第 36 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 36 No.5
2012 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science) Sep. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)05-0482-05

在矩控制下随机 Dirichlet 级数的(*p*,*q*)(R)型

陆万春[1]，易才凤[2]

(1. 萍乡高等专科学校数学系，江西 萍乡 337055; 2. 江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330022)

摘要：研究了一类一般的随机 Dirichlet 级数在矩控制条件 $0 \leqslant d^2\sigma_n{}^2 = d^2E|Z_n|^2 \leqslant E^2|Z_n| < +\infty$ 下的$(p,q)(\mathbf{R})$型,得出的主要结论是：这类随机 Dirichlet 级数的$(p,q)(\mathbf{R})$型 a.s. 等于相应 Dirichlet 级数的$(p,q)(\mathbf{R})$型，以及在水平直线上和水平带形上的$(p,q)(\mathbf{R})$型 a.s. 等于各自在全平面上的$(p,q)(\mathbf{R})$型.

关键词：随机 Dirichlet 级数；$(p,q)(\mathbf{R})$级；$(p,q)(\mathbf{R})$型

中图分类号: O 174.52 文献标志码: A

0 引言

关于 Dirichlet 级数以及随机 Dirichlet 级数问题，国内许多专家学者对此作了较多的研究[1-5]，在文献[6-9]中，余家荣等人研究了系数为同分布的随机变量的随机 Dirichlet 级数的$(p,q)(\mathbf{R})$级和$(p,q)(\mathbf{R})$型以及 B-值 Dirichlet 级数的$(p,q)(\mathbf{R})$级和$(p,q)(\mathbf{R})$型的情况. 本文将在矩控制的条件下，讨论一类一般的随机 Dirichlet 级数在全平面上、水平直线上以及水平带形上的$(p,q)(\mathbf{R})$型，并得出相应的统一结果.

对于一般的 Dirichlet 级数

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

其中 $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$，$\{a_n\} \subset \mathbf{C}$，$s = \sigma + \mathrm{i}t(\sigma, t \in \mathbf{R})$，记 σ_c，σ_a 为级数(1)的收敛横坐标和绝对收敛横坐标，并记

$$M(\sigma, f) = \sup_{t\in\mathbf{R}}\{|f(\sigma+\mathrm{i}t)|\}\ (\sigma > \sigma_c),$$

$$m(\sigma, f) = \max_{n\in\mathbf{N}}\{|a_n|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}\}\ (\sigma > \sigma_c),$$

称为级数(1)的最大模和最大项. 对于非常数函数(1)，令

$$\rho = \rho(p,q) = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log^{[p+1]} M(\sigma, f)}{\log^{[q]}(-\sigma)},$$

$$p, q \text{ 为整数，} p \geqslant q \geqslant 0,$$

其中 $\exp^{[0]} x = \log^{[0]} x = x$，$\exp^{[n+1]} x = \exp\{\exp^{[n]} x\}$，$\log^{[n+1]} x = \log\{\log^{[n]} x\}$，$\exp^{[n]} x = \log^{[-n]} x$.

定义 1 如果 $\rho(p-1, q-1) = 0$ 或 $+\infty(p \geqslant q \geqslant 1)$，而 $b < \rho(p,q) < +\infty$ (这里当 $p = q$ 时，$b = 1$；当 $p > q$ 时，$b = 0$)，则称函数 $f(s)$ 有指数对；如果 $f(s)$ 有指数对 (p,q)，则称 $\rho(p,q)$ 为 $f(s)$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级.

定义 2 若有 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级 $\rho = \rho_f(p,q)(b < \rho < +\infty$,当$p = q \geqslant 1$ 时，$b = 1$；当 $p > q$ 时，$b = 0$)的整函数(1)式满足 $T = \overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log^{[p]} M(\sigma, f)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho}}$ (p, q 为整数，$p \geqslant 1, q \geqslant 0, p \geqslant q$) $(0 \leqslant T \leqslant +\infty)$，则称 $f(s)$ 有 (p, q) $(\mathbf{R})$型 T.

本文主要考虑随机 Dirichlet 级数

$$f_\omega(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n s}, \tag{2}$$

其中 $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, $s = \sigma + \mathrm{i}t(\sigma, t \in \mathbf{R})$，$\{Z_n(\omega)\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上独立的复随机变量序列. 记级数(2)的收敛横坐标为 $\sigma_c{}'(\omega)$，一致收敛横坐标为 $\sigma_u{}'(\omega)$，绝对收敛横坐标为 $\sigma_a'(\omega)$，最大项为 $m(\sigma, f_\omega)$，最大模为 $M(\sigma, f_\omega)$. 相应可以定义级数(2)所确定的随机整函数 $f_\omega(s)$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级和 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型，并分别记为 ρ_ω 和 T_ω.

引入辅助级数

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s}, \tag{3}$$

其中 $\sigma_n{}^2 = E|Z_n(\omega)|^2$, $E(\bullet)$ 为数学期望，记函数 $g(s)$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级和 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型为 ρ' 和 T'.

收稿日期：2012-04-10

基金项目：国家自然科学基金(11171170)资助项目.

作者简介：陆万春(1978-)，男，江西信丰人，讲师，主要从事复分析的研究.

1　引理及其证明

引理 1　设级数(2)满足

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}(\log n)/\lambda_n=D<+\infty,\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log\sigma_n)/\lambda_n=-\infty,\quad(4)$$

则 $\sigma_c{}'(\omega)=\sigma_u{}'(\omega)=\sigma_a{}'(\omega)=-\infty$ a.s.

注 1　这是文献[6]中定理 6.7.1

引理 2　设 $\{Z_n(\omega)\}$ 是独立随机变量列，满足 $\forall n\geqslant 0$，存在 1 个正数 d，使得

$$d^2\sigma_n{}^2=d^2E|Z_n|^2\leqslant E^2|Z_n|<+\infty,\quad(5)$$

那么对 $\omega\in\Omega$ a.s.，存在自然数 $N(\omega)$，当 $n>N(\omega)$ 时，有 $|Z_n(\omega)|\leqslant n\sigma_n$，且对 $\{Z_n\}$ 的任何子序列 $\{Z_{n_k}\}$，有

$$P\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{\left|Z_{n_k}\right|\geqslant\frac{d}{2}\sigma_{n_k}\right\}\right)=1.$$

它表明 $\left|Z_{n_k}(\omega)\right|\geqslant\frac{d}{2}\sigma_{n_k}$ 中 a.s. 有无穷项成立，其中 $E(\bullet)$ 表数学期望.

注 2　这是文献[6]中引理 6.7.1

引理 3　若级数(1)满足条件 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}(\log n)/\lambda_n=D<+\infty,\overline{\lim_{n\to+\infty}}(\log|a_n|)/\lambda_n=-\infty$，且有 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级 ρ 和 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 T，且 $D=0$，则 $T=MV$，其中

$$V=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}|a_n|^{-1/\lambda_n})^{\rho-A}},\quad A=\begin{cases}1, & p=q=1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$M=\begin{cases}1/(\mathrm{e}\rho), & p=1,q=0,\\ (\rho-1)^{\rho-1}/\rho^{\rho}, & p=q=1,\\ 1, & 2\leqslant q\leqslant p.\end{cases}$$

对级数(3)应用引理 3，则有

引理 4　若级数(3)满足条件(4)，且有 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级 ρ' 和 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 T'，而且 $D=0$，则 $T'=M'V'$，其中

$$V'=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{\left(\log^{[q]}\sigma_n{}^{-1/\lambda_n}\right)^{\rho'-A}},\quad A=\begin{cases}1, & p=q=1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$M'=\begin{cases}1/(\mathrm{e}\rho'), & p=1,q=0,\\ (\rho'-1)^{\rho'-1}/\rho'^{\rho'}, & p=q=1,\\ 1, & 2\leqslant q\leqslant p.\end{cases}$$

引理 5　若级数(2)满足条件(4)和条件(5)，则 $f_\omega(s)$ a.s. 与 $g(s)$ 有相同的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级，即 $\rho_\omega=\rho'=P(L)$ a.s.，其中

$$L=L(p,q)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p]}\lambda_n}{\log^{[q]}(1/\lambda_n)\log(1/\sigma_n)},$$

$$p\geqslant q,p\geqslant 1,q\geqslant 0,$$

$$P(a)=\begin{cases}a, & p>q,\\ 1+a, & p=q=1,\\ \max\{1,a\}, & 2\leqslant p=q<+\infty.\end{cases}$$

注 3　这是文献[6]中定理 6.7.5

引理 6 (Paley-Zygmund)　设 $\{Z_n\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 上独立的随机变量列，它们的数学期望 $EZ_n=0$，且方差 $E|Z_n|^2=\sigma_n{}^2>0$，$d=\inf\{E(|Z_n/\sigma_n|)=d_n\}>0$，则 $\forall H\in A$，$P(H)>0$，存在正数 $B=B(d,H)$，$K=(H,\{Z_n\})\in\mathbf{N}$，使得对任何 $\{b_n\}\subset\mathbf{C}$，$\forall K'>K$，有

$$\int_H\left|\sum_{n=K+1}^{K'}b_nZ_n(\omega)\right|^2P(\mathrm{d}\omega)\geqslant B\sum_{n=K+1}^{K'}|b_n|^2\sigma_n{}^2.$$

注 4　这是文献[6]中引理 6.7.4

2　定理及其证明

定理 1　在引理 4 和引理 5 的条件下，$f_\omega(s)$ a.s. 与 $g(s)$ 有相同的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型，即

$$T_\omega=T'=M'V'\quad\text{a.s.}.$$

这表明 $f_\omega(s)$ 在全平面上的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 a.s. 与 $g(s)$ 在全平面上的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型相同.

证　由引理 4，$T_\omega=M_\omega V_\omega$，其中

$$V_\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}|Z_n(\omega)|^{-1/\lambda_n})^{\rho_\omega-A}},\ A=\begin{cases}1, & p=q=1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$M_\omega=\begin{cases}1/(\mathrm{e}\rho_\omega), & p=1,q=0,\\ (\rho_\omega-1)^{\rho_\omega-1}/\rho_\omega{}^{\rho_\omega}, & p=q=1,\\ 1, & 2\leqslant q\leqslant p.\end{cases}$$

由引理 5，$\rho_\omega=\rho'$ a.s.，则

$$V_\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}|Z_n(\omega)|^{-1/\lambda_n})^{\rho'-A}}\ \text{a.s.},\quad M_\omega=M'\ \text{a.s.}.$$

由引理 2 及 $D=0$，可得

$$V_\omega\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}(n\sigma_n)^{-1/\lambda_n})^{\rho'-A}}=$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}\sigma_n{}^{-1/\lambda_n})^{\rho'-A}}=V'\quad\text{a.s.}.$$

另设 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}\sigma_n{}^{-1/\lambda_n})^{\rho'-A}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_{n_k}}{(\log^{[q]}\sigma_{n_k}{}^{-1/\lambda_{n_k}})^{\rho'-A}}$，

由引理 2，$\left\{\left|Z_{n_k}(\omega)\right|\right\}$ 含有一子列 $\left\{\left|Z_{n_{k,j}}(\omega)\right|\right\}$ 满足

$$P\left(\overline{\lim_{j\to\infty}}\left\{\left|Z_{n_{k,j}}\right|\geqslant\frac{d}{2}\sigma_{n_{k,j}}\right\}\right)=1.$$

所以

$$V_\omega\geqslant\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_{n_{k,j}}}{\left(\log^{[q]}\left|Z_{n_{k,j}}(\omega)\right|^{-1/\lambda_{n_{k,j}}}\right)^{\rho'-A}}\geqslant$$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_{n_{k,j}}}{\left(\log^{[q]}\left(\frac{d}{2}\sigma_{n_{k,j}}\right)^{-1/\lambda_{n_{k,j}}}\right)^{\rho'-A}}=$$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_{n_{k,j}}}{\left(\log^{[q]}\sigma_{n_{k,j}}{}^{-1/\lambda_{n_{k,j}}}\right)^{\rho'-A}}=V'\quad \text{a.s.}.$$

故 $V_\omega=V'$ a.s. .所以, $T_\omega=M_\omega V_\omega=M'V'=T'$ a.s. .

定理 2 设级数(2)满足定理 1 和引理 6 的条件, 则 $\forall t\in\mathbf{R}$, 有

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log^{[p]}M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}=T'\quad \text{a.s.},$$

其中 $M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)=\sup\limits_{x\geqslant\sigma}\{|f_\omega(x+\mathrm{i}t)|\}$, 这表明 $f_\omega(s)$ 在任何水平线上的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 a.s. 与 $f_\omega(s)$、$g(s)$ 在全平面上的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型相同.

证 由定理 1, $T_\omega=T'$ a.s., 所以若要证定理 2, 即证

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log^{[p]}M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}=T_\omega\ \text{a.s.}.$$

(i) 当 $p=1,q=0$ 时, 即证 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}}=T_\omega$. 由 $M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)\leqslant M(\sigma,f_\omega)$, 易知

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}}\leqslant T_\omega.$$

令 $G=\left\{\omega:\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}}<T_\omega\right\}$, 则 $G\in\mathcal{A}$, 下证 $P(G)=0$. 设 $P(G)>0$, 取 $T_k(\omega)\uparrow T_\omega$, $0>\sigma_k\downarrow-\infty$, 则

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\omega:\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)/\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}<T_k(\omega),\sigma<\sigma_m\}.$$

因此存在一固定 m_0, k_0, 使得

$$P(\{\omega:[\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)]/\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}<T_{k_0}(\omega),\sigma<\sigma_{m_0}\})>0.$$

令 $H=\{\omega:[\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)]/\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}<T_{k_0}(\omega),\sigma<\sigma_{m_0}\}$, 则 $\forall\omega\in H$, $\forall\sigma<\sigma_{m_0}$, 有

$$M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)<\exp\{T_{k_0}(\omega)\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}\}.$$

由引理 6 中确定 $B=B(d,H),K=K(H,\{Z_n\})\in\mathbf{N}$, $\forall K'>K+1$, 当 $-\sigma$ 充分大时, 恒有

$$B\sum_{n=K+1}^{K'}\sigma_n{}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\int_H\left|\sum_{n=K+1}^{K'}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega).$$

令 $K'\to\infty$, 则

$$B\sum_{n=K+1}^{\infty}\sigma_n{}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\int_H\Bigg|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)-$$

$$\sum_{n=0}^{K}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\Bigg|^2P(\mathrm{d}\omega)\leqslant2\int_H|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)|^2P(\mathrm{d}\omega)+$$

$$2\int_H\left|\sum_{n=0}^{K}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega)\leqslant2\exp\{2T_{k_0}(\omega)\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}\}+$$

$$2\int_H\left(\sum_{n=0}^{K}|Z_n(\omega)|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}\right)^2P(\mathrm{d}\omega).$$

由引理 2 可知, $2\int_H(\sum\limits_{n=0}^{K}|Z_n(\omega)|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega)<+\infty$, 所以

$$2\int_H\left(\sum_{n=0}^{K}|Z_n(\omega)|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}\right)^2P(\mathrm{d}\omega)=O(2\exp\{2T_{k_0}(\omega)\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}\}).$$

所以存在常数 C_1, 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\sigma_n{}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant C_1\exp\{2T_{k_0}(\omega)\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}\}.$$

因此, 由 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型的定义, 级数 $\sum\limits_{n=K+1}^{\infty}\sigma_n{}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 τ'' 满足

$$\tau''\leqslant\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\left(\log(C_1\exp\{2T_{k_0}(\omega)\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}\})\big/\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}\right)=$$

$$2T_{k_0}(\omega)<2T_\omega\quad \text{a.s.}.\tag{6}$$

另一方面, 由引理 5, 级数 $\sum\limits_{n=K+1}^{\infty}\sigma_n{}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级 ρ'' 满足

$$\rho''=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log(2\lambda_n)}{\frac{1}{2\lambda_n}\log\frac{1}{\sigma_n{}^2}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\lambda_n}{\frac{1}{\lambda_n}\log\frac{1}{\sigma_n}}=\rho'.\tag{7}$$

所以, 由引理 4 和定理 1 以及(7)式, 级数 $\sum\limits_{n=K+1}^{\infty}\sigma_n{}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 τ'' 又满足

$$\tau''=\frac{1}{\mathrm{e}\rho''}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{2\lambda_n}{(\sigma_n{}^2)^{-\rho''/(2\lambda_n)}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{2\lambda_n}{\sigma_n{}^{-\rho'/\lambda_n}}=2T'=2T_\omega\ \text{a.s.}.$$

这与(6)式矛盾. 所以 $P(G)=0$, 即

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{\mathrm{e}^{-\sigma\rho_\omega}}=T_\omega\ \text{a.s.}.$$

(ii) 当 $p=q=1$ 时, 即证 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(-\sigma)^{\rho_\omega}}=T_\omega$. 由 $M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)\leqslant M(\sigma,f_\omega)$, 易知,

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(-\sigma)^{\rho_\omega}}\leqslant T_\omega.$$

令 $G=\{\omega:\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(-\sigma)^{\rho_\omega}}<T_\omega\}$，则 $G\in\mathcal{A}$.

下证 $P(G)=0$. 设 $P(G)>0$ ，取 $T_k(\omega)\uparrow T_\omega$ ，$0>\sigma_k\downarrow-\infty$，则

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\omega:[\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)]/(-\sigma)^{\rho_\omega}<T_k(\omega),\sigma<\sigma_m\}.$$

因此存在一固定 m_0，k_0，使得

$$P(\{\omega:[\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)]/(-\sigma)^{\rho_\omega}<T_{k_0}(\omega),\sigma<\sigma_{m_0}\})>0 .$$

令 $H=\{\omega:[\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)]/(-\sigma)^{\rho_\omega}<T_{k_0}(\omega),\sigma<\sigma_{m_0}\}$，则 $\forall\omega\in H,\forall\sigma<\sigma_{m_0}$，有

$$M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)<\exp\{T_{k_0}(\omega)(-\sigma)^{\rho_\omega}\}.$$

由引理 6 中确定 $B=B(d,H),K=K(H,\{Z_n\})\in\mathbf{N}$，$\forall K'>K+1$，当 $-\sigma$ 充分大时，恒有

$$B\sum_{n=K+1}^{K'}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\int_H\left|\sum_{n=K+1}^{K'}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega).$$

令 $K'\to\infty$，则

$$B\sum_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\int_H\left|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)-\sum_{n=0}^{K}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega)\leqslant2\int_H\left|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\right|^2P(\mathrm{d}\omega)+$$
$$2\int_H\left|\sum_{n=0}^{K}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega)\leqslant$$
$$2\exp\{2T_{k_0}(\omega)(-\sigma)^{\rho_\omega}\}+2\int_H(\sum_{n=0}^{K}\left|Z_n(\omega)\right|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega).$$

由引理 2 可知，$2\int_H(\sum\limits_{n=0}^{K}\left|Z_n(\omega)\right|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega)<+\infty$，所以

$$2\int_H(\sum_{n=0}^{K}\left|Z_n(\omega)\right|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega)=O(2\exp\{2T_{k_0}(\omega)(-\sigma)^{\rho_\omega}\}).$$

故存在常数 C_2，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant C_2\exp\{2T_{k_0}(\omega)(-\sigma)^{\rho_\omega}\} .$$

因此，由 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型的定义知，级数 $\sum\limits_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 τ'' 满足

$$\tau''\leqslant\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\log(C_2\exp\{2T_{k_0}(\omega)(-\sigma)^{\rho_\omega}\})\big/(-\sigma)^{\rho_\omega}=$$
$$2T_{k_0}(\omega)<2T_\omega\quad\text{a.s.}\ . \tag{8}$$

另一方面，由引理 5，级数 $\sum\limits_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级 ρ'' 满足

$$\rho''=1+\overline{\lim_{n\to\infty}}\log(2\lambda_n)\bigg/\log\left(\frac{1}{2\lambda_n}\log\frac{1}{{\sigma_n}^2}\right)=$$
$$1+\overline{\lim_{n\to\infty}}\log\lambda_n\bigg/\log\left(\frac{1}{\lambda_n}\log\frac{1}{\sigma_n}\right)=\rho'. \tag{9}$$

所以，由引理 4 和定理 1 以及(9)式，级数 $\sum\limits_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 τ'' 又满足

$$\tau''=\frac{(\rho''-1)^{\rho''-1}}{\rho''^{\rho''}}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(2\lambda_n)}{(\log{\sigma_n}^{-2/2\lambda_n})^{\rho''-1}}=$$
$$2\frac{(\rho'-1)^{\rho'-1}}{\rho'^{\rho'}}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{(\log{\sigma_n}^{-1/\lambda_n})^{\rho'-1}}=2T'=2T_\omega\quad\text{a.s.},$$

这与(8)式矛盾. 所以 $P(G)=0$，即

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\log M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)\big/(-\sigma)^{\rho_\omega}=T_\omega\ \text{a.s.}\ .$$

(iii) 当 $p\geqslant q\geqslant2$ 时，由 $M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)\leqslant M(\sigma,f_\omega)$ 易知

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log^{[p]}M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}\leqslant T_\omega .$$

令 $G=\{\omega:\overline{\lim\limits_{\sigma\to-\infty}}\dfrac{\log^{[p]}M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}<T_\omega\}$，则 $G\in\mathcal{A}$.

下证 $P(G)=0$. 设 $P(G)>0$，取 $T_k(\omega)\uparrow T_\omega$，$0>\sigma_k\downarrow-\infty$，则

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\omega:\frac{\log^{[p]}M_1(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho(\omega)}}<T_k(\omega),\sigma<\sigma_m\} .$$

因此，存在一固定 m_0，k_0，使得

$$P\left(\left\{\omega:\frac{\log^{[p]}M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}<T_{k_0}(\omega),\sigma<\sigma_{m_0}\right\}\right)>0 .$$

令 $H=\left\{\omega:\dfrac{\log^{[p]}M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}<T_{k_0}(\omega),\sigma<\sigma_{m_0}\right\}$，则 $\forall\omega\in H,\forall\sigma<\sigma_{m_0}$，有

$$M(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)<\exp^{[p]}\{T_{k_0}(\omega)(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}\} .$$

由引理 6 中确定 $B=B(d,H),K=K(H,\{Z_n\})\in\mathbf{N}$，$\forall K'>K+1$，当 $-\sigma$ 充分大时，恒有

$$B\sum_{n=K+1}^{K'}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\int_H\left|\sum_{n=K+1}^{K'}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega) .$$

令 $K'\to\infty$，则

$$B\sum_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant\int_H\left|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)-\sum_{n=0}^{K}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega)\leqslant$$
$$2\int_H\left|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\right|^2P(\mathrm{d}\omega)+2\int_H\left|\sum_{n=0}^{K}Z_n(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda_n(\sigma+\mathrm{i}t)}\right|^2P(\mathrm{d}\omega)\leqslant$$
$$2\exp\{2\exp^{[p-1]}\{T_{k_0}(\omega)(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}\}\}+2\int_H(\sum_{n=0}^{K}\left|Z_n(\omega)\right|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega).$$

由引理 2 可知,$2\int_H(\sum_{n=0}^{K}\left|Z_n(\omega)\right|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega)<+\infty$，所以

$$2\int_H(\sum_{n=0}^{K}\left|Z_n(\omega)\right|\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma})^2P(\mathrm{d}\omega)=O(2\exp\{2\exp^{[p-1]}\{T_{k_0}(\omega)(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}\}\}),$$

则存在常数 C_3，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}\leqslant C_3\exp\{2\exp^{[p-1]}\{T_{k_0}(\omega)(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}\}\}.$$

因此，由 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型的定义知，级数 $\sum_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 τ'' 满足

$$\tau''\leqslant\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\log^{[p]}\{C_3\exp\{2\exp^{[p-1]}\{T_{k_0}(\omega)\cdot(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}\}\}\}\Big/(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}=T_{k_0}(\omega)<T_\omega\quad\text{a.s.}.\tag{10}$$

另一方面，由引理 5，级数 $\sum_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 级 ρ'' 满足

$$\rho''=\overline{\lim_{n\to\infty}}\log^{[p]}(2\lambda_n)\Big/\log^{[q]}\left(\frac{1}{2\lambda_n}\log\frac{1}{{\sigma_n}^2}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\log^{[p]}\lambda_n\Big/\log^{[q]}\left(\frac{1}{\lambda_n}\log\frac{1}{\sigma_n}\right)=\rho'.\tag{11}$$

再由引理4和定理1以及(11)式，级数 $\sum_{n=K+1}^{\infty}{\sigma_n}^2\mathrm{e}^{-2\lambda_n\sigma}$ 的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 τ'' 又满足

$$\tau''=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}(2\lambda_n)}{(\log^{[q]}{\sigma_n}^{-2/2\lambda_n})^{\rho''}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^{[p-1]}\lambda_n}{(\log^{[q]}{\sigma_n}^{-1/\lambda_n})^{\rho'}}=T'=T_\omega\ \text{a.s.}.$$

这与(10)式矛盾. 所以 $P(G)=0$，即

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log^{[p]}M_2(\sigma+\mathrm{i}t,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}=T_\omega.$$

综合(i)~(iii)可知定理 2 成立.

取$\mathbf{R}$中稠密的可数集 $\{t_n\}$ (例如 $\{t_n\}$ 为有理数集)，这样就有

推论 1　在定理 2 的条件下, ∃ E 满足 $P(E)=1$，$\forall\omega\in E$ 及任何实数 β 及 γ，$\beta<\gamma$，有

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{\log^{[p]}M(\sigma,\beta,\gamma,\omega)}{(\log^{[q-1]}(-\sigma))^{\rho_\omega}}=T_\omega\ \text{a.s.},$$

其中 $M(\sigma,\beta,\gamma,\omega)=\sup_{\beta\leqslant t\leqslant\gamma}\{\left|f_\omega(\sigma+\mathrm{i}t)\right|\}$，这表明 $f_\omega(s)$ 在任何水平带形上的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型 a.s. 与 $f_\omega(s)$、 $g(s)$ 在全平面上的 $(p,q)(\mathbf{R})$ 型相同.

3　参考文献

[1] 余家荣. 随机狄里克莱级数的一些性质 [J]. 数学学报, 1978, 21(2), 97-118.

[2] 孙道椿. 半平面上无限级 Dirichlet 级数的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 1995, 19(2): 128-134.

[3] 孙道椿, 陈特为. 无限级 Dirichlet 级数 [J]. 数学学报, 2001, 44(2): 259-268.

[4] 贺隆贞. 关于狄里克莱级数确定的整函数的$(p,q)(\mathbf{R})$级和下$(p,q)(\mathbf{R})$级 [J]. 武汉大学学报: 自然科学版, 1982(3):73-89.

[5] 贺隆贞. 关于狄里克莱级数确定的整函数的$(p,q)(\mathbf{R})$型和下$(p,q)(\mathbf{R})$型 [J]. 武汉大学学报: 自然科学版, 1985(4): 17-26.

[6] 余家荣, 丁晓庆, 田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004: 5.

[7] 陆万春, 易才凤. 随机 Dirichlet 级数的$(p,q)(\mathbf{R})$型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(1): 101-105.

[8] 陆万春, 王金莲, 易才凤. 在矩控制下B-值随机Dirichlet级数的$(p,q)(\mathbf{R})$级和$(p,q)(\mathbf{R})$型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(6): 535-537.

[9] 王金莲, 易才凤, 陆万春. B-值 Dirichlet 级数在水平带形上的$(p,q)(\mathbf{R})$级和$(p,q)(\mathbf{R})$型 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2008, 44(1): 122-124.

(下转第 505 页)