第 36 卷 第 5 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No. 5
2012 年 9 月　　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　　Sep. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)05-0441-05

认知诊断中 *Q* 矩阵和 *Q* 矩阵理论

丁树良, 王文义, 罗　芬

(江西师范大学计算机信息工程学院, 江西　南昌　330022)

摘要: *Q* 矩阵和 *Q* 矩阵理论是认知诊断中一对容易混淆的概念, 一方面需要强调它们的差异, 另一方面对 *Q* 矩阵理论做一些补充, 比如在一定条件下, 多级评分的认知诊断中测验蓝图的设计原理. 根据实测数据对测验蓝图 *Q* 矩阵修正的设想, 以及认知诊断模型和多维项目反应模型的联系.

关键词: *Q* 矩阵; *Q* 矩阵理论; 多级评分认知诊断; 多维项目反应模型

中图分类号: O 626.4　　　　文献标志码: A

1　*Q* 矩阵

确定了一个诊断评估的范围以后, 认知诊断评估的任务是揭示被试的认知长处和不足, 并且进行相应的补救. 正像医生进行诊断一样, 需要一些特定的医疗器械, 以探查被检查者器官上难以用眼睛直接观察到的病症, 认知诊断也需要编制一些专门的项目, 以探查被试不可直接观察的属性掌握情况. 在认知诊断中, 属性(attribute)是一个重要的概念, 它的表述各种各样[1]. 引用 J.P.Leighton 等[2]的说法, 属性表示测验项目的特征, 它是正确解决特定项目时所需要的认知加工和技能. 记诊断评估范围内所有属性的集合为 S_1, 而所有项目的集合为 S_2, 若项目 j 中出现属性 i, 则称属性 i 和项目 j 有关系 r, 于是 r 是 S_1 和 S_2 的关系, 而 r 对应的关系矩阵记为 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$, 这是一个 0-1 矩阵, 称为属性与项目的关联阵(incidence matrix), 由于 $\boldsymbol{Q}$ 的元素仅取 0、1, 故它是一个布尔矩阵[3].

属性之间可能存在层级 (hierarchy)关系, 比如要掌握多位数整数乘法(A), 必须掌握个位数的乘法(B)、数位的概念(C)和加法(D), B、C、D 就是 A 的先决(prerequisite)属性. 定义在属性集合上的先决关系是一个偏序(partial order)关系, 即自反、反对称、传递.

若 A 是 B 的先决属性, 且不存在既不等于 A、又不等于 B 的属性 C, 使得 A 是 C 的先决属性, C 是 B 的先决属性, 则称 A 是 B 的直接先决(immediate prerequisite). 实际上 A 是 B 的直接先决, 即 B 盖住 A[4]. 而盖住关系是反自反、反对称和反传递的. 属性集合上的盖住关系矩阵, 实际上是属性的邻接阵. 通过对这个邻接阵的行或列进行交换变换(即左乘或右乘一个交换矩阵), 总可以使这个邻接阵变成上三角阵. 记邻接阵为 $\boldsymbol{A}$. 而由 $\boldsymbol{A}$ 与同阶单位阵 $\boldsymbol{I}$ 的和为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$, 通过 Warshall 算法[4]可得可达阵 $\boldsymbol{R}$ 或令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$, 然后计算 $\boldsymbol{B}$ 的正整数次幂 $\boldsymbol{B}^t$, 且令 $\boldsymbol{B}^t$ 中非零元为 1, 仍记为 $\boldsymbol{B}^t$, 直到 $\boldsymbol{B}^t=\boldsymbol{B}^{t+1}$, 此时 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}^t$. 用这种方法也可以获得可达阵 $\boldsymbol{R}$[3]. 可达阵的列表示了属性之间直接或间接的关系. 且由上述算法及上三角阵之积仍为上三角阵, 知 $\boldsymbol{R}$ 的行列式为 1, 故 $\boldsymbol{R}$ 非奇异. 为了便于引用, 本文将这个结果写成如下引理.

引理 1　可达矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的行列式为 1, 故 $\boldsymbol{R}$ 为非奇异阵.

如果一个项目包含的属性符合给定的层级关系, 则称这个项目为有效项目(valid item), 否则为无效项目[5]. 设欲诊断的范围内包含 K 个属性, 属性之间的层级关系记为 H, 设由 H 可以产生 T 个潜在项目类(包含的属性完全相同的所有项目构成一个项目类). 杨淑群等[6]定义属性层级关系疏离程度 $d=T/(2^K-1)$, 而 $c=1-d$ 为这个层级关系的紧密程度. 显然, 疏离程度最大是独立型结构, 这时 $d=1$ 而 $c=0$;

收稿日期: 2012-06-19

基金项目: 国家自然科学基金(30860084, 31160203, 31100756), 国家社会科学基金(12BYY055), 国家教育科学规划项目(CCA110109), 教育部人文社科项目(09JJCXLX012, 10YJCXLX049, 11YJC190002), 江西省教育厅科技计划项目(GJJ11385, GJJ10238), 全国教育考试科研规划课题(2009JKS2009)和高等学校博士学科点专项科研基金(20113604110001)资助项目.

作者简介: 丁树良(1949-), 男, 江西樟树人, 教授, 博士生导师, 主要从事计算机辅助教学、应用及教育和心理测量方面的研究.

而疏离程度最小的是线性型，这时 $d=K/(2^K-1)$而 $c=1-K/(2^K-1)$. 由定义可知，疏离程度越大，有效项目类越多，最多有(2^K-1)类，而疏离程度越小，有效项目类越少，最少仅有 K 类.

1.1 潜在 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵和学生 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵

给定属性及层级关系，可导出邻接阵 $\boldsymbol{A}$ 和可达阵 $\boldsymbol{R}$，而由 $\boldsymbol{R}$ 至少有如下 3 种方法可以导出所有可能的(潜在的)项目类.

第 1 种方法是 K.K. Tatsuoka 给出的缩减法[3, 7]，即由 K 个属性，可以导出(2^K-1)个非零的 K 维 0-1 向量，从这些向量中删除与可达阵 $\boldsymbol{R}$ 规定的层级关系不符合的列，便导出缩减矩阵 $\boldsymbol{Q}r$.

第 2 种方法是扩张算法[6, 8-9]. 令 $Q \Leftarrow R$，$j \Leftarrow 1$，从 $\boldsymbol{Q}$ 的第 j 列开始，与 $\boldsymbol{Q}$ 的其他列分别作布尔加，若生成的向量与 $\boldsymbol{Q}$ 中已有向量不同，则添加到 $\boldsymbol{Q}$ 的右边，即 $\boldsymbol{Q}$ 进行了扩张，扩张后的 $\boldsymbol{Q}$ 阵仍记为 $\boldsymbol{Q}$；然后 $j \Leftarrow j+1$，若 $j \leqslant k$，则重复上面的步骤，否则终止.

第 3 种方法是渐进式扩张算法[10]. 将 $\boldsymbol{R}$ 按列剖分，即 $\boldsymbol{R}=(r_1, r_2, \cdots, r_K)$；$\boldsymbol{Q} \Leftarrow r_1$；$j \Leftarrow 2$，第 1 步，$\boldsymbol{Q} \Leftarrow \boldsymbol{Q} \cup \{r_j\}$，且将 r_j 放在 $\boldsymbol{Q}$ 的最右边，然后，r_j 与 $\boldsymbol{Q}$ 中所有列作布尔并，将新增列植入 $\boldsymbol{Q}$ 中；第 2 步，$j \Leftarrow j+1$；第 3 步，若 $j \leqslant k$，则转第 1 步，否则结束.

第 2、第 3 种方法表明 $\boldsymbol{Q}$ 中的列均可以由 $\boldsymbol{R}$ 的列的布尔并导出，关于这一点，杨淑群等[5]做了严格的证明.

3 个算法获得的 $\boldsymbol{Q}$ 均相同. 它的列表示潜在(potential)项目类，故记 $\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{Q}p$.

然而，2 个扩张算法均以可达阵 $\boldsymbol{R}$ 为基础，如果由测验提取出一个测验 $\boldsymbol{Q}$ 阵(记为 $\boldsymbol{Q}t$)，以 $\boldsymbol{Q}t$ 为基础进行扩张，不一定能够将所有潜在项目类都挖掘出来. 下一个例子说明了这一点.

例 1 设 $\boldsymbol{Q}t=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，依照 K.K. Tatsuoka 介绍的 $\boldsymbol{Q}t$ 的行的逐对比较方法[3, 7]，得知这 3 个属性之间均不存在先决关系，即 3 个属性是独立的，于是对应的可达阵 $\boldsymbol{R}$ 为 3 阶单位阵 $\boldsymbol{I}$. 分别对 $\boldsymbol{Q}t$ 进行形式上的扩张和对 $\boldsymbol{R}$ 进行扩张，有

$$\boldsymbol{Q}t=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{array}\right]=Q_{p1},$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\end{array}\right]=\boldsymbol{Q}_p.$$

可见对 $\boldsymbol{Q}t$ 进行的扩张所获得的仅仅是潜在项目类的一部分. 然而如果 $\boldsymbol{Q}t$ 中有一个子矩阵是 $\boldsymbol{R}$，则由 $\boldsymbol{Q}t$ 能够扩张出所有潜在项目类. 若可达阵 $\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{Q}t$ 的子矩阵，这种 $\boldsymbol{Q}t$ 称为充要 $\boldsymbol{Q}$ 阵，参见文献[11-12].

1.2 知识状态与项目中属性向量位于同一度量系统

如前所述，目前不少文献称 $\boldsymbol{Q}$ 为属性与项目关联阵[2-3, 7]，但事实上，定义在属性集和被试知识状态(knowledge state)集的关系对应的关系矩阵，恰恰可以由 $\boldsymbol{Q}p$ 再添加一个零列表达，这里记之为学生 $\boldsymbol{Q}$ 阵，简写成 $\boldsymbol{Q}s$，$\boldsymbol{Q}s$ 中这个零列表示对所测属性一无所知的被试的知识状态.

强调 $\boldsymbol{Q}s$ 与 $\boldsymbol{Q}p$ 之间的关系是十分必要的. 众所周知，在单维项目反应理论(IRT)中，被试能力参数与项目难度参数位于同一量尺上，即在数轴上. 数轴上任何 2 个点是可以比较的，它们是全序集即线序集. 而认知诊断中，被试的知识状态是一个多维向量，且每个分量仅取 0 和 1，这与项目所含属性相同，故可以说被试知识状态与项目属性向量是位于同一度量系统的，它们之间的序关系都是偏序关系[4].

这清楚地解释了计算机化自适应诊断测验(CD-CAT)的“自适应”的含义，对于 CD-CAT 选题策略的制订及项目属性在线辅助标定，特别是汪文义等[13]提出的交差方法，提供了理论基础. 注意偏序关系并不是所有的点都可以比较，这和全序集不同.

2 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论的补充— $\boldsymbol{Q}t$ 的设计

K.K. Tatsuoka[7]p 328 对自己的 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论清晰的表达如下：Hence, the first part of the rule space methodology is devoted to determining unobservable knowledge states and representing them by observable item response patterns (called $\boldsymbol{Q}$-matrix theory).

即 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论欲确定不可直接观察的知识状态，并且用可以直接得到的观察反应模式表示这些知识状态.

K.K. Tatsuoka[3, 7]的 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论中一些内容有误，丁树良等[8-9]给出修正，对 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论进行了补充和拓展[11-12]. $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论一项重要任务是要用观

察反应模式表示不可以直接观察的被试的知识状态．注意到期望反应模式可以由知识状态和测验蓝图(Qt)表示，认知诊断中认知诊断模型通常是期望反应模式和观察反应的函数，而给定 Qt，期望反应模式完全由知识状态决定，从而认知诊断模型根据观察反应模式给出对应的知识状态．这里测验蓝图 Qt 的构造十分重要．试想一下，如果多个知识状态对应同一个期望反应模式，认知诊断模型就没有办法将这些知识状态区分开来，判准率自然不高．

测验 Q 阵(记为 Qt)是 Qp 的子矩阵．给出 Qt 和 Qs，则可以计算出由 Qt 确定的期望反应矩阵．实际上，期望反应有多种等价的计算公式，比如对于 Qs 中任一列 α(它代表一类被试的知识状态)，分别和 Qt 中每一列向量相减，为确切起见，比如第 j 列 q_j，如果差向量 $\alpha-q_j$ 中每个分量均非负，则该被试在项目 j 上的期望反应为正确，即得 1 分，否则为 0 分[8-9]．但是对例 1 中的 Qt，所有至多包含 1 个非零元的知识状态一共有 4 个，它们的期望反应模式均为(0，0，0)．这时判准率很可能比较低．以下试分析判准率比较低的原因．比如 K.K. Tatsuoka 的规则空间模型[3]中，其判别分类的类中心的个数由期望反应模式的个数决定；J.P. Leighton 等[2]的属性层级模型，也是将观察反应模式与期望反应模式作某种形式的比对，并将观察反应模式归类为与之“最相似”的期望反应模式；事实上 DINA 模型中也要计算期望反应(在 DINA 模型中称之为潜在反应变量，latent response variables[14])，也是给出一个规则将观察反应模式归类为某个期望反应模式对应的知识状态．由此可知，如果 Qt 给出的期望反应模式的数目少于知识状态的数目，对于诊断判别的准确率一定有负面影响．

因此讨论 Qt 的构造，使得期望反应模式数与 Qt 中的列数能够尽量接近，甚至相等，这是一个重要的研究课题．对于 0-1 评分模式，有如下的定理[11-12]．

定理1　若采用 0-1 评分方式且属性对认知任务所起的作用是非补偿连接的，则期望反应模式集合与知识状态集合建立起双射(bijective)的充分必要条件是可达阵 R 是 Qt 的子矩阵．

而对于多级评分的 Qt 应该如何设计呢？如果对于多级评分的认知诊断，采用 K.K. Tatsuoka[7]、祝玉芳等[15]或田伟等[16]提到的期望得分的计算方法，即如果掌握项目中属性个数等于对该项目的期望反应得分，即被试掌握了测验项目中任一个属性便得 1 分，这时，只要 Qt 满行秩就可以使不同知识状态对应不同的期望反应模式．因为这种计算期望得分的原则，实际上等于被试知识状态的转置左乘 Qt．根据齐次线性方程组有唯一解的充要条件，只要 Qt 的转置满列秩(即 Qt 本身满行秩)即可,将这一结果记为如下的定理．

定理 2　如果属性没有补偿作用，给定测验 Q 阵 Qt，任取 Qs 中一列 α，若期望反应的评分方式是 $\alpha^{\mathrm{T}} Qt$，则只要 Qt 满行秩，知识状态集合与期望反应模式集合之间就建立了入射．

证　设 α 和 β 为 Qs 中任意 2 个不同的列．当 Qt 满行秩时，则$(\alpha-\beta)^{\mathrm{T}} Qt\neq 0$，否则 $Qt^{\mathrm{T}} (\alpha-\beta)=0$，由 Qt^{T} 列满秩，知$(\alpha-\beta)=0$，与 $\alpha\neq\beta$ 矛盾．

此即若 Qt 满行秩，则 $\alpha\neq\beta$，知 α 和 β 对应的期望反应模式不同．即 Qt 是由知识状态集合到期望反应模式集合的入射．

由引理 1 和定理 2，有如下的推论．

推论 1　若采用定理 2 中所说的计算期望得分方式，则 R 为 Qt 的子矩阵，必可以使不同的知识状态对应不同的期望反应模式．

若 R 为 Qt 的子矩阵则称 Qt 为充要 Q 阵[11-12]．

例 2　对于例 1 中的 Qt 和 Qs，如采用定理 2 中计算期望反应的方式，则学生 Q 阵 Qs 中 8 个知识状态在 Qt 下对应 8 种不同的期望反应模式．

例 3　设属性数 K=3 且属性层级为独立型结构．令 $Qt=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，显然，$Qt$ 的秩等于 2，而 2 个不同的知识状态 $\alpha_1=(0\ 0\ 1)$与 $\alpha_2=(1\ 1\ 0)$对应相同的期望反应模式(1111)．

3　讨论

3.1　Qt 应该如何修正

项目中属性的准确标定对于认知诊断是一件至关重要的事情．表面上这只是 Q 矩阵的事，但是如前所述，它和 Q 矩阵理论相关．一般来说，项目中属性的标定是一件花销很大而又容易出错的事情．陈平等[17-18]和汪文义等[13]提出在线项目属性辅助标定的方法，以减轻专家的工作压力．但不论是人工标定，还是机器辅助标定，总还可能出错．汪文义[1]认为项目属性标定是一个“不断反复的复杂过程”，

这意味着这件工作要不断修正才可能逐步完善. 国内外都有专家讨论如何修正 $\boldsymbol{Q}$ 阵的问题[19-20]. 涂冬波等[20]的研究思路是清晰的, 他们根据 DINA 模型中项目参数的统计意义提出修改 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵的方案. DINA 模型中项目 j 包含 2 个参数: 失误参数 s_j 和猜测参数 g_j, 通俗地说, 掌握了项目 j 中所有属性的被试(共 M_j 人)分成 2 类：对项目 j 正确作答(有 MC_j 人)和错误作答(有 MW_j 人); 未掌握项目 j 中所有属性的被试(共 N_j 人)也分成 2 类, 对 j 错误作答(有 NW_j 人)和正确作答(共 NC_j 人). 而 s_j 是掌握了项目 j 中所有属性而错误作答的概率, g_j 是未掌握项目 j 中所有属性而正确作答的概率. 通常情况下, s_j、g_j 都不应该太大, 且 $1-s_j>g_j$. 但是如果正确作答项目 j 必须掌握属性 A_i 而 $q_{ij}=0$, 即命题专家认为该项目中未测属性 A_i, 由于该项目未标注正确回答需要属性 A_i, 结果纵使掌握了专家标注的项目 j 中所有属性(除 A_i 外)的被试很难做对项目 j, 故使得该项目的失误率变大, 即 MW_j/M_j 变大.

相反, 如果对项目 j 的正确作答不需要属性 A_i, 但专家在 $\boldsymbol{Q}$ 阵中标注 $q_{ij}=1$, 这时属性 A_i 只是项目 j 的一个冗余属性, 真实作答反应时掌握了项目 j 中的属性但未掌握 A_i 的被试也可以对 j 进行正确反应, 这表面上是 j 的猜测率高, 即(NC_j/N_j)比较大.

涂冬波等认为, 如果 g_j 过大, 且掌握该项目中某个属性 k 与未掌握属性 k 的被试答对该项目的比例无显著差异, 则说明该项目中 k 是冗余属性, 从而 $q_{kj}=1$ 可以改为 $q_{kj}=0$; 同样道理, 如果 s_j 过大, 且掌握与未掌握该项目中属性 k 的被试答对该项目比例有显著差异, 则该项目中属性 k 很可能漏标, 因而应将 $\boldsymbol{Q}t$ 中 $q_{kj}=0$ 改为 $q_{kj}=1$.

该文章中给出 $\boldsymbol{Q}t$ 阵修改的伽玛(γ)方法, 想法很直观, 构思较巧妙. 但是在真正的修正过程中, 其逻辑上有一点问题. 因为对于真实的得分数据和 $\boldsymbol{Q}t$ 阵(记为 $\boldsymbol{Q}t^{(0)}$), 可以估计被试的知识状态, 在此基础之上, 才可以认定那些被试掌握了些什么样的属性, 缺少什么样的属性, 而这些知识状态估计基础是原始的 $\boldsymbol{Q}t^{(0)}$, 现在修改了 $\boldsymbol{Q}t^{(0)}$, 变成了 $\boldsymbol{Q}t^{(1)}$, 是否应该重新估计被试的知识状态呢？所以伽玛方法应该是一个不断迭代的过程, 直到 $\boldsymbol{Q}t$ 不必修正为止. 另外, 涂冬波等[20]的修正方案中, 知识状态的比较准确的估计是十分重要的. 而知识状态的准确估计不仅与估计的方法(这和选择的认知诊断模型有关)、测验的长度、试题的质量等相关, 而且还和前面讨论的 $\boldsymbol{Q}t$ 的构造有关. 所以 $\boldsymbol{Q}t$ 的修正实际上还要综合各种因素, 通盘进行考虑, 才可能获得比较好的结果.

另外, $\boldsymbol{Q}t$ 的修正是否可以使用其他认知诊断模型而不使用 DINA 模型进行修正？可否用 MW_j/M_j 和 NC_j/N_j 指标来修正？即使得对 $\boldsymbol{Q}t$ 的修正这件事情和认知诊断模型无关(model-free), 而只和给定的 $\boldsymbol{Q}t$, $\boldsymbol{Q}s$ 以及观察反应数据有关. 这些都有待进一步深入探索.

3.2 认知诊断模型和多维项目反应模型的应用

认知诊断评估对于形成性评估特别合适, 因为这里涉及到的范围较小, 属性较少且粒度(granularity)可以较小. 由于属性较少从而所使用的项目也可以比较少，进而认知诊断模型中未知参数不至于过多. 但是对于终结性评估, 比如学年测验, 甚至是高校招生考试, 涉及的属性太多, 所以往往用能力而不是属性来标注 $\boldsymbol{Q}$ 阵. 比如高考数学学科试卷对于能力的考核有着明确的要求, 以 2010 年教育部考试中心颁布的《普通高等学校招生全国统一考试大纲》(理科·课程标准实验·2010 年版)为例, 明确规定数学学科试卷考核的能力要求包括 7 项: 运算求解能力、推理论证能力、应用意识、数据处理能力、空间想象能力、创新意识以及抽象概括能力. 能力的粒度当然比属性粒度更粗. 这里用通常的认知诊断模型进行数据诊断分析似乎不妥, 不如使用多维项目反应模型进行分析, 可能更加合适.

本文讨论了认知诊断中 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵和 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵理论中的几个论题. 强调 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵不仅仅是属性与项目的关联阵, 而且是属性与知识状态的关联阵. 这 2 个方面的意义使得项目和知识状态可以处于相同的度量系统, 从而为计算机化自适应认知诊断测验的选题策略的制定提供理论依据. 为了使观察反应模式更好地表达不可直接观察的知识状态, 对认知诊断测验的设计有很高的要求. 本文讨论了测验 $\boldsymbol{Q}$ 阵的设计, 特别是在 0-1 评分和多级评分情况下, 建立知识状态和期望反应模式的双射与 $\boldsymbol{Q}t$ 设计的关系, 同时还讨论了如何通过观察反应模式对 $\boldsymbol{Q}t$ 修正的问题, 以及探讨了认知诊断测验与多维项目反应模型的应用等问题.

当然这里的想法还没有进行实证研究, 也没有 Monte Carlo 模拟研究. 有的探索也很粗浅, 比如多维项目反应理论与认知诊断的关系, 比如定理 2 中多级评分认知诊断测验的设计的讨论, 只给出了一个充分条件, 它是否为必要条件?再如 $\boldsymbol{Q}t$ 是否可以不使用

DINA 模型而进行修正？即可否用 $MW_j/\mathrm{M_j}$ 和 NC_j/N_j 指标来修正？这些都有待进一步深入探索.

4 参考文献

[1] 汪文义. 认知诊断评估中项目属性辅助标定方法研究 [D]. 南昌: 江西师范大学,

[2] Leighton J P, Gierl M J, Hunka S M. The attribute hierarchy method for cognitive assessment: a variation on Tatsuoka's rule-space approach [J]. Journal of Educational Measurement, 2004, 41(3): 205-237.

[3] Tatsuoka K K. Cognitive assessment : an introduction to the rule space method [M]. New York: Taylor & Francis Group, 2009.

[4] 左孝凌, 李为鑑, 刘永才. 离散数学 [M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983.

[5] 杨淑群, 丁树良. 有效对象的判定理论与方法 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(1): 1-4.

[6] 杨淑群, 蔡声镇，丁树良，等. 求解简化 *Q* 矩阵的扩张算法[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2008, 44(3): 87-91, 96.

[7] Tatsuoka K K. Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis: a statistical pattern classification approach [C]. Erlbaum: Hillsdale, 1995: 327-359.

[8] Ding Shuliang, Luo Fen, Cai Yan, et al. Complement to Tatsuoka's Q matrix theory [C]. Tokyo: Universal Academy Press: 417-424.

[9] 丁树良, 祝玉芳, 林海菁, 等. Tatsuoka ***Q*** 矩阵理论的修正 [J]. 心理学报, 2009, 41: 175-181.

[10] Yang Shuqun, Ding Shuliang, Ding Qiulin. Incremental augment algorithm based on reduced *Q*-matrix [J]. Transactions of Nan jing Univiersity of Aeronautics & Astronautics, 2010,27(2): 183-189.

[11] 丁树良, 杨淑群, 汪文义. 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(4): 490-495.

[12] 丁树良, 汪文义, 杨淑群. 认知诊断测验蓝图的设计 [J]. 心理科学, 2011, 34: 258-265.

[13] 汪文义, 丁树良, 游晓锋. 计算机化自适应诊断测验中原始题的属性标定 [J]. 心理学报, 2011, 43: 964-976.

[14] Junker B W, Sijtsma K. Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with nonparametric item response theory [J]. Applied Psychological Measurement, 2001, 25: 258- 272.

[15] 祝玉芳, 丁树良. 基于等级反应模型的属性层级方法 [J]. 心理学报, 2009, 41: 267-275.

[16] 田伟, 辛涛. 基于等级反应模型的规则空间方法 [J]. 心理学报, 2012, 44(1): 249-262.

[17] Chen Ping, Xin Tao, Wang Chun, et al. Online calibration methods for the DINA model with independent attributes in CD-CAT [J]. Psychometrika, 2012, 77: 201-222.

[18] 陈平. 认知诊断计算机化自适应测验的项目增补: 以 DINA 模型为例 [D]. 北京: 北京师范大学, 2011.

[19] de la Torre J. An empirically based method of ***Q***-matrix validation for the DINA model: development and applications [J]. Journal of Educational Measurement, 2008.45: 343-362.

[20] 涂冬波, 蔡艳, 戴海琦. 基于DINA模型的Q矩阵修正方法 [J]. 心理学报, 2012, 44: 558-568.

Q Matrix and *Q* Matrix Theory in Cognitive Diagnosis

DING Shu-liang, WANG Wen-yi, LUO Fen

(College of Computer Information and Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: ***Q*** matrix and ***Q*** matrix theory are easy confusable. The difference between them is emphasized and the complement of ***Q*** matrix theory is given in this note. Especially, how to design the blueprint for the cognitive diagnosis with the 0-1 scoring or polytomous scoring is discussed. Moreover, there is a scheme for modification of the test ***Q*** matrix and an idea of how to use the multidimensional item response model to analyze the data with large granularity of the attributes in the part of discussion of the note.

Key words: ***Q*** matrix; ***Q*** matrix theory; cognitive diagnosis with polytomous scoring; multidimensional item response model

(责任编辑：冉小晓)