文章编号: 1000-5862(2012)04-0347-03

非线性广义系统的局部输入-状态稳定性

马合保, 贤　锋

(闽江学院数学系, 福建 福州 350108)

摘要: 利用 LISS-Lyapunov 函数研究非线性广义系统的局部输入-状态稳定性问题. 根据局部输入-状态稳定性要求初始状态和输入在一定范围内变化, 给出非线性广义系统的相应定义, 得到非线性广义系统局部输入-状态稳定(LISS)的 1 个充分条件.

关键词: 非线性广义系统; 局部输入-状态稳定性; LISS-Lyapunov 函数

中图分类号: O 231　　文献标志码: A

0　引言

在非线性控制系统的分析与综合研究中, 输入-状态稳定性是一个重要问题. 由于输入-状态稳定定性在实际系统中的重要应用, 自 20 世纪 80 年代 E.D.Sontag 提出了这种稳定性概念以来一直就受到人们的重视并取得了丰富的研究成果. 文献[1] 提出了局部输入-状态稳定性概念, 区别于全局输入-状态稳定性中初始状态和输入可以任意大, 局部输入-状态稳定性要求初始状态和输入在一定范围内变化. 由于多数实际系统不是全局输入-状态稳定的, 因而局部输入-状态稳定性的重要性和应用性是显然的[2-4]. 在实际问题中有着广泛应用的广义系统, 由于其结构复杂, 与正常系统相比, 广义线性的理论体系已初步形成, 但非线性广义系统有许多问题尚待研究[5-8].

本文研究非线性广义系统的局部输入-状态稳定性问题. 局部输入-状态稳定性要求初始状态和输入在一定范围内变化, 类似于正常非线性系统的局部输入-状态稳定性概念, 给出非线性广义系统的相应定义, 基于LISS-Lyapunov函数得到非线性广义系统局部输入-状态稳定的 1 个充分条件.

1　预备知识

引理 **1**　对于标量微分方程

$$\dot{u}=f(t,u),\quad u(t_0)=u_0,$$

其中 $\forall t\geqslant 0$, $\forall u\in J\subset\mathbf{R}$, $f(t,u)$ 是 t 的连续函数, 以及对 u 满足局部 Lipschitz 条件, 解 $u(t)$ 存在的最大区间为 $[t_0,T)$ (T 可取 $+\infty$), $\forall t\in[t_0,T)$, 有 $u(t)\in J$. 如果可微函数 $v(t)$, $\forall t\in[t_0,T)$, $v(t)\in J$, 使得

$$\dot{v}(t)\leqslant f(t,v(t)),\quad v(t_0)\leqslant u_0,$$

则 $v(t)\leqslant u(t)$, $t\in[t_0,T)$.

设连续函数 $\gamma(t):[0,a)\to[0,+\infty)$ (a 可取 $+\infty$), 如果它严格递增且 $\gamma(0)=0$, 则称函数 γ 为 K 类函数; 设连续函数 $\beta(s,t):[0,a)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ (a 可取 $+\infty$), 若对于固定的 t, 函数 $\beta(\cdot,t)$ 是 K 类函数; 对于固定的 s, 函数 $\beta(s,\cdot)$ 严格递减且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\beta(s,t)=0$, 则称函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 为 KL 类函数.

引理 **2**　对于标量自治微分方程

$$\dot{y}=-\alpha(y),\quad y(t_0)=y_0,$$

其中 α 是在 $[0,a)$ 上满足局部 Lipschitz 条件的 K 类函数, 则 $\forall y_0\in[0,a)$, 该方程存在唯一解 $y(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$, 且

$$y(t)=\sigma(y_0,t-t_0),$$

其中 $\sigma(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $[0,a)\times[0,+\infty)$ 上的 KL 类函数.

2　主要结果

考虑如下可解的非线性广义系统

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\tag{1}$$

收稿日期: 2012-03-10

作者简介: 马合保(1963-), 男, 河南安阳人, 副教授, 硕士, 主要从事广义系统控制理论的研究.

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 与 $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 分别是系统的状态和输入向量, $\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 且 $\det\boldsymbol{E}=0$, $f(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

可解性保证对任意分段连续输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和任意给定的初始值 $\boldsymbol{Ex}(0)$, 系统(1)有且只有 1 个无脉冲解 $\boldsymbol{x}(t)$ [9]. 由于广义系统的内在特性, 初始值必须以形式 $\boldsymbol{Ex}(0)$ 给出[10].

定义 1 若有 KL 类函数 β 和 K 类函数 γ, $\forall\boldsymbol{Ex}(0)\in B(0,k_1)$ 和 $\forall\boldsymbol{u}(t):\sup\limits_{t\geqslant0}\|\boldsymbol{u}(t)\|<k_2$, 其中 k_1, k_2 为正常数, 有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\beta\left(\|\boldsymbol{Ex}(0)\|,t\right)+\gamma\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right),\quad t\geqslant0,$$

则称非线性广义系统(1)局部输入-状态稳定.

定理 1 设函数 $V(\boldsymbol{Ex}(t)):[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续可微, 满足

(i) $V(0)=0$;

(ii) $\alpha_1\left(\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{x}(t)\|\right)\leqslant V(\boldsymbol{Ex}(t))\leqslant\alpha_2\left(\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\right)$, $\boldsymbol{Ex}(t)\neq0$;

(iii) $\left(\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex})}\right)^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant-\alpha_3\left(\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\right)$, $\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\geqslant\rho\left(\|\boldsymbol{u}(t)\|\right)>0$,

其中 α_1, α_2, α_3 和 ρ 为 K 类函数, 则系统(1)局部输入-状态稳定.

证 设 $\sup\limits_{t\geqslant0}\|\boldsymbol{u}(t)\|<k_2$, $k_2>0$, 取 $k_1>\rho(k_2)>0$, $\forall\boldsymbol{Ex}(0)\in B(0,k_1)$, 则

$$\|\boldsymbol{Ex}(0)\|<k_1,\quad\forall t\geqslant0.$$

从而有

$$\left\{\boldsymbol{x}(s)\middle|\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\geqslant\rho\left(\|\boldsymbol{u}(s)\|\right)>0,0\leqslant s\leqslant t\right\}\supset\left\{\boldsymbol{x}(s)\middle|\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\geqslant\rho\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)>0,0\leqslant s\leqslant t\right\},$$

又 $\rho\left(\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)<\rho(k_2)<k_1$, 令 $\alpha_2\left(\rho\left(\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)\right)=\eta$, 则 $\eta<\alpha_2(k_1)$.

$V=V(\boldsymbol{Ex}(s))$ 沿方程(1)的解的导数为

$$\dot V(\boldsymbol{Ex}(s))=\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex})}\right)^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant-\alpha_3\left(\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\right)\leqslant-\theta,\quad(2)$$

其中 $s\in[0,t],\theta=\inf\limits_{\rho\left(\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(s)\|}\left\{\alpha_3\left(\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\right)\right\}$.

当 $\rho\left(\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(0)\|<k_1$ 时, 由不等式(2)得

$$V(\boldsymbol{Ex}(s))\leqslant V(\boldsymbol{Ex}(0))-\theta s\leqslant\alpha_2(k_1)-\theta s,$$

所以当 s 由 0 变化到 $(\alpha_2(k_1)-\eta)/\theta$ 时, $V(\boldsymbol{Ex}(s))$ 减少到 η.

令 $T=(\alpha_2(k_1)-\eta)/\theta$, 则 $\forall s\in[0,T]$, 利用条件(ii), 有

$$V(\boldsymbol{Ex}(s))\leqslant\alpha_2\left(\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\right)\Rightarrow\alpha_2^{-1}(V(\boldsymbol{Ex}(s)))\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\Rightarrow\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(\boldsymbol{Ex}(s))))\leqslant\alpha_3\left(\|\boldsymbol{Ex}(s)\|\right).$$

于是, V 满足微分不等式

$$\dot V\leqslant-\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V))=-\varphi(V),$$

其中 $\varphi=\alpha_3\circ\alpha_2^{-1}$ 为 K 类函数.

不失一般性, 假设 φ 满足局部 Lipschitz 条件, 令 $y(s)$ 满足

$$\dot y=-\varphi(y),\quad y(0)=V(\boldsymbol{Ex}(0))\geqslant0.$$

由引理 1 得

$$V(\boldsymbol{Ex}(s))\leqslant y(s),\quad s\in[0,T],$$

由引理 2, 存在 KL 类函数 $\sigma(\cdot,\cdot)$, 使得

$$V(\boldsymbol{Ex}(s))\leqslant\sigma(V(\boldsymbol{Ex}(0)),s),\quad s\in[0,T],$$

所以

$$\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{x}(s)\|\leqslant\alpha_1^{-1}\left(V(\boldsymbol{Ex}(s))\right)\leqslant\alpha_1^{-1}(\sigma(V(\boldsymbol{Ex}(0)),s))\leqslant\alpha_1^{-1}\left(\sigma\left(\alpha_2\left(\|\boldsymbol{Ex}(0)\|\right),s\right)\right)\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(s)\|\leqslant\|\boldsymbol{E}\|^{-1}\alpha_1^{-1}\left(\sigma\left(\alpha_2\left(\|\boldsymbol{Ex}(0)\|\right),s\right)\right)=\beta\left(\|\boldsymbol{Ex}(0)\|,s\right),\quad(3)$$

其中 $s\in[0,T]$, β 为 KL 类函数.

$\forall s\geqslant T$, 有 $V(\boldsymbol{Ex}(s))\leqslant\eta$. 从而

$$\|\boldsymbol{E}\|\|\boldsymbol{x}(s)\|\leqslant\alpha_1^{-1}\left(V(\boldsymbol{Ex}(s))\right)\leqslant\alpha_1^{-1}(\eta)=\alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\rho\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)\right)\right)\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(s)\|\leqslant\|\boldsymbol{E}\|^{-1}\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|)))=\gamma\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right),\quad(4)$$

其中 $s\in[T,t]$, γ 是 K 类函数.

当 $\|\boldsymbol{Ex}(0)\|\leqslant\rho\left(\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right)$ 时, 则必有 $V(\boldsymbol{Ex}(0))\leqslant\eta$. 从而易知, $\forall s\geqslant0$, 有 $V(\boldsymbol{Ex}(s))\leqslant\eta$. 若 $\boldsymbol{Ex}(s)\neq0$, 同不等式(4)证法可得

$$\|\boldsymbol{x}(s)\|\leqslant\gamma\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|\right),s\in[0,t].\quad(5)$$

若 $\boldsymbol{Ex}(s)=0$, 而 $\boldsymbol{x}(s)\neq0$, 则存在与 s 充分接近的 s_1 ($\boldsymbol{Ex}(s_1)\neq0$), 使 $\|\boldsymbol{x}(s)\|\leqslant2\|\boldsymbol{x}(s_1)\|$. 所以, 由 t 的任意性, 结合不等式(3)~(5), $\forall\boldsymbol{Ex}(0)\in B(0,k_1)$, $\forall\boldsymbol{u}(t)$:

$\sup\limits_{t\geqslant 0}\|\boldsymbol{u}(t)\|<k_2$，有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\beta\left(\|\boldsymbol{Ex}(0)\|,t\right)+\gamma(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|),\quad t\geqslant 0,$$

即系统(1)是局部输入-状态稳定的.

3　参考文献

[1] Songtag E D, Wang Yuan. New characterizations of input to state stability [J]. IEEE Trans Automatic Control, 1996, 41(9): 1283-1294.

[2] Khalil H K. Nonlinear systems [M]. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[3] 范子彦，韩正之. 非线性控制系统的输入-状态稳定性及有关问题 [J]. 控制理论与应用, 2001, 18(4): 473-477.

[4] Wu Shengyu, Mei Shengwei, Zhang Xuemin. Estimation of LISS(local input-to-state stability) properties for nonlinear systems[J]. Sci China Tech Sci, 2010, 53(4): 909-917.

[5] 吴热冰，李春文，刘艳红. 非线性广义系统的右可逆性 [J]. 自动化学报, 2003, 29(6): 927-931.

[6] Gao Zhiwei, Ding S X. Fault reconstruction for Lipschitz nonlinear descriptor systems via linear matrix inequality approach [J]. Circuits Syst Signal Processing, 2008, 27(3): 295-308.

[7] 马合保，康会光. 非线性广义系统的输入-状态稳定性 [J]. 安徽大学学报：自然科学版, 2009, 33(2): 9-11.

[8] 付兴建，刘小河，候明，等. 时滞依赖非线性广义系统鲁棒非脆弱 H_∞控制 [J]. 北京信息科技大学学报：自然科学版, 2011, 26(4): 30-34.

[9] Liu Xiaoping. Robust stabilization of nonlinear singular systems [C]//Proc of the 34th IEEE Conf Decision and Control. New Orleans LA-Dec, 1995: 2375-2376.

[10] Wang Hesheng, Yung C F, Chang Fanren. H_∞ control for nonlinear descriptor systems [J]. IEEE Trans Automatic Control, 2002, 47(11): 1919-1925.

The Local Input-to-State Stability of Nonlinear Descriptor Systems

MA He-bao, XIAN Feng

(Department of Mathematics, Minjiang University, Fuzhou Fujian 350108, China)

Abstract: The problem of local input-to-state stability (LISS) of nonlinear descriptor systems has been discussed by using LISS-Lyapunov fuction. The notion of LISS highlights the limited domain of inputs and the neighboring region of initial states. The definition of LISS of nonlinear descriptor systems has been introduced. And a sufficient condition for local input-to-state stability of nonlinear descriptor systems is got.

Key words: nonlinear descriptor systems; local input-to-state stability; LISS-Lyapunov function

(责任编辑：曾剑锋)