文章编号: 1000-5862(2012)05-0491-04

一类奇异微分代数系统的数值解

任　磊[1], 孙乐平[2]

(1. 商丘师范学院数学系, 河南　商丘　476000; 2. 上海师范大学数理学院, 上海　200234)

摘要: 首先利用级数解的 Padé 逼近算法, 给出了一类奇异微分代数系统的数值解, 然后运用 4 阶隐式 Adams 方法及经典 RK 方法给出的初值给出了此类系统的数值解, 最后通过误差估计表明 Padé 逼近算法是可行的.

关键词: 奇异微分代数系统; Padé 逼近; 4 阶隐式 Adams 方法

中图分类号: O 241.81　　　　文献标志码: A

0　引言

微分代数系统在许多领域有着广泛的应用, 如许多电路分析模型、电力系统、化学反应模拟、优化控制、刚体系统、弹道预定路径控制等问题都归结为微分代数系统的数学模型. 随着微分代数问题在科学计算和工程上的不断出现, 一些学者开始研究微分代数系统的数值解. 在文献[1-3]中, S.L.V. Campbell 利用 Drazin 逆给出了连续微分代数系统的解析解; C. W. Gear 在文献[4-6]中研究了奇异微分代数系统的数值解; S.K.Vanani 等在文献[7]中利用多元 2 次曲面近似法研究了变系数奇异微分代数系统的数值解; 其他学者如 Rose、Dziurla、Newcomb 等都做了相应的研究工作, 但是这些研究中很少涉及差分格式的数值方法.

本文考虑如下线性奇异微分代数系统

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in C^{n\times n}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 首先利用文献[8]中的 Padé 逼近方法给出这类奇异微分代数系统的近似解, 然后利用 4 阶隐式 Adams 法(Runge-Kutta 给出初值)给出这类奇异微分代数系统的数值解, 并给出以上诸方法的误差估计.

1　微分代数系统的级数解

考虑如下微分代数系统[9-10]:

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=0,\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \end{cases} \tag{2}$$

(2)式的解可以假设成如下形式:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{e}t, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 是一个向量函数. 把(3)式代入(2)式, 并且忽略高次项, 得到一个关于 $\boldsymbol{e}$ 的线性方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{B}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是常数矩阵. 解方程(4), 则可以得到(3)式中 $\boldsymbol{e}$ 的系数. 重复以上过程, 可以得到(2)式的任意阶级数解, 而这个级数解可以通过转换成 Padé 级数, 从而得到微分代数系统(2)的 Padé 逼近.

对于微分代数系统级数解的具体求解, 先定义一类级数形如

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x})&=f_0+f_1t+f_2t^2+\cdots+\\ &(f_n+p_1e_1+\cdots+p_me_m)t^n, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是常数, $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 是向量 $\boldsymbol{e}$ 的基, m 是向量 $\boldsymbol{e}$ 的维数. 因为解向量的每一个元素都可以用形如(5)式来表示, 所以, 可以把(3)式的第 i 个分量写成

$$x_i=x_{i,0}+x_{i,1}t+x_{i,2}t^2+\cdots+e_it^n, \tag{6}$$

把(6)式代入(2)式, 可以得到

$$f_i=(f_{i,n}+p_{i,1}e_1+\cdots+p_{i,m}e_m)t^{n-j}+Q(t^{n-j+1}), \tag{7}$$

其中 f_i 是系统(2)解的第 i 个分量, 并且当 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$ 含有 $\boldsymbol{x}'$ 时 $j=1$, 否则 $j=0$.

由(7)式得到线性方程组(4)的系数矩阵的元素为

$$A_{i,j}=p_{i,j}, \tag{8}$$

求解此线性方程组, 可以求得 $e_i(i=1,\cdots,m)$. 将

收稿日期: 2012-04-27
作者简介: 国家自然科学基金(11071170)资助项目.
作者简介: 任　磊(1978-), 男, 河南信阳人, 讲师, 主要从事微分方程数值解的研究.

$e_i(i=1,\cdots,m)$ 代入(6)式，得到 $x_i(i=1,\cdots,m)$，其中 $x_i(i=1,\cdots,m)$ 是次数为 n 的多项式，重复(6)~(8)式的过程，得到系统(2)的任意次的级数解．但是级数解并不是目的，本文需要得到系统(2)的帕德(Padé)级数形式的数值解．

2 帕德(Padé)逼近

假定任一函数有如下级数形式：

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i t^i, \tag{9}$$

帕德逼近有如下分数形式：

$$[L/M]=\frac{a_0+a_1t+\cdots+a_Lt^L}{b_0+b_1t+\cdots+b_Mt^M}. \tag{10}$$

从形式上，可以看出(10)式与(9)式有尽可能一致的麦克劳林展开式，注意到(10)式中有 L+1 个分子系数，M+1 个分母系数．取 $b_0=1$，于是(10)式共有 L+M+1 个未知数，这表明[L/M]应该与级数(9)中的 $1,t,t^2,\cdots,t^{L+M}$ 对应，且有

$$\sum_{i=0}^{\infty}c_i t^i=\frac{a_0+a_1t+\cdots+a_Lt^L}{b_0+b_1t+\cdots+b_Mt^M}+Q(t^{L+M+1}), \tag{11}$$

(11)式可化为

$$\begin{aligned}&(b_1+b_2+\cdots+b_Mt^M)(c_0+c_1t+\cdots)=\\&a_0+a_1t+\cdots+a_Lt^L+Q(t^{L+M+1}),\end{aligned} \tag{12}$$

比较 $t^{L+1},t^{L+2},\cdots,t^{L+M}$ 的相关系数，有

$$\begin{aligned}&b_Mc_{L-M+1}+b_{M-1}c_{L-M+2}+\cdots+b_0c_{L+1}=0,\\&b_Mc_{L-M+2}+b_{M-1}c_{L-M+3}+\cdots+b_0c_{L+2}=0,\\&\qquad\vdots\\&b_Mc_L+b_{M-1}c_{L+1}+\cdots+b_0c_{L+M}=0.\end{aligned} \tag{13}$$

如果 $j<0$，定义 $c_j=0$．由于 $b_0=1$，方程(13)变成如下的 M 个与分母系数相关的线性方程组

$$\begin{bmatrix}c_{L-M+1}&c_{L-M+2}&c_{L-M+3}&\cdots&c_L\\c_{L-M+2}&c_{L-M+3}&c_{L-M+4}&\cdots&c_{L+1}\\c_{L-M+3}&c_{L-M+4}&c_{L-M+5}&\cdots&c_{L+2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\c_L&c_{L+1}&c_{L+2}&\cdots&c_{L+M+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_M\\b_{M-1}\\b_{M-2}\\\vdots\\b_1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}c_{L+1}\\c_{L+2}\\c_{L+3}\\\vdots\\c_{L+M}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

通过求解方程(14)，便可以求得分母的系数 $b_i(i=1,\cdots,M)$．比较(12)式中 $1,t,t^2,\cdots,t^L$ 的相关系数，得到如下方程：

$$\begin{aligned}&a_0=c_0,\\&a_1=c_1+b_1c_0,\\&a_2=c_2+b_1c_1+b_2c_0,\\&\qquad\vdots\\&a_L=c_L+\sum_{i=1}^{\min(L,M)}b_ic_{L-i}.\end{aligned} \tag{15}$$

从上述方程中求出 a_i．于是(14)式和(15)式给出了 Padé 级数的分子和分母的系数，由此建立了[L/M]的 Padé 近似解．

3 Adams 方法

4 阶隐式 Adams 公式为

$$y_{n+3}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(9f_{n+3}+19f_{n+2}-5f_{n+1}+f_n),$$

把 Adams 公式应用到(1)式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{n+3}=&\left(\boldsymbol{A}+\frac{9h}{24}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\left(\left(\boldsymbol{A}-\frac{19h}{24}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}_{n+2}+\right.\\&\left.\frac{5h}{24}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{n+1}-\frac{h}{24}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_n\right).\end{aligned} \tag{16}$$

考虑计算结果的可靠性，用经典的 4 阶 Runge-Kutta 方法计算出初值，然后把初值代入(16)式，通过 Matlab 编程求出(1)式的数值解．

将经典的 4 阶 Runge-Kutta 方法应用将到(1)式可得

$$\begin{cases}Ak_{n,1}+Bx_n=0,\\Ak_{n,2}+B(x_n+\frac{1}{2}hk_{n,1})=0,\\Ak_{n,3}+B(x_n+\frac{1}{2}hk_{n,2})=0,\\Ak_{n,4}+B(x_n+hk_{n,3})=0,\end{cases} \tag{17}$$

在(1)式的 1 个相容初始向量的条件下，应用(17)式计算得到 4 阶隐式 Adams 公式的初值序列．

通过方法(16)和(17)对系统(1)的求解，得到收敛阶较高的数值解．

4 数值试验

考虑如下奇异微分代数方程

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2&3&2\\1&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\\x_3'(t)\end{pmatrix}+\\&\begin{pmatrix}18&14&10\\0&1&2\\-27&-21&-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=0,\end{aligned} \tag{18}$$

它的解析解为

$$\boldsymbol{x}(t)=(1/6+\mathrm{e}^{2t/3}/6,-1/3+4\mathrm{e}^{2t/3}/3,1/6-13\mathrm{e}^{2t/3}/6)'.$$

(i)用帕德(Padé)逼近求解.

从初值 $\boldsymbol{x}(0)=(1/3,1,-2)'$ 出发, 假设方程(18)的解为

$$\begin{cases} x_1(t)=1/3+e_1t, \\ x_2(t)=1+e_2t, \\ x_3(t)=-2+e_3t. \end{cases} \tag{19}$$

将(19)式代入方程(18), 并忽略高次项, 有

$$\begin{cases} (2e_1+3e_2+2e_3)+Q(t)=0, \\ (e_1-2e_3)+Q(t)=0, \\ (9e_1+7e_2+5e_3)t=0. \end{cases} \tag{20}$$

于是可以得到关于 e_i 的线性方程组 $\boldsymbol{Ae}=\boldsymbol{0}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

从中可以解得 $\boldsymbol{e}=(1/9,8/9,-13/9)'$, 把 $\boldsymbol{e}$ 代入(19)式.

假设方程(18)的解为

$$\begin{cases} x_1(t)=1/3+t/9+e_1t^2, \\ x_2(t)=1+8t/9+e_2t^2, \\ x_3(t)=-2-13t/9+e_3t^2, \end{cases} \tag{21}$$

把(21)式代入方程(18), 忽略高次项, 可得

$$\begin{cases} (4e_1+6e_2+4e_3)t+Q(t^2)=0, \\ (2e_1-4e_3-2)t+Q(t^2)=0, \\ (-27e_1-21e_2-15e_3)t^2=0, \end{cases}$$

类似(20)式可以解出 $\boldsymbol{e}=(1/27,8/27,-13/27)'$, 把 $\boldsymbol{e}$ 代入(19)式.

又假设方程(18)的解为

$$\begin{cases} x_1(t)=1/3+t/9+t^2/27+e_1t^3, \\ x_2(t)=1+8t/9+8t^2/27+e_2t^3, \\ x_3(t)=-2-13t/9-13t^2/9+e_3t^3. \end{cases}$$

重复上面的过程, 得到方程(18)的级数解

$$x_1(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}t+\frac{1}{27}t^2+\frac{2}{243}t^3+\frac{1}{729}t^4+\frac{2}{10\,935}t^5+\frac{2}{98\,415}t^6+\frac{4}{2\,066\,715}t^7+\frac{1}{6\,200\,145}t^8+\frac{2}{167\,403\,915}t^9+O(t^{10}),$$

$$x_2(t)=1+\frac{8}{9}t+\frac{8}{27}t^2+\frac{16}{243}t^3+\frac{8}{729}t^4+\frac{16}{10\,935}t^5+\frac{16}{98\,415}t^6+\frac{32}{2\,066\,715}t^7+\frac{8}{6\,200\,145}t^8+\frac{16}{167\,403\,915}t^9+O(t^{10}),$$

$$x_3(t)=-2-\frac{13}{9}t-\frac{13}{27}t^2-\frac{26}{243}t^3-\frac{13}{729}t^4-\frac{26}{10\,935}t^5-\frac{26}{98\,415}t^6-\frac{52}{2\,066\,715}t^7-\frac{13}{6\,200\,145}t^8-\frac{26}{167\,403\,915}t^9+O(t^{10}).$$

下面利用 Maple[11]把上述级数解转化为帕德级数

$$v_1(t)=[5/4]=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{81}t+\frac{4}{243}t^2+\frac{1}{1\,701}t^3+\frac{1}{15\,309}t^4+\frac{1}{688\,905}t^5}{1-\frac{8}{27}t+\frac{1}{27}t^2-\frac{4}{1\,701}t^3+\frac{1}{15\,309}t^4},$$

$$v_2(t)=[5/4]=\frac{1+\frac{16}{27}t+\frac{17}{243}t^2+\frac{44}{5\,103}t^3+\frac{19}{45\,927}t^4+\frac{8}{688\,905}t^5}{1-\frac{8}{27}t+\frac{1}{27}t^2-\frac{4}{1\,701}t^3+\frac{1}{15\,309}t^4},$$

$$v_3(t)=[5/4]=\frac{-2-\frac{23}{27}t-\frac{31}{243}t^2-\frac{67}{5\,103}t^3-\frac{32}{45\,927}t^4-\frac{13}{688\,905}t^5}{1-\frac{8}{27}t+\frac{1}{27}t^2-\frac{4}{1\,701}t^3+\frac{1}{15\,309}t^4}.$$

帕德逼近对大多数微分代数方程而言是简单有效的, 用 Matlab 分别计算在同步长下帕德逼近与解析解, 给出误差估计表(见表 1).

(ii)用 4 阶隐式 Adams 方法求解.

把(16)式应用到方程(18), 可以得到显示多步法

$$\boldsymbol{x}_3=\left(\boldsymbol{A}+\frac{9h}{24}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\left(\left(\boldsymbol{A}-\frac{19h}{24}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}_2+\frac{5h}{24}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1-\frac{h}{24}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_0\right),$$

取 $\boldsymbol{x}(0)=(1/3,1,-2)'$, 再利用(17)式计算初值 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{x}_1=(0.344\,823\,184\,301\,21,1.091\,918\,807\,703\,00,-2.149\,368\,070\,452\,37)',$$

$$\boldsymbol{x}_2=(0.357\,105\,135\,300\,29,1.190\,174\,416\,017\,63,-2.309\,033\,426\,057\,40)'.$$

从 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 出发, 代入(16)式通过编程计算出方程(18)的数值解.

假设 $\boldsymbol{x}(t_n)$ 是方程(18)的解析解, $\boldsymbol{x}_n$ 是数值解, 误差 E_n 定义为 $E_n=\|\boldsymbol{x}(t_n)-\boldsymbol{x}_n\|_2/\|\boldsymbol{x}(t_n)\|_2$, 表 1 列出了 2 种数值方法的误差.

5　结论

从表 1 可以看出, 帕德(Padé)逼近的计算精度比 4 阶隐式 Adams 方法高, 所以, 帕德(Padé)逼近在解

决此类奇异微分代数方程是简单易行的，而且可以得到较高的逼近效果，这种效果还可以通过 Maple 作图来体现.

表 1 帕德(Padé)逼近和 4 阶隐式 Adams 方法的误差

t	E_n(Padé Approx)	E_n(Adams Method)
0.1	1.437 799 697 43e-010	3.610 603 629 42e-008
0.2	1.455 172 862 40e-010	5.775 142 200 43e-004
0.3	1.527 388 658 11e-010	1.147 918 568 41e-004
0.4	1.648 167 788 70e-010	1.711 893 521 04e-004
0.5	1.805 690 365 51e-010	2.270 086 942 45e-004
0.6	1.979 362 661 16e-010	2.823 084 219 62e-003
0.7	2.120 782 313 41e-010	3.371 414 028 01e-003
0.8	2.107 920 186 45e-010	3.915 553 625 68e-003
0.9	1.739 141 907 68e-010	4.455 933 691 88e-003
1.0	2.148 692 315 99e-009	4.992 942 733 65e-003

6 参考文献

[1] Campbell S L V. Singular systems of differential equations Ⅰ [M]. Great Britian: Pitman Publishing Co, 1980.

[2] Campbell S L V. Linear systems of differential equations with singular coefficients [J]. SIAM J Math Anal, 1997, 8(6): 1057-1066.

[3] Campbell S L V. Singular systems of differential equations Ⅱ [M]. Great Britian: Pitman Publishing Co, 1982.

[4] Gear C W. Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations [J]. IEEE Trans Circuit Theory, 1971, 18(1): 89-95.

[5] Gear C W. Numerical initial value problems in ODEs [J]. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1971, 7(1): 77-90.

[6] Gear C W. Differential-algebraic equations, indices, and integral equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1990, 27(6): 1527-1534.

[7] Vanani S K, Aminataei A. Numerical solution of differential algebraic equations using a multiquadric approximation scheme [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2011, 53(5/6): 659-666.

[8] Celik E, Bayram M. On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade series [J]. Appl Math Comput, 2003, 137(1): 151-160.

[9] Brenan K E, Campbell S L V, Petzold L R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations [M]. North-Holland: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.

[10] Peter K, Volker M. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution [M]. Zürich: European Mathematical Society, 2006.

[11] Frank G. Maple V [M]. Boca Raton: CRC Press, 1996.

On the Numerical Solution of Differential Algebraic Systems with Singular Coefficients

REN Lei[1], SUN Le-ping[2]

(1. Department of Mathematics, Shangqiu Normal College, Shangqiu He’nan 476000, China;
2. Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234,China)

Abstract: The numerical solution of differential algebraic systems with singular coefficients is given and implemented with the Padé approximation.Then the numerical solution is also given by four-order implicit Adams method. At last, Padé approximation is shown efficiently by the errors of the numerical experiment.

Key words: differential algebraic systems with singular coefficients; Padé approximation; four-order implicit Adams method

(责任编辑：曾剑锋)