 2 个线性无关解 $h_1(z), h_2(z)$ 必有

$$\lambda_e(h_1h_2)=+\infty.$$

定理 2 设 $g(\zeta)$ 为无穷级且 $\sigma_2(g)=\alpha<+\infty$ 的超越整函数，$C(\zeta)$ 是不恒为 0 的整函数且满足 $\sigma(C)<+\infty$．设 $A(z)=B(e^z)$，其中

$$B(\zeta)=\sum_{j=0}^{p}b_{-j}\zeta^{-j}+g(\zeta),$$

p 是正奇数，且 $\pi(z)=C(e^z)$．假设方程(2)有一非平凡解 f 满足 $\lambda(f)<+\infty$，则方程(3)的任一非平凡解 h 满足 $\lambda(h)=+\infty$．

事实上，h 满足

$$\log N(r,h)\neq o(r).$$

1 预备知识及引理

注1[8] 假设 f_1,f_2 为方程(2)的 2 个线性无关解，则 $E(z)=f_1f_2$ 满足微分方程

$$-4A(z)=\frac{c^2}{E^2(z)}-\left(\frac{E'(z)}{E(z)}\right)^2+2\frac{E''(z)}{E(z)}, \tag{4}$$

其中 $c\neq 0$ 是 f_1 与 f_2 的朗斯基行列式．

注 2 假设 $B(\zeta)$ 在 $0<|\zeta|<+\infty$ 内解析，则 $B(\zeta)=g_1(1/\zeta)+g_2(\zeta), g_1(\zeta)$ 与 $g_2(\zeta)$ 为整函数．设 $A(z)=B(e^z)=A_1(z)+A_2(z)$，其中

$$A_1(z)=g_1(e^{-z}),\ A_2(z)=g_2(e^z),$$

则

$$\sigma_e(A)=\max\{\sigma(g_1),\sigma(g_2)\},\quad \sigma_e(A_1)=\sigma(g_1),$$
$$\sigma_e(A_2)=\sigma(g_2),\quad \lambda_e(A)=\max\{\lambda_{eL}(A),\lambda_{eR}(A)\}.$$

因为 $B(\zeta)$ 在 $C^*=C\setminus\{z:|z|\leqslant 1\}$ 解析，则由 Valiron 理论[9]，

$$B(\zeta)=\zeta^nR(\zeta)b(\zeta),$$

其中 n 为整数．$R(\zeta)$ 在 $C^*\cup\{\infty\}$ 中解析，不恒为 0，$b(\zeta)$ 为一整函数，则

$$\sigma(g_2)=\sigma(b),\ \lambda_{eR}(A)=\lambda(b),$$
$$T_1(\rho,B)=T(\rho,b),\quad T_1(\rho,1/B)=T_1(\rho,B).$$

引理 1 设 $F(r)$ 和 $G(r)$ 是 $(0,\infty)$ 中的非减函数，如果 (i) $F(r)<G(r)$ n.e.；或 (ii) 当 $r\notin H\cup(0,1]$ 时，$F(r)\leqslant G(r)$，其中 $H\subset(1,\infty)$ 是一对数测度为有限的集合，则对任给常数 $\alpha>1$, $\exists\, r_0>0$，当 $r>r_0$ 时，有 $F(r)\leqslant G(\alpha r)$，其中 n.e. 表示至多除一线测度为有限集外．

引理 2[10] 设 $f(z)$ 是无穷级整函数，其超级 $\sigma_2(f)=\alpha<+\infty$，则 $f(z)$ 有表示 $f(z)=U(z)e^{V(z)}$，其中 $U(z),V(z)$ 是整函数，满足

$$\lambda(f)=\lambda(U)=\sigma(U),\quad \lambda_2(f)=\lambda_2(U)=\sigma_2(U),$$
$$\sigma_2(f)=\max\{\sigma_2(U),\sigma_2(e^V)\}.$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 (i) 假设 f 是方程(2)的一非平凡解，满足 $\lambda_e(f)<+\infty$ 及 $f(z)$ 和 $f(z+2\pi i)$ 线性无关，则由文献[11]中定理 1 知 $f(z)$ 和 $f(z+4\pi i)$ 线性相关．令 $E(z)=f(z)f(z+2\pi i)$，则 $E(z+2\pi i)=c_1E(z)$，其中 c_1 为一非零常数．显然，$E'/E, E''/E$ 是周期为 $2\pi i$ 的周期函数，$A(z)$ 据定义为周期函数，由(4)式知 $E^2(z)$ 是周期为 $2\pi i$ 的周期函数．因此有 $E^2(z)=\Phi(e^z)$，其中 $\Phi(\zeta)$ 在 $0<|\zeta|<+\infty$ 中解析．将此式及 $\zeta=e^z$ 代入(4)式得

$$-4B(\zeta)=\frac{c^2}{\Phi}+\zeta\frac{\Phi'}{\Phi}-\frac{3}{4}\zeta^2\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2+\zeta^2\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{5}$$

因为 $B(\zeta)$ 和 $\Phi(\zeta)$ 在 C^* 中解析，由 Valiron 理论，它们可表示为

$$B(\zeta)=\zeta^nR(\zeta)b(\zeta),\ \Phi(\zeta)=\zeta^{n_1}K_1(\zeta)\phi(\zeta), \tag{6}$$

其中 n,n_1 为整数，$R(\zeta)$ 和 $K_1(\zeta)$ 在 $C^*\cup\{\infty\}$ 中解析，不恒为 0，$b(\zeta)$ 和 $\phi(\zeta)$ 为整函数．由(5)式可得

$$m_1(\rho,1/\Phi)=m_1(\rho,B)+o(T(\rho,\phi))\quad \text{n.e.}, \tag{7}$$

由 $N_1(\rho,B)=0$，(7)式可写为

$$T_1(\rho,1/\Phi)=N_1(\rho,1/\Phi)+T_1(\rho,B)+o(T(\rho,\phi))\quad \text{n.e.},$$

由注 2 及 $N_1(\rho,1/\Phi)=N(\rho,1/\phi)$ 可得

$$T(\rho,\phi)=N(\rho,1/\phi)+T(\rho,b)+o(T(\rho,\phi))\quad \text{n.e.}, \tag{8}$$

容易看出 $\lambda_e(f)=\lambda_e(E)=\lambda_e(E^2)$. 由 $\lambda_e(f)<+\infty$, 有

$$\lambda_{eR}(E^2)\leqslant\lambda_e(E^2)<\infty.$$

由注 2 得 $\lambda(\phi)=\lambda_{eR}(E^2)$. 但 $\sigma(g_2)=\sigma(b)=+\infty$, 所以由(8)式和引理 1 得

$$\sigma(\phi)=+\infty,\ \sigma_2(\phi)=\sigma_2(b)=\sigma_2(g_2)=\alpha.$$

由引理 2 有 $\phi(\zeta)=U_1\mathrm{e}^{V_1}$，其中

$$\sigma(U_1)=\lambda(\phi)<+\infty,\quad \sigma_2(\phi)=\sigma_2(\mathrm{e}^{V_1})=\sigma(V_1)=\alpha<+\infty.$$

现在假设方程(3)有一非平凡解 $h(z)$ 满足 $\lambda_e(h)<+\infty$, 但 $h(z)$ 与 $h(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性无关.

令 $F(z)=h(z)h(z+2\pi\mathrm{i})$. 用类似上面 $E(z)$ 的推导方法可得, $F^2(z)=\Psi(\mathrm{e}^z),\Psi(\zeta)$ 在 $0<|\zeta|<+\infty$ 内解析, 同样 $\Psi(\zeta)$ 在 C^* 中可表示为

$$\Psi(\zeta)=\zeta^{n_2}K_2(\zeta)\psi(\zeta),n_2\text{是整数},$$

$K_2(\zeta)$ 在 $C^*\cup\{\infty\}$ 中解析，不恒为 0，$\psi(\zeta)$ 是 C 中的整函数. 将 $F^2(z)=\Psi(\mathrm{e}^z),\zeta=\mathrm{e}^z$ 代入(4)式，其中 $A(z)$ 用 $A(z)+\pi(z)$ 代替，得

$$-4\big(B(\zeta)+C(\zeta)\big)=\frac{c_1^2}{\Psi}+\zeta\frac{\Psi'}{\Psi}-\frac{3}{4}\zeta^2\left(\frac{\Psi'}{\Psi}\right)^2+\zeta^2\frac{\Psi''}{\Psi},\tag{9}$$

其中 $c_1(\neq 0)$ 是 $h(z)$ 与 $h(z+2\pi\mathrm{i})$ 的朗斯基行列式. 同样，$\lambda(\psi)=\lambda_{eR}(F^2)\leqslant\lambda_{eR}(h)<+\infty$. 且像(5)式导出(8)式一样，由(9)式可得

$$T(\rho,\psi)=N(\rho,1/\psi)+T(\rho,d)+o(T(\rho,\psi))\quad\text{n.e.},\tag{10}$$

其中的 $d(\zeta)$ 是整函数，满足

$$B(\zeta)+C(\zeta)=\zeta^{n_3}R_d(\zeta)d(\zeta),$$

函数 $R_d(\zeta)$ 与 $d(\zeta)$ 的性质同(6)式. 容易看出 $\sigma(d)=\sigma(b)=+\infty$. 由(10)式可得

$$\sigma(\psi)=\infty,\quad \sigma_2(\psi)=\sigma_2(d)=\sigma_2(b)=\alpha.$$

用类似于 $\phi(\zeta)$ 的推导方法，有 $\psi(\zeta)=U_2\mathrm{e}^{V_2}$, 其中 $\sigma(U_2)=\lambda(\psi)<+\infty,\quad \sigma_2(\psi)=\sigma_2(\mathrm{e}^{V_2})=\sigma(V_2)=\alpha<+\infty$.

令 $\Phi(\zeta)=R_1\mathrm{e}^{V_1}$, $\Psi(\zeta)=R_2\mathrm{e}^{V_2}$，其中

$$R_1=\zeta^{n_1}K_1(\zeta)U_1(\zeta),\ R_2=\zeta^{n_2}K_2(\zeta)U_2(\zeta),$$
$$\max\{\sigma_1(R_1),\ \sigma_1(R_2)\}<+\infty.$$

将它们分别代入(5)式和(9)式，可得

$$-4B(\zeta)=\frac{c^2}{R_1\mathrm{e}^{V_1}}+\zeta\left(\frac{R_1'}{R_1}+V_1'\right)-\frac{3}{4}\zeta^2\left(\left(\frac{R_1'}{R_1}\right)^2+2\frac{R_1'}{R_1}V_1'+V_1'^2\right)+\zeta^2\left(\frac{R_1''}{R_1}+2\frac{R_1'}{R_1}V_1'+V_1'^2+V_1''\right),\tag{11}$$

$$-4(B(\zeta)+C(\zeta))=\frac{c_1^2}{R_2\mathrm{e}^{V_2}}+\zeta\left(\frac{R_2'}{R_2}+V_2'\right)-\frac{3}{4}\zeta^2\left(\left(\frac{R_2'}{R_2}\right)^2+2\frac{R_2'}{R_2}V_2'+V_2'^2\right)+\zeta^2\left(\frac{R_2''}{R_2}+2\frac{R_2'}{R_2}V_2'+V_2'^2+V_2''\right).\tag{12}$$

(11)式减(12)式得

$$4C(\zeta)=\frac{c^2}{R_1\mathrm{e}^{V_1}}-\frac{c_1^2}{R_2\mathrm{e}^{V_2}}+H(\zeta),\tag{13}$$

其中的 $H(\zeta)$ 是 C^* 中的亚纯函数.

事实上，$H(\zeta)$ 是关于 $R_1'/R_1,R_2'/R_2,V_1',V_2'$ 及它们导数的微分多项式. 由 R_1,R_2,V_1,V_2 的定义可得 $\sigma_1(H)<+\infty$. 把(13)式改写成

$$\mathrm{e}^{-V_1}+H_1\mathrm{e}^{-V_2}=H_2,\tag{14}$$

其中 H_1,H_2 是 C^* 中亚纯函数满足

$$\max\{\sigma_1(H_1),\ \sigma_1(H_2)\}<+\infty, H_1=c_1^2R_1/(c^2R_2)\text{ 不恒为 }0.$$

(14)式两边求导得

$$\mathrm{e}^{-V_1}+\frac{H_1V_2'-H_1'}{V_1'}\mathrm{e}^{-V_2}=-\frac{H_2'}{V_1'}.\tag{15}$$

由(14)、(15)式消去 e^{-V_1},得

$$H_3\mathrm{e}^{-V_2}=H_4,\tag{16}$$

其中 $H_3=H_1'+(V_1'-V_2')H_1,H_4$ 是 C^* 中的亚纯函数，满足 $\max\{\sigma_1(H_3),\sigma_1(H_4)\}<+\infty$. 基于级的比较，(16)式意味着 $H_3\equiv 0$，即 $H_1=c_2\mathrm{e}^{V_2-V_1}$，其中 c_2 是非零常数. 但 $\sigma_1(H_1)<+\infty$，故 $V_2-V_1=P$, 其中 P 是多项式. 注意到 $\sigma_1(R_2\mathrm{e}^P)<+\infty$，若将 e^P 归并到 R_2 中，则可认为 $V_1\equiv V_2$. 于是 $R_1=c_3R_2,R_1'/R_1=R_2'/R_2,c_3$ 是一非零常数. 从而，由(11)式减(12)式得

$$4C(\zeta)=\frac{1}{R_2\mathrm{e}^{V_1}}\left(\frac{c^2}{c_3}-c_1^2\right).$$

这表明 $C(\zeta)\equiv 0$ 或 $\sigma(C(\zeta))=+\infty$, 与 $C(\zeta)$ 不恒为 0 和 $\sigma(C)<+\infty$ 的假设矛盾，因此 $h(z)$ 与 $h(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性相关.

(ii)假设方程(3)的任意 2 个线性无关解 h_1,h_2 满足 $\lambda_e(h_1h_2)<+\infty$. 由(i)知 $h_j(z),h_j(z+2\pi\mathrm{i})$ $(j=1,2)$ 线性相关. 令

$$E(z)=f(z)f(z+2\pi\mathrm{i}),F(z)=h_1(z)h_2(z),$$

则 $F(z+2\pi\mathrm{i})=c_4F(z),c_4$ 为非零常数. 用类似于(i)中对 $E(z),F(z)$ 的推导，可得 $C(\zeta)\equiv 0$ 或 $\sigma(C(\zeta))=+\infty$, 与假设矛盾. 因此 $\lambda_e(h_1h_2)=+\infty$. 定理 1 证毕.

定理 2 的证明 假设方程(2)有一非平凡解 f 满足 $\lambda(f)<+\infty$, 从而 $\lambda_e(f)=0$, 由文献[12]中引理 6 可知 $f(z), f(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性无关, 这就满足定理 1 的条件. 假设方程(3)有一非平凡解 h 满足 $\lambda_e(h)=0$, 由定理 1(i)可知, $h(z)$ 与 $h(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性相关. 另一方面, 由文献[12]中引理 6 可知 $h(z)$ 与 $h(z+2\pi\mathrm{i})$ 线性无关, 这是一个矛盾, 因此

$$\log N(r,h)\neq o(r).$$

定理 2 证毕.

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1975.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] Yang Le. Value distribution theory and it's new researches [M]. Beijing: Beijing Science Press, 1982.

[4] Chiang Yikman, Gao Shian. On a problem in complex oscillation theory of periodic second order linear differential equations and some related perturbation results [J]. Ann Acad Sci Fenn, 2002, 27: 273-390.

[5] Bank S, Laine I, Langley J. Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain [J]. Results in Math, 1989, 16: 3-15.

[6] 高仕安, 陈特为. 复振荡理论中的一个扰动问题 [J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2003(3): 25- 28.

[7] 陈特为. 复振荡扰动问题的一个进一步结果 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(1): 1-3.

[8] 高仕安, 陈宗煊, 陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998.

[9] Valiron G. Lecture on the general theory of integral functions [M]. New York: Chelsea, 1975.

[10] Jank G, Volkmann L. Meromorphe function and differential gleichungen [M]. Birkähuser: Grobe Reihe, 1985.

[11] Bank S B, Langley J. Oscillation theorems for higher order linear differential equations with entire periodic coefficients [J]. Comment Math Uni St Paul, 1992, 41: 65-85.

[12] Gao Shian. A further result on the complex oscillation theory of periodic second order linear differential equations [J].Proc Edinburgh Math Soc, 1990, 33: 143-158.

One Perturbation Problem in Periodic Differential Equations

XIAO Li-peng[1], CHENG Yun[2]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. College of Mathematics and Informatics, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi 330063, China)

Abstract: The perturbation problem of periodic second order differential equation is investigated by using value distribution theory and some perturbation results are obtained for equation with periodic entire coefficients of infinite e-type order. The results of the results due to Chiang Yik-Man and Gao Shi-An are generalized.

Key words: periodic differential equation; linearly independent; perturbation

(责任编辑: 王金莲)