文章编号: 1000-5862(2012)05-0477-05

# 一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性

杨碧珑, 易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 运用Nevanlinna值分布的理论和方法, 研究了微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+Af=0(k\geqslant 2)$ 解的增长性, 其中 $A_j(1\leqslant j\leqslant k-1), A$ 为亚纯函数, 假设 $A$ 是以 $\infty$ 为亏值的超越亚纯函数, 通过给定 $A_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$ 的不同条件, 证明了齐次线性微分方程的任一非零解均为无穷级.

关键词: 微分方程; 亚纯函数; 亏值; 级

中图分类号: O 174.52　　文献标志码: A

## 0　引言与结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号[1-2], 用 $T(r,f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数, 用 $\rho(f)$ 和 $\mu(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的级与下级, 用 $\delta(\infty,A)$ 表示函数 $A$ 在 $\infty$ 的亏量等.

关于高阶线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+Af=0\,, \tag{1}$$

陈宗煊于 1996 年在文献[3]中, 证明了以下定理.

**定理A**　设 $A,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数, 并假设下面的(i)或(ii)成立:

(i) $\rho(A_j)<\rho(A)<\infty\ (j=1,2,\cdots,k-1)$;

(ii) $A$ 是有限级整函数, $A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是多项式,

那么微分方程(1)的所有非零解具有无穷级.

自然会问: 当 $A_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$, $A(z)$ 为亚纯函数时方程(1)是否也有相同的结论. 但是,若只是单纯地控制 $\rho(A_j)<\rho(A)$, 不能保证方程(1)的所有非零解具有无穷级.

例如 $f(z)=\mathrm{e}^z/\sin z$ 满足方程 $f''-2f'-2\cot^2 zf=0$, 但 $\rho(f)<+\infty$.

最近, Wu Pengcheng 等在文献[4]中讨论了亚纯系数 2 阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{2}$$

解的增长性, 证明了: 当 $A(z)$ 是满足 Edrei-Fuchs 不等式的极端情况的有限级亚纯函数, $B(z)$ 是以 $\infty$ 为亏值的超越亚纯函数时, 能保证方程(2)的所有非零解具有无穷级. 具体结果叙述如下.

**定理B**　设 $A(z)$ 是满足Edrei-Fuchs不等式的极端情况的有限级亚纯函数, $B(z)$ 是以 $\infty$ 为亏值的超越亚纯函数, 则方程(2)的任一非零解均为无穷级.

关于定理B中提到的Edrei-Fuchs不等式的极端情况说明如下.

首先引入记号

$$\Omega(\theta_1,\theta_2,r)=\{z:\theta_1<\arg z<\theta_2,|z|<r\}$$

和

$$\overline{\Omega}(\theta_1,\theta_2,r)=\{z:\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2,|z|\leqslant r\}.$$

**定理C**[5]　设 $f(z)$ 为开平面上的亚纯函数, $0<\rho(f)<\infty$, $\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,p;0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p,\theta_{p+1}=\theta_1+2\pi)$ 是 $Z$ 平面上的 $p$ 条半直线, 并且对于任意小的数 $\varepsilon>0$, 有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{p}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon,r),f=X\right\}\Big/\log r<\rho(f)\ X=0,\infty,$$

如果 $f(z)$ 的非零有穷亏值数为 $q$, 则 $q\leqslant p$.

为简便起见, 称定理C中的不等式 $q\leqslant p$ 为Edrei-Fuchs不等式, 定理B中 $A(z)$ 满足Edrei-Fuchs不等式的极端情况是指当 $p=q$ 时的特殊情况.

---

收稿日期: 2012-02-29

基金项目: 国家自然科学基金(11171170)资助项目.

作者简介: 易才凤(1955-), 女, 江西吉安人, 教授, 主要从事复分析的研究.

本文利用函数的亏值和控制条件 $\rho(A_j)<\rho(A)$ 研究了高阶方程(1)在系数为亚纯函数时解的增长级问题，证明了下面的定理.

**定理 1** 假设 $A_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$ 均为仅有有限个极点的亚纯函数，$A(z)$ 为以 $\infty$ 为亏值的超越亚纯函数，若 $\rho(A_j)<\rho(A)(1\leqslant j\leqslant k-1)$，则方程(1)的任一非零解均为无穷级.

进一步讨论了当方程(1)的某个系数 $A_s(1\leqslant s\leqslant k-1)$ 不满足定理 1 中 $\rho(A_j)<\rho(A)$ 条件，但 $A_s(z)$ 满足 Edrei-Fuchs 不等式的特殊情况时方程解的增长性，得到了相同的结论.

**定理 2** 假设 $A$，$A_1,\cdots,A_s,\cdots,A_{k-1}$ $(1\leqslant s\leqslant k-1)$ 为亚纯函数，满足下面 3 个条件：

(i) 存在某个 $s(1\leqslant s\leqslant k-1)$，$A_s$ 满足 Edrei-Fuchs 不等式的极端情况；

(ii) 对任一 $j\neq s$，有 $\rho(A_j)<\rho(A)$ ，$A_j$ $(j=1,2,\cdots,s-1,s+1,\cdots,k-1)$ 仅有有限个极点；

(iii) $A$ 是以 $\infty$ 为亏值的超越亚纯函数，则方程(1)的任一非零解均为无穷级.

## 1 引理

为了证明定理，还需要下面的相关记号和引理.

对于 $E\subset(0,\infty)$，用 $m(E)=\int_E \mathrm{d}t$ 表示 $E$ 的测度，而 $m_l(E)=\int_E \mathrm{d}t/t$ 则表示 $E$ 的对数测度. $E\subset(1,\infty)$ 的上、下对数密度分别定义为

$$\overline{\log\mathrm{dens}E}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m_l\left(E\cap[0,r]\right)/\log r$$

和

$$\underline{\log\mathrm{dens}E}=\underline{\lim_{r\to\infty}}\, m_l\left(E\cap[0,r]\right)/\log r .$$

**引理 1**[6] 设 $\omega(z)$ 是开平面上的有限 $\rho$ 级超越亚纯函数，$\Gamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是由不同整函数对组成的有限集，满足 $k_i>j_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m$，又设 $\varepsilon>0$ 是给定的常数，则

(i) 存在零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$，使得如果 $\psi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$，则存在常数 $R_0=R_0(\psi_0)>0$，对满足 $\arg z=\psi_0$ 及 $|z|\geqslant R_0$ 和所有 $(k,j)\in\Gamma$，都有

$$\left|\omega^{(k)}(z)/\omega^{(j)}(z)\right|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)};\qquad(3)$$

(ii) 存在对数测度为有限的集合 $E_2\subset(1,\infty)$，使得满足 $|z|\notin E_2\cup[0,1]$ 的所有 $z$ 及对所有 $(k,j)\in\Gamma$，有(3)式成立；

(iii) 存在测度有限的集合 $E_3\subset(0,\infty)$，使得对满足 $|z|\notin E_3$ 的所有 $z$ 及对所有 $(k,j)\in\Gamma$，都有

$$\left|\omega^{(k)}(z)/\omega^{(j)}(z)\right|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}.$$

**引理 2** 设 $A(z)$ 为亚纯函数 $0<\rho(A)<\infty$，对任意给定实数 $c>0$ 和 $H\left(\rho(A)<H\right)$ 存在 1 个集合 $E\subset(0,\infty)$ 使得 $\underline{\log\mathrm{dens}E}\geqslant 1-\rho(A)/H$ 及

$$E=\left\{t\mid T\left(t\mathrm{e}^c,A\right)\leqslant \mathrm{e}^k T(t,A)\right\}$$

成立，其中 $k=cH$.

**引理 3** 设 $A(z)$ 为亚纯函数，$0<\rho(A)<\infty$，且有 $p$ 个非零有限亏值：$a_1,a_2,\cdots,a_p(p\geqslant 1)$；$B(z)$ 是以 $\infty$ 为亏值的有限级超越亚纯函数.假设 $\beta>1$ 和 $0<\eta<\rho(A)$ 是 2 个常数，则存在序列 $\{t_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{\eta}/T(t_n,A)=0,$$

而且对每一个充分大的 $n$，存在集合 $F_n\subset\left[t_{n,}(\beta+1)t_n\right]$，$m(F_n)\leqslant(\beta-1)t_n/4$，使得对所有的 $R\in\left[t_{n,}\beta t_n\right]\setminus F_n$，关于 $\theta$ 的值域 $E_v(R)$ ( $v=1,2,\cdots,p$ )和 $E_\infty(R)$ 的 2 个不等式

$$m\left(E_v(R)\right)=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\left|\log\left(1/\left|A\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)-a_v\right|\right)\geqslant\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\delta_0 T(R,A)/4\right\}\right)\geqslant M_1>0\qquad(4)$$

和

$$m\left(E_\infty(R)\right)=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\left|\log\left|B\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\geqslant\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\delta_1 T(R,B)/4\right\}\right)\geqslant M_2>0\qquad(5)$$

同时成立,其中 $M_1$，$M_2$ 是 2 个只与 $A,B,\delta_0=\min\limits_{1\leqslant v\leqslant p}\delta(a_v,A)$，$\delta_1=\delta(\infty,B)$，$\beta$ 和 $\eta$ 有关的正常数.

**引理 4** 设 $f(z)$ 为开平面上的亚纯函数，$0<\rho(f)<\infty$，并满足条件

(i) 在 $\overline{\Omega}(-\theta,\theta)(0<\theta\leqslant\pi)$ 上，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log^{+} n\left\{\overline{\Omega}(-\theta,\theta,r),f=X\right\}/\log r\leqslant$$
$$\lambda<\rho(f)<+\infty,X=0,\infty;$$

(ii) 对于取定的某个数 $\varepsilon$，$0<\varepsilon<\theta$，存在序列 $\{R_n\}$，使得集合

$$E_n=\{z|\log(1/|f(z)-a|)\geqslant N_n$$
$$|z|=R_n,-\theta+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta-\varepsilon\}$$

的线性测度 $\operatorname{mes}E_n \geqslant \alpha R_n\left(\alpha \geqslant \varepsilon/2\right)$，其中 $a$ 是 1 个不为 0 和 $\infty$ 的复数，$N_n > 0$ 是 1 个实数，且有

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\left(R_{n_2}/R_{n_1}\right)^{6+2(\lambda+\eta_0)+3\pi/\theta} R_{n_2}{}^{\lambda+2\eta_0}\log R_{n_2}\right\}N_n{}^{-1}=0,$$

其中 $\eta_0>0$ 是某个取定的实数，以及 $R_{n_1}\leqslant R_n\leqslant R_{n_2}$，$R_{n_1}\to\infty\left(n\to\infty\right)$.

在上述假定之下，只要 $n$ 足够大，则对于 $\overline{\varOmega}\left(-\theta+\varepsilon,\theta-\varepsilon,R_{n_1},R_{n_2}\right)$ 上且在一些圆 $(\gamma)$ 外的点 $z$ 有

$$\log\frac{1}{\left|f(z)-a\right|}\geqslant \frac{H(\alpha,\varepsilon,\theta)}{L(\theta)\log\left(R_{n_2}/R_{n_1}\right)+J(\alpha,\varepsilon,\theta)}\left(R_{n_2}/R_{n_1}\right)^{6+3\pi/\theta}N_n,$$

其中 $(\gamma)$ 的半径和不超过 $\varepsilon R_{n_1}/8$，$(\gamma)$ 所含圆的个数为有穷，但依赖于值 $n$；$H\left(\alpha,\varepsilon,\theta\right)>0$ 和 $0<J(\alpha,\varepsilon,\theta)<+\infty$ 是依赖于 $\alpha,\varepsilon,\theta$ 且与 $n$ 无关的常数，以及 $0<L(\theta)<+\infty$ 是依赖于 $\theta$ 且与 $n$ 无关的常数.

**引理 5**　令 $A(z)$ 为开平面上的亚纯函数，$0<\rho\left(A\right)<\infty$，满足下面 2 个条件:

(i) $A(z)$ 有 $p$ 个非零有限亏值：$a_1,a_2,\cdots,a_p$ $(p\geqslant 1)$；

(ii) $A(z)$ 有 $p$ 条从原点出发的半直线：$\varDelta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,p;\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p,\theta_{p+1}=\theta_1+2\pi)$ 并且对于任意小的数 $\eta>0$，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{p}\overline{\varOmega}\left(\theta_k+\eta,\theta_{k+1}-\eta,r\right),A=X\right\}\Big/\log r<\rho\left(A\right),X=0,\infty,$$

则存在 1 个新的排序 $\theta_{k_1},\theta_{k_2},\cdots,\theta_{k_p}$，使得对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n$ 充分大时，对每个角域 $\overline{\varOmega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon,\theta_{k_v+1}-2\varepsilon,t_n,\beta t_n)$, $v=1,2,\cdots,p$，都存在唯一的 1 个亏值 $a_v$，使得 $z\in\overline{\varOmega}\left(\theta_{k_v}+2\varepsilon,\theta_{k_v+1}-2\varepsilon,t_n,\beta t_n\setminus\bigcup_{v=1}^{p}(\gamma_v)_n\right.$ 时，有不等式

$$\log\left(1\Big/\left|A\left(z\right)-a_v\right|\right)>\log(4/d),\quad v=1,2,\cdots,p\tag{6}$$

成立，其中 $\bigcup_{v=1}^{p}(\gamma_v)_n$ 是引理 4 定义的半径和不超过 $p\varepsilon t_n/8$ 的圆列，而 $t_n,\beta t_n$ 由引理 3 所定义，$d=\min\limits_{1\leqslant v\neq v'\leqslant p}\left\{\left|a_v-a_{v'}\right|\right\}$.

注 1　为了方便理解，引理 5 在表达上与原文有所改变，但不改变原文含义.

## 2　定理的证明

**定理 1 的证明**　(i) 假设 $f$ 是方程(1)的非零超越亚纯解且满足 $\rho(f)<\infty$，下面来推出矛盾.

由方程(1)，有

$$\left|A(z)\right|\leqslant\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\left|A_j(z)\right|.\tag{7}$$

由引理 1(iii)，存在测度有限的集合 $E_1\subset(0,\infty)$，并满足 $m(E_1)<+\infty$，当 $z\notin E_1\bigcup[0,1]$ 时，有

$$\left|f^{(j)}(z)\big/f(z)\right|\leqslant|z|^{k(\rho(f)+\varepsilon)},\quad 1\leqslant j\leqslant k.\tag{8}$$

由引理 3 的证明过程知道，对函数 $A(z)$，存在一闭区间序列 $\left\{\left[t_n,\beta t_n\right]\right\}$，$t_n\to\infty$，$t_{n+1}>\beta t_n$ 和圆列 $\left(\gamma^{(1)}\right)_n\subset\left\{z\big||z|\leqslant(\beta+1)t_n\right\}$，其中 $\left(\gamma^{(1)}\right)_n$ 的半径和不超过 $(\beta-1)t_n/8$，使得当 $n$ 充分大时，$R_n\in\left[t_n,\beta t_n\right]$ 且 $R_n\notin\left(\gamma^{(1)}\right)_n$，有

$$m\left(E_\infty\left(R_n\right)\right)=m\left(\left\{\theta\in\left[0,2\pi\right)\Big|\log\left|A\left(R_n e^{i\theta}\right)\right|\geqslant\delta_1 T\left(R_n,A\right)/4\right\}\right)\geqslant M_2>0.\tag{9}$$

令 $\max\{\rho(A_1),\cdots,\rho(A_{k-1})\}=\rho_0<\rho(A)$，则存在 $0<\varepsilon_1<\left(\rho(A)-\rho_0\right)/2$，由于 $A_j\left(1\leqslant j\leqslant k-1\right)$ 只有有限个极点，则存在足够大 $R_{n_0}$ 使得 $|z|\leqslant R_{n_0}$ 包含 $A_j\left(1\leqslant j\leqslant k-1\right)$ 的所有极点.

由于对 $r\geqslant R_{n_0}$，有

$$\rho(A_j)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log M(r,A_j)\big/\log r\leqslant\rho_0,$$

其中 $M(r,A_j)=\max\limits_{|z|=r}\left|A_j\right|$. 对给定的 $0<\varepsilon_1<(\rho(A)-\rho_0)/2$，$\exists R_n{}'\in\left\{R_n\right\},R_n{}'\in\left[t_n,\beta t_n\right]\setminus\left(E_1\bigcup[0,1]\right)$，$R_n{}'>R_{n_0}$，有

$$\log\log M(R_n{}',A_j)\big/\log R_n{}'<\rho_0+\varepsilon_1<\rho(A)-\varepsilon_1.$$

由此可得

$$\left|A_j(R_n{}'e^{i\theta})\right|<\exp\{R_n{}'^{\rho(A)-\varepsilon_1}\},\quad\theta\in[0,2\pi).\tag{10}$$

取 $\varphi_n\in E_\infty\left(R_n\right)$，由(7)~(10)式可知

$$\exp\left(\delta_1 T\left(R_n{}',A\right)/4\right)\leqslant\left|A(R_n{}'e^{i\varphi_n})\right|<|z|^{k(\rho(f)+\varepsilon)}[1+(k-1)\exp\{R_n{}'^{\rho(A)-\varepsilon_1}\}].\tag{11}$$

对(11)式两边同时取 2 次对数再除以 $\log R_n{}'$，当

$n$ 充分大时，显然有

$$\rho(A) < \rho(A) - \varepsilon_1 .$$

矛盾.

(ii) 若 $f$ 是方程(1)的非零有理解，则由(7)式，(9)式和(10)式也可得出矛盾，综合(i)、(ii)，定理 1 得证.

**定理 2 的证明** 假设 $A_s$ 有 $p$ 个非零有限亏值 $a_1$，$a_2,\cdots,a_p(p\geqslant 1)$ 和 $p$ 条从原点出发的半直线 $\Delta(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,p;\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p,\ \theta_{p+1}=\theta_1+2\pi)$ 并且对于任意小的数 $\varepsilon>0$，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log^+ n\left\{\bigcup_{k=1}^{p}\overline{\Omega}(\theta_k+\varepsilon,\theta_{k+1}-\varepsilon,r),A_s=X\right\}\Big/\log r<\rho(A_s),X=0,\infty.$$

(i) 假设 $f$ 是方程(1)的非零超越亚纯解且满足 $\rho(f)<\infty$，下面来推出矛盾. 由方程(1)，有

$$|A(z)|\leqslant\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{k-1}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right||A_j(z)|+\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}(|A_s(z)-a_v|+|a_v|)(1\leqslant v\leqslant p),\qquad(12)$$

由引理1(iii)，存在测度有限的集合 $E_1\subset(0,\infty)$，并满足 $m(E_1)<+\infty$，当 $z\notin E_1\bigcup[0,1]$ 时，有(8)式

$$\left|f^{(j)}(z)/f(z)\right|\leqslant|z|^{k(\rho(f)+\varepsilon)},\ 1\leqslant j\leqslant k$$

成立.

由引理 3 的证明过程知道，存在一闭区间序列 $\{[t_n,\beta t_n]\}$，$t_n\to\infty$，$t_{n+1}>\beta t_n$ 和圆列 $(\gamma^{(1)})_n\subset\{|z|\leqslant(\beta+1)t_n\}$，其中 $(\gamma^{(1)})_n$ 半径和不超过 $(\beta-1)t_n/8$，使得当 $n$ 充分大，$R_n\in[t_n,\beta t_n]$ 时，有(4)~(5)式，即

$$m(E_v(R_n))=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\left|\log\left(1\Big/\left|A_s(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-a_v\right|\right)\geqslant\delta_0T(R_n,A_s)/4\right.\right\}\right)\geqslant M_1>0$$

和

$$m(E_\infty(R_n))=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\left|\log\left|A(R_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\geqslant\delta_1T(R_n,A)/4\right.\right\}\right)\geqslant M_2>0$$

同时成立.

令 $\omega=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant v}(\theta_{k+1}-\theta_k)$，$0<\varepsilon_2<\min\{M_1/8p,M_2/8p,\omega/2,(\beta-1)/2p\}$，则对每个集合 $\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon_2,\theta_{k_v+1}-2\varepsilon_2,t_n,\beta t_n)$ 应用引理 5 知，存在唯一亏值 $a_v$.

进一步可知，$\exists\ n_0>0$，选取 $R_n^*=[t_n,\beta t_n]\backslash(E_1\bigcup[0,1])$ 使得对每一个当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\{z:|z|=R_n^*\}\cap\left\{(\gamma^1)_n\bigcup\left(\bigcup_{v=1}^{p}(\gamma_v)_n\right)\right\}=\varnothing,$$

其中 $\bigcup\limits_{v=1}^{p}(\gamma_v)_n$ 是一些半径和不超过 $p\varepsilon_2t_n/8<(\beta-1)t_n/16$ 的圆. 因此由引理 5 和(6)式知，当 $n\geqslant n_1\geqslant n_0$，

$R_n^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\in\bigcup\limits_{v=1}^{p}\overline{\Omega}(\theta_{k_v}+2\varepsilon_2,\theta_{k_v+1}-2\varepsilon_2,t_n,\beta t_n)$ 时，有

$$\log\left(1\Big/\left|A(R_n^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})-a_v\right|\right)>\log(4/d),\ v=1,2,\cdots,p.\qquad(13)$$

另一方面，从引理 3 的证明知，对于序列 $\{R_n^*\}$，当 $n$ 充分大时，有

$$m(E_\infty(R_n^*))=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\left|\log\left|A(R_n^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\geqslant\delta_1T(R_n^*,A)/4\right.\right\}\right)\geqslant M_2>0\qquad(14)$$

成立.

因此存在集合 $E_\infty(R_n^*)\cap[\theta_{k_{v_0}}+2\varepsilon_2,\theta_{k_{v_0}+1}-2\varepsilon_2]$ $(1\leqslant k_{v_0}\leqslant p)$ 使得

$$m\left(E_\infty(R_n^*)\cap[\theta_{k_{v_0}}+2\varepsilon_2,\theta_{k_{v_0}+1}-2\varepsilon_2]\right)\geqslant M_2/2p,$$

当 $n$ 充分大时，取 $\varphi_n^*\in m(E_\infty(R_n^*))$，使得(13)~(14)式同时成立.

令 $\max\{\rho(A_1),\cdots,\rho(A_{s-1}),\rho(A_{s+1}),\cdots,\rho(A_{k-1})\}=\rho_0'<\rho(A)$，由于 $A_j(j\neq s)$ 只有有限个极点，则存在足够大 $R_{n_{10}}^*$ 使得在 $|z|\leqslant R_{n_{10}}^*$ 内含有 $A_j(j\neq s)$ 的所有极点.

于是当 $r\geqslant R_{n_{10}}^*$ 时，有

$$\rho(A_j)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log M(r,A_j)\big/\log r\leqslant\rho_0',$$

其中 $M(r,A_j)=\max\limits_{|z|=r}|A_j|$.

对给定的 $\varepsilon_3=(\rho(A)-\rho_0')/2>0$，当 $n>n_{10}$ 时，$\exists$ $R_n''\in\{R_n^*\}$，有

$$\log\log M(R_n'',A_j)\big/\log R_n''<\rho_0'+\varepsilon_3=\rho(A)-\varepsilon_3,$$

由此可得

$$\left|A_j(R_n{}''\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| < \exp\{R_n{}''^{\rho(A)-\varepsilon_3}\}, \theta\in[0,2\pi), j\neq s. \quad (15)$$

取 $\varphi_n{}^*\in E_\infty\left(R_n{}^*\right)$, 由(8), (12)~(15)式可知

$$\exp\left(\delta_1 T\left(R_n'', A\right)/4\right)\leqslant\left|A(R_n{}''\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n{}^*})\right| < |z|^{k(\rho(f)+\varepsilon)}\cdot$$

$$\left[1+(k-2)\exp\{R_n{}''^{\rho(A)-\varepsilon_3}\}+d/4+|a_v|\right]. \quad (16)$$

对(16)式两边同时取 2 次对数再除以 $\log R_n{}'$, 当 $n$ 充分大时, 显然有

$$\rho(A) < \rho(A)-\varepsilon_3.$$

矛盾.

(ii) 若 $f$ 是方程(1)的非零有理解, 则由(12)~(15)式也可得出矛盾.

所以综合(i)、(ii), 定理 2 得证.

关于方程解的增长级的研究有许多有意义的结果, 如文献[7-10]等就对某些特殊形式系数的方程, 证明了方程的非零解均为无穷级.

## 3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] Chen Zongxuan, Gao Shian. Some oscillation theorems of higher order non- homogeneous linear differential equations with transcendental meromorphic coefficients [J]. Ann of Diff Eqs, 1996, 12: 28-39.

[4] Wu Pengcheng, Wu Shenjian, Zhu Jun. On the growth of solutions of the second order complex differential equation with meromorphic coefficients [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012(1): 117.

[5] Zhang Guanghong. The theory of entire function and meromorphic fuction [M]. Beijing: Publication of China Science, 1986.

[6] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[7] 毛志强. 某类 2 阶微分方程解的增长与零点 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(4):334-338.

[8] 涂金, 陈宗煊. 某些高阶微分方程的复振荡 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(1): 8-11.

[9] 宫娟, 陈宗煊. 关于 2 阶线性微分方程解的增长性 [J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 44(1): 29-32.

[10] 肖丽鹏, 陈宗煊. 一类高阶整函数系数线性微分方程解的超级 [J]. 数学杂志, 2008, 27(1): 47-52.

# The Growth for Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations with Meromorphic Coefficient

YANG Bi-long, YI Cai-feng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** The growth of solutions of the differential equation $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+Af=0(k\geqslant 2)$ is investigated by using the fundamental theory and method of Nevanlinna, where $A_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$ and $A\not\equiv 0$ are meromorphic functions. Assuming that $A$ is transcendental and $A$ has a deficient value $\infty$, it is proved that every solution $f\not\equiv 0$ of the equation is of infinite order with giving some different condition on $A_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$.

**Key words**: differential equation; meromorphic function; deficient value; order

(责任编辑: 王金莲)