文章编号: 1000-5862(2012)04-0335-04

一类高阶微分方程解的增长性

冯　斌, 刘慧芳*, 李延玲

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 研究了微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_2f''+A_1e^{az^n}f'+A_0e^{bz^n}f=F$ 解的增长性,其中 $A_0(z)$、$A_1(z)$、$F(z)$ 是级小于 n 的整函数, $A_j(z)$ $(j=2,3,\cdots,k-1)$ 是次数不超过 m 的多项式, a、b 为非零复常数. 证明了该方程的所有解 $f(z)$ 满足 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$, $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n$, 至多除去 2 个例外复数 b.

关键词: 微分方程; 增长级; 零点收敛指数; 超级
中图分类号: O 174.52　　　文献标志码: A

0　引言及主要结果

本文使用值分布论的标准记号[1-3], 并用 $\sigma(f)$、$\lambda(f)$、$\overline{\lambda}(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级、零点收敛指数与不同零点收敛指数, $\sigma_2(f)$、$\lambda_2(f)$、$\overline{\lambda}_2(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的超级、2 级零点收敛指数与 2 级不同零点收敛指数[4].

1996 年, Ki-Ho Kwon 在文献[5]中研究了下面一类方程解的超级问题, 得到

定理 A　设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是非常数多项式且 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, $Q(z)=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0$, 其中 a_i、b_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 是复常数, $a_nb_n\neq 0$, 设 $h_1(z)$ 与 $h_2(z)$ $(\not\equiv 0)$是整函数, 并满足 $\sigma(h_1)<\deg P$, $\sigma(h_2)<\deg Q$, 如果 $\arg a_n\neq\arg b_n$ 或 $a_n=cb_n(0<c<1)$, 则方程

$$f''+h_1e^{P(z)}f'+h_2e^{Q(z)}f=0 \qquad (1)$$

的每个非常数解 f 具有无穷级且 $\sigma_2(f)\geqslant n$.

1999 年, 陈宗煊[6]在 Ki-Ho Kwon 的基础上更深入地研究了此类齐次 2 阶微分方程, 并得到

定理 B　设 $P(z)$、$Q(z)$、$h_1(z)$ 和 $h_2(z)$ $(\not\equiv 0)$ 满足定理 A 中的条件, $a_nb_n\neq 0$, 如果 $\arg a_n\neq\arg b_n$ 或 $a_n=cb_n(0<c<1)$, 且方程(1)的每个非常数解 f 满足 $\lambda(f)<+\infty$, 那么 $\sigma_2(f)=n$.

本文在前人的基础上将 2 阶推广至高阶, 并得到了如下结果.

定理 1　假设 $A_0(z)$、$A_1(z)$、$F(z)$ 是级小于 n $(n\geqslant 2)$ 的整函数, $A_j(z)$ $(j=2,3,\cdots,k-1)$ 为次数不超过 m $(m<n-1)$ 的多项式, a、b 是复常数满足 $ab\neq 0$ 且 $a=cb(0<c<1)$, 则方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_2f''+A_1e^{az^n}f'+A_0e^{bz^n}f=F \qquad (2)$$

的每个非零解 f 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty,$$
$$\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n,$$

至多除去 2 个例外复数 b.

1　引理

引理 1[6]　设 $g(z)$为亚纯函数, $\sigma(g)=\beta<+\infty$, 那么 $\forall\varepsilon>0$, 存在对数测度有限的集合 $E_1\subset(0,\infty)$, 使得当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 且 r 充分大时, 有

$$\exp\{-r^{\beta+\varepsilon}\}\leqslant|g(z)|\leqslant\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}.$$

引理 2[6-8]　假设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^n+\cdots(\alpha$、$\beta$ 是实数, $|\alpha|+|\beta|\neq 0)$ 是多项式且次数 $n\geq 1$, $A(z)$ $(\not\equiv 0)$ 是整函数且 $\sigma(A)<n$. 令 $g(z)=A(z)e^{P(z)}$, $z=re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta)=\alpha\cos n\theta-\beta\sin n\theta$, 那么 $\forall\varepsilon>0$, 存在集合

收稿日期: 2012-03-05
基金项目: 国家青年基金(11201195), 国家自然科学基金(11171119)和江西省教育厅科技(GJJ12179)资助项目.
作者简介: 刘慧芳(1973-), 女, 江西丰城人, 副教授, 博士, 主要从事复分析的研究.

$H_1 \subset [0,2\pi)$，其线测度为 0，满足 $\forall\ \theta \in [0,2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$，$\exists\ R>0$，使得对 $|z| = r > R$，有

(i) 如果 $\delta(P,\theta) > 0$，那么

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\} \leqslant \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\};$$

(ii) 如果 $\delta(P,\theta) < 0$，那么

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\} \leqslant \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\},$$

其中 $H_2 = \left\{\theta \in [0,2\pi) \middle| \delta(P,\theta) = 0\right\}$.

引理 3[9]　假设 $f(z)$ 是整函数且 $\sigma(f) = \infty$ 和 $\sigma_2(f) = \alpha < +\infty$，又设集合 $E_2 \subset (1,\infty)$ 有有限对数测度，则存在点列 $\left\{z_u = r_u e^{i\theta_u}\right\}$，满足 $|f(z_u)| = M(r_u, f)$，$\theta_u \in [0,2\pi)$，$\lim\limits_{u\to\infty} \theta_u = \theta_0 \in [0,2\pi)$，$r_u \notin E_2$，$r_u \to \infty$ 和 $\forall\ \varepsilon > 0$ 及充分大的 r_u，有

$$\varlimsup_{u\to\infty} \log v(r_u)/\log r_u = \infty,$$

$$\exp\left\{r_u^{\alpha-\varepsilon}\right\} < v(r_u) < \exp\left\{r_u^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{3}$$

其中 $v(r)$ 为 $f(z)$ 的中心指标.

注 1　类似于引理 3 的证明方法，可得当 $\sigma(f) = \sigma < \infty$ 时，存在点列 $\left\{z_u = r_u e^{i\theta_u}\right\}$，满足 $|f(z_u)| = M(r_u, f)$，$\theta_u \in [0,2\pi)$，$\lim\limits_{u\to\infty} \theta_u = \theta_0 \in [0,2\pi)$，$r_u \notin E_2$，$r_u \to \infty$ 和 $\forall\ \varepsilon > 0$ 及充分大的 r_u，有

$$\varlimsup_{u\to\infty} \log v(r_u)/\log r_u = \sigma,$$

$$r_u^{\sigma-\varepsilon} < v(r_u) < r_u^{\sigma+\varepsilon}. \tag{4}$$

引理 4　设 $f(z)$、$F(z)$ ($\not\equiv 0$) 是整函数，且 $\sigma(F) < \sigma(f)$，则

$$\lim_{r_u\to\infty} \left|F(z_u)/f(z_u)\right| = 0. \tag{5}$$

证　只讨论 $\sigma(f) < \infty$ 的情形，对 $\sigma(f) = \infty$ 的情形可以类似证明. 由引理 1，$\forall \varepsilon$ ($0 < 2\varepsilon < \sigma(f) - \sigma(F)$)，存在集合 $E \subset (0,\infty)$，对数测度为有限，使得当 $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ 且 r 充分大时，有

$$|F(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}. \tag{6}$$

根据文献[3, p26]的推论，$\forall \varepsilon'$ $(0 < \varepsilon' < 1)$，有

$$\mu(r,f) \leqslant M(r,f),\ \ v_f(r) < \left[\log \mu(r)\right]^{1+\varepsilon'}.$$

再结合引理 3 的注 1，存在点列 $\left\{z_u = r_u e^{i\theta_u}\right\}$，满足 $|f(z_u)| = M(r_u, f)$，$\theta_u \in [0,2\pi)$，$\lim\limits_{u\to\infty} \theta_u = \theta_0 \in [0,2\pi)$，$r_u \notin E$，$r_u \to \infty$，且对充分大的 r_u，有

$$M(r_u, f) > \exp\left\{r_u^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}. \tag{7}$$

由(6)~(7)式可得

$$\left|\frac{F(z_u)}{f(z_u)}\right| \leqslant \frac{\exp\left\{r_u^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r_u^{\sigma(f)-\varepsilon}\right\}} \to 0.$$

引理 5[2,10]　设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, F \not\equiv 0$ 是有穷级整函数，则方程

$$f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + a_{k-2} f^{(k-2)} + \cdots + a_0 f = F$$

的所有无穷级解满足

(i) $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty$;

(ii) $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leqslant \max\left\{\sigma(a_j) \middle| j = 0,1,\cdots,k-1\right\}$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　设 f ($\not\equiv 0$) 为方程(2)的解，分 2 步证明 $\sigma(f) = \infty$.

第 1 步　证明方程(2)不可能存在级小于 n 的整函数解. 假设 $\sigma(f) = \sigma_1 < n$. 由引理 1，$\forall \varepsilon > 0$，存在对数测度为有限集合 E_1，使得当 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ 且 $r \to \infty$ 时，有

$$\exp\left\{-r^{\sigma_1+\varepsilon}\right\} \leqslant \left|f^{(j)}(z)\right| \leqslant \exp\left\{r^{\sigma_1+\varepsilon}\right\}\ (j = 1,2,\cdots,k),$$

$$\exp\left\{-r^{\sigma(A_j)+\varepsilon}\right\} \leqslant \left|A_j(z)\right| \leqslant \exp\left\{r^{\sigma(A_j)+\varepsilon}\right\}\ (j = 0,1), \tag{8}$$

$$\exp\left\{-r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\} \leqslant |F(z)| \leqslant \exp\left\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}.$$

又由引理 2，存在一射线 $\arg z = \theta_0 \setminus (H_1 \cup H_2)$ 使得 $\delta(az^n, \theta_0) = c\delta(bz^n, \theta_0) > 0$，且对充分大的 r，有

$$\left|A_0\left(re^{i\theta_0}\right) f\left(re^{i\theta_0}\right) e^{br^n e^{in\theta_0}}\right| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta\left(bz^n, \theta_0\right) r^n\right\}, \tag{9}$$

$$\left|A_1\left(re^{i\theta_0}\right) f'\left(re^{i\theta_0}\right) e^{ar^n e^{in\theta_0}}\right| \leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)\delta\left(az^n, \theta_0\right) r^n\right\}, \tag{10}$$

其中 H_1 如引理 2 所设，$H_2 = \left\{\theta \in [0,2\pi) \middle| \delta\left(bz^n, \theta\right) = 0\right\}$.

由方程(2)和(8)~(10)式得, 对所有满足$|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$和$z=re^{i\theta_0}$的z, 当r充分大时, 有

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta\left(bz^n,\theta_0\right)r^n\right\}\leqslant\left|A_0\left(re^{i\theta_0}\right)f\left(re^{i\theta_0}\right)e^{br^n e^{in\theta_0}}\right|\leqslant$$
$$\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta_0}\right)\right|+\sum_{j=2}^{k-1}\left|A_j\left(re^{i\theta_0}\right)f^{(j)}\left(re^{i\theta_0}\right)\right|+$$
$$\left|A_1\left(re^{i\theta_0}\right)f'\left(re^{i\theta_0}\right)e^{ar^n e^{in\theta_0}}\right|+\left|F\left(re^{i\theta_0}\right)\right|\leqslant$$
$$\exp\left\{r^{\sigma_1+\varepsilon}\right\}+(k-2)r^{m+\varepsilon}\exp\left\{r^{\sigma_1+\varepsilon}\right\}+$$
$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\delta\left(az^n,\theta_0\right)r^n\right\}+\exp\left\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}.$$

令$\sigma_2=\max\left\{\sigma(F),\sigma_1\right\}<n$, 并取$0<2\varepsilon<(1-c)/(1+c)$, 则有

$$\exp\left\{\left[(1-\varepsilon)-c(1+\varepsilon)\right]\delta\left(bz^n,\theta_0\right)r^n\right\}\leqslant$$
$$(k+1)\exp\left\{r^{\sigma_2+\varepsilon}\right\}r^{m+\varepsilon},$$

这是一个矛盾. 故$\sigma(f)\geqslant n$.

第 2 步　证明方程(2)的每个非零解f具有无穷级. 由第 1 步的结论知$\sigma(f)\geqslant n$. 假设$\sigma(f)=\sigma<+\infty$, 由 Wiman-Valiron 理论, 存在一对数测度为有限的集合$E_2\subset(1,\infty)$, 使得对所有满足

$$|f(z)|=M(r,f)$$

和

$$|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$$

的z, 有

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{v(r)}{z}\right)^j(1+o(1))\ (j=1,2,\cdots,k).\tag{11}$$

又由引理 3 和引理 4 可知, 存在点列$\left\{z_u=r_u e^{i\theta_u}\right\}$满足$\left|f(z_u)\right|=M(r_u,f)$, $\theta_u\in[0,2\pi)$, $\lim\limits_{u\to\infty}\theta_u=\theta_0\in[0,2\pi)$, $r_u\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$, $r_u\to\infty$, 且对充分大的r_u, 有(4)~(5)式成立.

令$b=r_b e^{i\phi}$, 对上述θ_0, 选取复数b, 使得$\phi\neq\theta_0\pm\pi/2$, 则

$$\delta\left(bz^n,\theta_0\right)=|b|\cos(\phi+n\theta_0)=\delta\neq0.$$

下面分情况讨论.

情形**(i)**　$\delta>0$. 由于$\lim\limits_{u\to\infty}\theta_u=\theta_0$, 则当$u$充分大时, 有$\delta\left(bz^n,\theta_u\right)=\delta_u>0$. 从而

$$\delta\left(bz^n-az^n,\theta_u\right)=(1-c)\delta_u>0,$$
$$\delta\left(-az^n,\theta_u\right)=-c\delta_u<0.$$

由方程(2)得

$$-A_0e^{bz^n-az^n}=e^{-az^n}\frac{f^{(k)}}{f}+\sum_{j=2}^{k-1}A_je^{-az^n}\frac{f^{(j)}}{f}+A_1\frac{f'}{f}-\frac{F}{f}e^{-az^n}.\tag{12}$$

将(4)~(5)式, (8)式, (11)式代入(12)式并结合引理 2, 有

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(1-c)\delta_u r_u^{\ n}\right\}\leqslant\left|-A_0(z_u)e^{bz_u^{\ n}-az_u^{\ n}}\right|\leqslant$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(-c\delta_u)r_u^{\ n}\right\}\cdot$$
$$\left\{\left(\frac{v(r_u)}{r_u}\right)^k(1+o(1))+\sum_{j=2}^{k-1}r_u^{\ m+\varepsilon}\left(\frac{v(r_u)}{r_u}\right)^j(1+o(1))\right\}+$$
$$\exp\left\{r_u^{\ \sigma(A_1)+\varepsilon}\right\}\frac{v(r_u)}{r_u}(1+o(1))+o(1)\leqslant$$
$$2kr_u^{\ k(\sigma+\varepsilon-1)}\exp\left\{r_u^{\ \sigma(A_1)+\varepsilon}\right\}+o(1).\tag{13}$$

由于$\sigma(A_1)<n$, 可见(13)式不成立.

情形**(ii)**　$\delta<0$. 由于$\lim\limits_{u\to\infty}\theta_u=\theta_0$, 则当$u$充分大时, 有$\delta\left(bz^n,\theta_u\right)=\delta_u<0$. 从而$\delta\left(az^n,\theta_u\right)=c\delta_u<0$.

由方程(2)得

$$-\frac{f^{(k)}}{f}=\sum_{j=2}^{k-1}A_j\frac{f^{(j)}}{f}+A_1e^{az^n}\frac{f'}{f}+A_0e^{bz^n}-\frac{F}{f}.\tag{14}$$

将(5)~(6)式代入(14)式并结合引理 2, 有

$$\left(\frac{v(r_u)}{r_u}\right)^k(1+o(1))=\left|\frac{f^{(k)}(z_u)}{f(z_u)}\right|\leqslant$$
$$(k-2)\left(\frac{v(r_u)}{r_u}\right)^{k-1}(1+o(1))r_u^{\ m+\varepsilon}+$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)c\delta_u r_u^{\ n}\right\}\frac{v(r_u)}{r_u}(1+o(1))+$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_u r_u^{\ n}\right\}+o(1)\leqslant$$
$$2k\left(\frac{v(r_u)}{r_u}\right)^{k-1}r_u^{\ m+\varepsilon},$$

即有

$$v(r_u)\leqslant4kr_u^{\ m+1+\varepsilon}.\tag{15}$$

取$0<\varepsilon<\left(\sigma-(m+1)\right)/2$, 则(15)式与(4)式矛盾, 故(15)式不成立 .

综合第 1 步和第 2 步并结合引理 5 即得方程(2)

的每个非零解 f 满足 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$，至多除去 2 个例外复数 b .

下面证明方程(2)的无穷级解 f 满足

$$\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n .$$

由引理 5 可得

$$\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=$$
$$\sigma_2(f)\leqslant \max\left\{\sigma(A_{k-1}),\cdots,\sigma(A_2),\sigma\left(A_1\mathrm{e}^{az^n}\right),\sigma\left(A_0\mathrm{e}^{bz^n}\right)\right\}=n.$$

断言 $\sigma_2(f)=n$. 否则，设 $\sigma_2(f)=\alpha<n$.

由 Wiman-Valiron 理论，存在一对数测度为有限的集合 $E_2\subset(1,\infty)$ ，使得对所有满足 $|f(z)|=M(r,f)$ 和 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 的 z，有(11)式成立，又根据引理 3 和引理 4 可知，$\exists\left\{z_u=r_u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_u}\right\}$ 使得 $|f(z_u)|=M(r_u,f)$ ，$\theta_u\in[0,2\pi)$，$\lim\limits_{u\to\infty}\theta_u=\theta_0\in[0,2\pi)$ ，$r_u\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$ ，$r_u\to\infty$，且对充分大的 r_u，有(3)和(5)式成立.

对上述 θ_0，由第 2 步复数 b 的选取，可知 $\delta\left(bz^n,\theta_0\right)=\delta\neq 0$. 下面分情况讨论.

情形**(i)** $\delta>0$. 由于 $\lim\limits_{u\to\infty}\theta_u=\theta_0$ ，则当 u 充分大时，有 $\delta\left(bz^n,\theta_u\right)=\delta_u>0$. 从而 $\delta\left(az^n,\theta_u\right)=c\delta_u>0$. 由方程(2)得

$$-A_0\mathrm{e}^{bz^n}=\frac{f^{(k)}}{f}+\sum_{j=2}^{k-1}A_j\frac{f^{(j)}}{f}+A_1\mathrm{e}^{az^n}\frac{f'}{f}-\frac{F}{f}. \tag{16}$$

将(3), (5)和(11)式代入(16)式中并结合引理 2，有

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_u r_u{}^n\right\}\leqslant\left|-A_0(z_u)\mathrm{e}^{bz_u{}^n}\right|\leqslant$$
$$\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)^k(1+o(1))+\sum_{j=2}^{k-1}\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)^j(1+o(1))r_u{}^{m+\varepsilon}+$$
$$\exp\left\{(1+\varepsilon)c\delta_u r_u{}^n\right\}\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)(1+o(1))+o(1)\leqslant$$
$$(2k+1)\exp\left\{(1+\varepsilon)c\delta_k r_u{}^n\right\}\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)^k r_u{}^{m+\varepsilon},$$

即

$$\exp\left\{\left[(1-\varepsilon)-c(1+\varepsilon)\right]\delta_u r_u{}^n\right\}\leqslant$$
$$(2k+1)\exp\left\{kr_u{}^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_u{}^{m+\varepsilon}. \tag{17}$$

取 $0<2\varepsilon<(1-c)/(1+c)$ ，则(17)式不成立.

情形**(ii)** $\delta<0$. 由于 $\lim\limits_{u\to\infty}\theta_u=\theta_0$ ，则当 u 充分大时，有 $\delta\left(bz^n,\theta_u\right)=\delta_u<0$. 从而 $\delta\left(az^n,\theta_u\right)=c\delta_u<0$.

将(5)和(11)式代入(14)式并结合引理 2，有

$$\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)^k(1+o(1))=\left|\frac{f^{(k)}(z_u)}{f(z_u)}\right|\leqslant$$
$$(k-2)\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)^{k-1}(1+o(1))r_u{}^{m+\varepsilon}+$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)c\delta_u r_u{}^n\right\}\frac{\nu(r_u)}{r_u}(1+o(1))+$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_u r_u{}^n\right\}+o(1)\leqslant 2k\left(\frac{\nu(r_u)}{r_u}\right)^{k-1}r_u{}^{m+\varepsilon},$$

即有

$$\nu(r_u)\leqslant 4kr_u{}^{m+1+\varepsilon}.$$

这与(3)式矛盾.

故 $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n$.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 高仕安, 陈宗煊, 陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998.

[3] 何育赞, 萧修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] Ki-Ho Kwon. Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations [J]. Kodai Math J, 1996, 19: 378-387.

[6] 陈宗煊.一类2阶整函数系数微分方程的增长性 [J]. 数学年刊, 1999, 20A(1): 7-14.

[7] 毛志强. 某类 2 阶微分方程解的增长级与零点 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(4): 334-338.

[8] 涂金, 陈宗煊, 曹廷彬, 等. 某类高阶微分方程解的复振荡 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(1): 8-11.

[9] 陈宗煊. 关于微分方程 $f''+\mathrm{e}^{-z}f'+Q(z)f=0$ 解的增长性 [J]. 中国科学: A 辑, 2001, 9: 775-784.

[10] 刘永, 陈宗煊. 一类高阶微分方程的复振荡 [J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 11(1): 14-19.

(下转第 354 页)