文章编号: 1000-5862(2012)05-0487-04

双曲积分微分方程 1 个新的非协调混合元格式

吴志勤[1], 石东洋[2*]

(1. 许昌学院数学与统计学院, 河南 许昌, 461000; 2. 郑州大学数学系, 河南 郑州 450052)

摘要: 利用单元插值的性质、平均值及导数转移技巧, 将 Crouzeix-Raviart 型非协调线性三角形元应用到双曲积分微分方程, 建立了 1 个新的混合元格式, 得到了相应的 H^1-模及 L^2-模最优误差估计.

关键词: 双曲积分微分方程; 非协调元; 新混合元格式; 收敛性分析

中图分类号: O 242.21　　文献标志码: A

0 引言

考虑下面双曲积分微分方程

$$\begin{cases} u_{tt}(X,t)-\nabla\cdot\{a(X,t)\nabla u+\int_0^t b(X,t,\tau)\nabla u(X,\tau)\mathrm{d}\tau\}=f,\ (X,t)\text{在}\Omega\times(0,T]\text{中}, \\ u(X,t)=0, \quad (X,t)\text{在}\partial\Omega\times(0,T]\text{上}, \\ u(X,0)=u_0(X),\ u_t(X,0)=u_1(X), \quad X\text{在}\Omega\text{中}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $X=(x,y),\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 有界凸区域, $\partial\Omega$ 为 Ω 的光滑边界, ∇和$\nabla\cdot$ 分别表示梯度和散度算子, $a=a(X,\ t)$, $b=b(X,t)$, $u_0(X)$, $u_1(X)$, $f(X,t)$ 为已知光滑函数, 已知函数 a、b 及它们的导数有界光滑且满足 $0<a_0<a<a_1<\infty$.

方程(1)在具有记忆性质材料的热传导、核反应动力学、粘弹性力学、生物力学、松散介质中压力等实际问题的研究中有着广泛的用途. 文献[1]讨论了当 $a=b=1$ 时方程(1)的双线性元逼近; 文献[2]考虑非线性双曲积分微分方程半离散有限元格式, 得到了 L^∞ 和 $W^{1,\infty}$ 模误差估计; 文献[3]研究了有限体积元法, 并进行了误差估计; 文献[4]采用混合元方法, 导出了最优的 L^2-模误差估计, 同时应用正则 Green 函数, 通过复杂的分析, 得到了拟最优 L^∞ 模误差估计; 文献[5-6]采用 H^1-Galerkin 混合有限元法对双曲型方程进行误差估计并得到超收敛分析. 但以上研究都是关于协调有限元的, 而且对解的正则性要求较高. 为弥补以上的不足, 文献[7]研究了当 $a=b=1$ 时方程(1)的 1 个矩形非协调元方法.

本文的主要目的是利用 Crouzeix-Raviart 型非协调线性三角形元, 对方程(1)建立 1 个新的混合元格式, 相对于传统的非协调有限元方法, 它有剖分简单、LBB 条件自动满足及自由度较少等优点. 并且直接借助单元插值的有关性质, 给出了相应的收敛性分析和 H^1-模及 L^2-模的最优误差估计.

1 新混合元格式

设 T_h 是 Ω 的正则三角形剖分族[8], $\forall K\in T_h$, 设其 3 个顶点坐标分别为 $a_i(x_i,y_i)\ (i=1,2,3)$, 边为 $l_1=\overline{a_2a_3}$, $l_2=\overline{a_3a_1}$, $l_3=\overline{a_1a_2}$, $h=\max\limits_{K\in T_h}h_K$, h_K 是 K 的最大直径.

相应的有限元空间定义为

$V_h=\{v_h;v_h|_K\in P_1\ (K),\int_F[v_h]\mathrm{d}s=0,F\subset K,\forall K\in T_h\}$,

$\overrightarrow{M}_h=\{\vec{\boldsymbol{p}}_h;\vec{\boldsymbol{p}}_h|_K\in P_0\ (K)\times P_0(K),\ \forall K\in T_h\}$,

收稿日期: 2012-04-20

基金项目: 国家自然科学基金(10671184, 10971203), 国家自然科学基金数学天元基金(11026154)和高等学校博士学科点专项基金(20094101110006)资助项目.

作者简介: 石东洋(1961-), 男, 河南鲁山人, 教授, 博士生导师, 主要从事有限元方法及应用研究.

其中 $P_1(K)=\mathrm{span}\{1,\ x,\ y\}$，$P_0(K)\times P_0(K)=\ \mathrm{span}\{1\}\times\mathrm{span}\{1\}$，$[\boldsymbol{v}_h]$ 表示跨过单元边界 F 的跳跃值.

定义插值算子

$$I_h^1\text{: } u\in H^1(\Omega)\to I_h^1u\in V_h,\int_{l_i}(u-I_h^1u)\mathrm{d}s=0\ (i=1,2,3),$$

$$I_h^2\text{: } \vec{\boldsymbol{p}}=(p_1,p_2)\in(L_2(\Omega))^2\to I_h^2\vec{\boldsymbol{p}}\in\overrightarrow{M}_h,$$

$$\frac{1}{|K|}\int_K(\vec{\boldsymbol{p}}-I_h^2\vec{\boldsymbol{p}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

容易验证 $\|\cdot\|_{1,h}=\left(\sum_{K\in T_h}|\cdot|_{1,K}\right)^{1/2}$ 是 V_h 上的模.

由 V_h 及 $\overrightarrow{M}_h$ 的定义不难知道，若 $u\in H^1(\Omega)$，则 $\forall\boldsymbol{\varphi}_h\in\overrightarrow{M}_h$ 有

$$\sum_{K\in T_h}\int_K\nabla(u-I_h^1u)\boldsymbol{\varphi}_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\forall K\in T_h\ .$$

另一方面，文献[9]对各向异性网格已证明了下面结论:

$$\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}uv_h\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s\leqslant ch|u|_1\|v_h\|_{1,h},\forall K\in T_h\ ,\tag{2}$$

本文所述的 c 都表示与 h 无关的正常数.

引入证明所需的积分不等式[10]

$$\int_0^t\int_0^\tau|\psi(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant c\int_0^t|\psi(s)|^2\mathrm{d}s\ ,\tag{3}$$

其中 ψ 是在 $[0,t]$ 上的可积函数，$t\in[0,T]$.

为了得到方程(1)的 1 个新的混合元的弱形式，下面引入 u 的伴随向量函数

$$\vec{\boldsymbol{p}}=-a\nabla u-\int_0^t b(X,t,\tau)\nabla u(X,\tau)\,\mathrm{d}\tau\ ,$$

同时设 $\gamma(X,t)=a^{-1}(X,t),\ \beta(X,t,\tau)=\gamma(X,t)b(X,t,\tau)$，则方程(1)可写成

$$\begin{cases}u_{tt}+\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{p}}=f, & (X,t)\text{在}\Omega\times(0,\ T]\text{中},\\ \gamma\vec{\boldsymbol{p}}+\nabla u+\int_0^t\beta\nabla u\mathrm{d}\tau=0, & (X,t)\text{在}\Omega\times(0,\ T]\text{中},\\ u(X,t)=0, & (X,t)\text{在}\partial\Omega\times(0,T]\text{上},\\ u(X,0)=u_0,\ u_t(X,0)=u_1, & X\text{在}\Omega\text{中}.\end{cases}\tag{4}$$

与(4)式对应的弱形式为：求 $\{u,\vec{\boldsymbol{p}}\}:[0,T]\to V\times\overrightarrow{M}$，满足

$$\begin{cases}(u_{tt},v)-(\vec{\boldsymbol{p}},\nabla v)=(f,v), & \forall v\in V,\ t\in(0,T],\\ (\gamma\vec{\boldsymbol{p}},\vec{\boldsymbol{q}})+(\nabla u,\vec{\boldsymbol{q}})+\left(\int_0^t\beta\nabla u\mathrm{d}\tau,\vec{\boldsymbol{q}}\right)=0, & \forall\vec{\boldsymbol{q}}\in\overrightarrow{M},\ t\in(0,T],\\ u(X,0)=u_0,\ u_t(X,0)=u_1, & X\in\Omega,\end{cases}\tag{5}$$

相应的有限元逼近为：求 $\{u_h,\vec{\boldsymbol{p}}_h\}:[0,T]\to V_h\times\overrightarrow{M}_h$，满足

$$\begin{cases}(u_{htt},v_h)-(\vec{\boldsymbol{p}}_h,\nabla v_h)_h=(f,v_h),\\ \forall v_h\in V_h,\ t\in(0,T],\\ (\gamma\vec{\boldsymbol{p}}_h,\vec{\boldsymbol{q}}_h)+(\nabla u_h,\vec{\boldsymbol{q}}_h)_h+\left(\int_0^t\beta\nabla u_h\mathrm{d}\tau,\vec{\boldsymbol{q}}_h\right)_h=0,\\ \forall\vec{\boldsymbol{q}}_h\in\overrightarrow{M}_h,\ t\in(0,T],\\ u_h(X,0)=I_h^1u_0,\ u_{h,t}(X,0)=I_h^2u_1,\ X\in\Omega,\end{cases}\tag{6}$$

其中 $(u,v)_h=\sum_{K\in T_h}\int_K uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在不引起混淆的情况下仍将 $(u,v)_h$ 表示为 (u,v).

2 误差分析

记

$$u-u_h=u-I_h^1u+I_h^1u-u_h=\xi+\eta\ ,$$
$$\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{p}}_h=\vec{\boldsymbol{p}}-I_h^2\vec{\boldsymbol{p}}+I_h^2\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{p}}_h=\vec{\boldsymbol{\rho}}+\vec{\boldsymbol{\theta}},$$

下面给出本文的主要结果.

定理 1 设 $\{u,\vec{\boldsymbol{p}}\}$ 和 $\{u_h,\vec{\boldsymbol{p}}_h\}$ 分别是(5)和(6)式的解，$u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ u_{tt}\in H^1(\Omega),\vec{\boldsymbol{p}},\vec{\boldsymbol{p}}_t\in(H^1(\Omega))^2$，则

$$\|u-u_h\|_{1,h}\leqslant ch\left\{\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1+\|u\|_2+\left[\int_0^t\left(\|u_{tt}\|_1^2+\|u\|_2^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}_t\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau\right]^{1/2}\right\},$$

$$\|\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{p}}_h\|_0\leqslant ch\left\{\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1+\left[\int_0^t\left(\|u_{tt}\|_1^2+\|u\|_2^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}_t\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau\right]^{1/2}\right\}.$$

证 对(4)式中第 1 式两端作用 $v_h\ (v_h\in V_h)$，第 2 式两端作用 $\vec{\boldsymbol{q}}_h\ (\vec{\boldsymbol{q}}_h\in\overrightarrow{M}_h)$，并利用格林公式可得如下方程

$$\begin{cases}(u_{tt},v_h)-(\vec{\boldsymbol{p}},\nabla v_h)+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,v_h\mathrm{d}s=(f,v_h),\forall v_h\in V_h,\\ (\gamma\vec{\boldsymbol{p}},\vec{\boldsymbol{q}}_h)+(\nabla u,\vec{\boldsymbol{q}}_h)+(\int_0^t\beta\nabla u\mathrm{d}\tau,\vec{\boldsymbol{q}}_h)=0, \qquad \forall\vec{\boldsymbol{q}}_h\in\overrightarrow{M}_h,\end{cases}\tag{7}$$

于是由(7)式及(6)式得到误差方程

$$\begin{cases}(\eta_{tt},v_h)-(\vec{\boldsymbol{\theta}},\nabla v_h)=(\nabla v_h,\vec{\boldsymbol{\rho}})-(\xi_{tt},v_h)+\\ \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,v_h\mathrm{d}s,\forall v_h\in V_h,\\ (\gamma\vec{\boldsymbol{\theta}},\vec{\boldsymbol{q}}_h)+(\nabla\eta,\vec{\boldsymbol{q}}_h)=-(\gamma\vec{\boldsymbol{\rho}},\vec{\boldsymbol{q}}_h)-(\nabla\xi,\vec{\boldsymbol{q}}_h)-\\ \left(\int_0^t\beta\nabla(u-u_h)\mathrm{d}\tau,\vec{\boldsymbol{q}}_h\right),\forall\vec{\boldsymbol{q}}_h\in\overrightarrow{M}_h,\end{cases}\tag{8}$$

将(8)式中第 2 式两端对 t 求导得

$$(\gamma\vec{\boldsymbol{\theta}}_t+\gamma_t\vec{\boldsymbol{\theta}},\vec{\boldsymbol{q}}_h)+(\nabla\eta_t,\vec{\boldsymbol{q}}_h)=-(\gamma\vec{\boldsymbol{\rho}}_t+\gamma_t\vec{\boldsymbol{\rho}},\vec{\boldsymbol{q}}_h)-(\nabla\xi_t,\vec{\boldsymbol{q}}_h)-\left(\int_0^t\beta\nabla\left((u-u_h)\mathrm{d}\tau\right)_t,\vec{\boldsymbol{q}}_h\right).\tag{9}$$

再将(8)式中第 1 式取 $v_h=\eta_t$，在(9)式中取 $\vec{q}_h=\vec{\theta}$，两式相加得

$$(\eta_{tt},\eta_t)+(\gamma\vec{\theta}_t+\gamma_t\vec{\theta},\vec{\theta})=(\nabla\eta_t,\vec{\rho})-(\xi_{tt},\eta_t)-(\gamma\vec{\rho}_t+\gamma_t\vec{\rho},\vec{\theta})-(\nabla\xi_t,\vec{\theta})+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}\eta_t\mathrm{d}s-\left(\left(\int_0^t\beta\nabla(u-u_h)\mathrm{d}\tau\right)_t,\vec{\theta}\right)=\sum_{i=1}^{6}A_i. \tag{10}$$

由于 γ 为正的有界函数，所以(10)式左端可表示为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\eta_t\|_0^2+\left\|\gamma^{1/2}\vec{\theta}\right\|_0^2\right)+\frac{1}{2}(\gamma_t\vec{\theta},\vec{\theta}).$$

下面对(10)式右端各项进行估计，利用单元的性质可得 $A_1=0$, $A_4=0$, 利用(2)式、插值理论及 ε-Young 不等式，其余各项可分别估计为

$$A_2\leqslant ch^2|u_{tt}|_1^2+c\|\eta_t\|_0^2,$$

$$A_3\leqslant ch^2\left(\left|\vec{p}\right|_1^2+\left|\vec{p}_t\right|_1^2\right)+c\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2,$$

$$A_5=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}\eta\mathrm{d}s\right)-\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}_t\cdot\vec{n}\eta\mathrm{d}s\leqslant ch^2\left|\vec{p}_t\right|_1^2+c\|\eta\|_{1,h}^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}\eta\mathrm{d}s\right),$$

$$A_6=(\beta\nabla(u-u_h),\vec{\theta})+\left(\int_0^t\beta_t\nabla(u-u_h)\mathrm{d}\tau,\vec{\theta}\right)=(\beta\nabla(\xi+\eta),\vec{\theta})+\left(\int_0^t\beta_t\nabla(\xi+\eta)\mathrm{d}\tau,\vec{\theta}\right)\leqslant ch^2|u|_2^2+ch^2\int_0^t|u|_2^2\mathrm{d}\tau+c\|\eta\|_{1,h}^2+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+c\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2.$$

又由于 $(\gamma_t\vec{\theta},\vec{\theta})\geqslant 0$，于是有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\eta_t\|_0^2+\left\|\gamma^{1/2}\vec{\theta}\right\|_0^2\right)\leqslant ch^2\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)+ch^2\int_0^t|u|_2^2\mathrm{d}\tau+c\|\eta\|_{1,h}^2+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+c\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2+c\|\eta_t\|_0^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}\eta\mathrm{d}s\right). \tag{11}$$

对(11)式两端从 0 到 t 积分，利用不等式(3)，并注意到 $\vec{\theta}(X,0)=\mathbf{0}$ 及 $\eta_t(X,0)=0$ 得

$$\|\eta_t\|_0^2+\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+c\int_0^t\left(\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2+\|\eta_t\|_0^2\right)\mathrm{d}\tau+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\vec{p}\cdot\vec{n}\eta\mathrm{d}s\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+c\int_0^t\left(\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2+\|\eta_t\|_0^2\right)\mathrm{d}\tau+ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\varepsilon\|\eta\|_{1,h}^2. \tag{12}$$

根据 Gronwall 引理有

$$\|\eta_t\|_0^2+\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\varepsilon\|\eta\|_{1,h}^2. \tag{13}$$

为了估计 $\|\eta\|_{1,h}^2$ 这一项，在(8)式中第 2 式取 $\vec{q}_h=\nabla\eta$ 可得

$$(\nabla\eta,\nabla\eta)=-(\gamma\vec{\theta},\nabla\eta)-(\gamma\vec{\rho},\nabla\eta)-(\nabla\xi,\nabla\eta)-\left(\int_0^t\beta(\nabla\xi+\nabla\eta)\mathrm{d}\tau),\nabla\eta\right). \tag{14}$$

利用 ε-Young 不等式, (14)式右端各项可估计为

$$\left|(\gamma\vec{\theta},\nabla\eta)\right|\leqslant c\left\|\vec{\theta}\right\|_0\|\eta\|_{1,h}\leqslant c\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2+\frac{1}{4}\|\eta\|_{1,h}^2,$$

$$\left|(\gamma\vec{\rho},\nabla\eta)\right|\leqslant ch\left\|\vec{p}\right\|_1\|\eta\|_{1,h}\leqslant ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\frac{1}{4}\|\eta\|_{1,h}^2,$$

$$\left|\left(\int_0^t\beta(\nabla\xi+\nabla\eta)\mathrm{d}\tau),\nabla\eta\right)\right|\leqslant\left|\left(\int_0^t\beta\nabla\xi\,\mathrm{d}\tau,\nabla\eta\right)\right|+\left|\left(\int_0^t\beta\nabla\eta\,\mathrm{d}\tau,\nabla\eta\right)\right|\leqslant ch^2\int_0^t\|u\|_2^2\mathrm{d}\tau+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\|\eta\|_{1,h}^2,$$

并注意到 $(\nabla\xi,\nabla\eta)=0$．于是

$$\|\eta\|_{1,h}^2\leqslant ch^2\left(\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\int_0^t\|u\|_2^2\mathrm{d}\tau\right)+c\int_0^t\|\eta\|_{1,h}^2\mathrm{d}\tau+c\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2, \tag{15}$$

再次利用 Gronwall 引理得

$$\|\eta\|_{1,h}^2\leqslant ch^2\left(\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\int_0^t\|u\|_2^2\mathrm{d}\tau\right)+c\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2. \tag{16}$$

将(16)式代入(13)式，再次利用积分不等式(3)，并取充分小的 ε 可得

$$\|\eta_t\|_0^2+\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau+ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2+c\int_0^t\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\mathrm{d}\tau,$$

进而有

$$\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau+ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2+c\int_0^t\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\mathrm{d}\tau.$$

借助 Gronwall 引理可以得到

$$\left\|\vec{\theta}\right\|_0^2\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau+ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2, \tag{17}$$

进一步,由(15)式可知,

$$\|\eta\|_{1,h}^2\leqslant ch^2\int_0^t\left(\|u\|_2^2+\|u_{tt}\|_1^2+\left\|\vec{p}\right\|_1^2+\right.$$

$$\left\|\vec{\boldsymbol{p}}_t\right\|_1^2\Big)\mathrm{d}\tau+ch^2\left\|\vec{p}\right\|_1^2. \tag{18}$$

由(17)~ (18)式及三角不等式得

$$\|u-u_h\|_{1,h}\leqslant\|\xi\|_{1,h}+\|\eta\|_{1,h}\leqslant ch\Big\{\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1+\|u\|_2+$$

$$\left[\int_0^t\left(\|u_{tt}\|_1^2+\|u\|_2^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}_t\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau\right]^{1/2}\Big\},$$

$$\|\vec{\boldsymbol{p}}-\vec{\boldsymbol{p}}_h\|_0\leqslant\|\vec{\boldsymbol{\rho}}\|_0+\|\vec{\boldsymbol{\theta}}\|_0\leqslant ch\Big\{\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1+$$

$$\left[\int_0^t\left(\|u_{tt}\|_1^2+\|u\|_2^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}\|_1^2+\|\vec{\boldsymbol{p}}_t\|_1^2\right)\mathrm{d}\tau\right]^{1/2}\Big\}.$$

注 1 本文的结论对文献[9]中的各向异性网格也是成立的.

3 参考文献

[1] 林群, 严宁宁. 高效有限元的构造与分析 [M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.

[2] 窦纳. 非线性双曲型积分微分方程有限元逼近的误差分析 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2001, 16(3): 337-347.

[3] 赵继超, 张铁. 双曲型积分微分方程的有限元体积方法 [J]. 应用数学, 2003, 16(3): 122-127.

[4] 王瑞文, 姜子文. 双曲型积分-微分方程混合元法的误差估计[J]. 工程数学学报, 2005, 22(4): 619-627.

[5] 王瑞文. 双曲型积分微分方程 H^1-Galerkin 混合元法的误差估计 [J]. 计算数学, 2006, 28(1): 19-30.

[6] 石东洋, 王海红. 双曲型积分微分方程一个新的 H^1-Galerkin 混合元格式 [J]. 工程数学学报, 2009, 26(4): 648-652.

[7] 石东洋, 谢萍丽, 陈绍春. 双曲型积分微分方程的各向异性非协调有限元逼近 [J]. 应用数学学报, 2007, 30(4): 654-666.

[8] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems [M]. North-Holland: Amsterdam, 1978.

[9] Shi Dongyang, Xu Chao. Anisotropic nonconforming Crouzeix-Raviart type FEM for second-order elliptic problems [J]. Appl Math Mech, 2012, 33(2): 243-252.

[10] 刘洋, 李宏, 何斯日古楞. 伪双曲型积分-微分方程的 H^1-Galerkin 混合元法误差估计 [J].高等学校计算数学学报, 2010, 32(1): 1-20.

A New Nonconforming Mixed Finite Element Formulation for Hyperbolic Type Integro-Differential Equations

WU Zhi-qin[1], SHI Dong-yang[2*]

(1. School of Mathematics and Statistics, Xuchang University, Xuchang Henan 461000, China;
2. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou Henan 450052, China)

Abstract: By utilizing the properties of the interpolation on the element, mean-value and derivative delivery techniques, a Crouzeix-Raviart type nonconforming linear triangular finite element is applied to the hyperbolic type integro-differential equations and a new mixed element formulation is established. The optimal error estimates in H^1-norm and in L^2-norm are obtained.

Key words: hyperbolic type integro-differential equations; nonconforming finite element; new mixed finite element formulation; convergence analysis

(责任编辑: 曾剑锋)