文章编号: 1000-5862(2012)05-0499-03

关于一类具偏差变元的 Duffing 型方程的周期解注记

林文贤

(韩山师范学院数学与应用数学系, 广东 潮州 521041)

摘要: 利用重合度理论以及更精确的先验估计研究了一类具有偏差变元的 Duffing 型方程的周期解问题, 得到了这类方程的周期解存在性的结果, 改进和推广了已有文献的相关结果, 并给出其应用实例.

关键词: Duffing 型方程; 周期解; 重合度

中图分类号: O 175.14　　　文献标志码: A

0 引言

Duffing 型方程的周期解[1-7]有着广泛的应用背景,如电讯工程中的强迫振荡、机床颤振的非线性振动等, 因而一直受到人们的热切关注. 文献[8]研究了如下的具有偏差变元的 Duffing 型方程

$$x''+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t) \tag{1}$$

的 ω- 周期解的存在性问题, 其中 $\omega>0$ 为常数, $\tau,p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 和 $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数, τ,g,p 关于 t 为 ω- 周期的且 $\int_0^{2\pi}p(t)\,\mathrm{d}t=0$, 其主要结果如下:

定理 A　若存在非负常数 d,m 和 n ,使 $xg(t,x)>0,\ \forall t\in\mathbf{R},|x|\geqslant d,m<1/(2\omega^2)$, 并且使下列条件之一成立:

(i) 当 $t\in\mathbf{R},x\leqslant -d$ 时, $g(t,x)\geqslant mx-n$;

(ii) 当 $t\in\mathbf{R},x\geqslant d$ 时, $g(t,x)\leqslant mx+n$,

则方程(1)至少存在 1 个 ω- 周期解.

定理 B　若存在非负常数 d,m 和 n , 使 $xg(t,x)<0,\ \forall t\in\mathbf{R},|x|\geqslant d,m<1/(2\omega^2)$, 并且使下列条件之一成立:

(i) 当 $t\in\mathbf{R},x\leqslant -d$ 时, $g(t,x)\leqslant -mx+n$;

(ii) 当 $t\in\mathbf{R},x\geqslant d$ 时, $g(t,x)\geqslant -mx-n$,

则方程(1)至少存在 1 个 ω- 周期解.

本文利用 Mawhin 连续定理[9], 采用更精确的先验估计, 减弱了定理 A 和定理 B 的条件, 从而改进和发展了文献[8]的结果, 且文献[10]的主要结果也成为本文的特例. 本文引入以下记号:

$$|x|_k=\left(\int_0^{\omega}|x(t)|^k\,\mathrm{d}t\right)^{1/k},|x|_\infty=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|,$$

$$X=\left\{x\mid x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ x(t+\omega)=x(t),\ \forall t\in\mathbf{R}\right\}.$$

定义范数为 $\|x\|_X=\max\left\{|x|_\infty,|x'|_\infty\right\}$, $Y=\{x\mid x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ x(t+\omega)=x(t),\ \forall t\in\mathbf{R}\}$, 定义范数为 $\|x\|_Y=|x|_\infty$, 则 X,Y 均为 Banach 空间.

在 X 上定义线性算子为

$$L:D(L)\subset X\to Y,Lx=x'',$$

$$D(L)=\left\{x\mid x\in X,x''\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\right\},$$

定义非线性算子为

$$N:X\to Y,Nx=-g(t,x(t-\tau(t)))+p(t).$$

易得 $\mathrm{Ker}L=\mathbf{R},\mathrm{Im}\,L=\left\{x\mid x\in Y,\int_0^{\omega}x(s)\mathrm{d}s=0\right\}$, 因此, L 是指标为 0 的 Fredholm 算子.

令投影算子 $P:X\to \mathrm{Ker}L$ 和 $Q:Y\to Y/\mathrm{Im}\,L$ 为 $Px(t)=x(0)=x(\omega),\quad Qx(t)=\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}x(s)\mathrm{d}s$, 则 $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}L$ 且 $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}\,L$. 令 $L_P=L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}$, 易证 L_P 是可逆的, 且其逆为

$$L_P^{-1}:\mathrm{Im}\,L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P,$$

$$L_P^{-1}y(t)=-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}(t-s)y(s)\mathrm{d}s.$$

1 主要结果

定理1　若存在非负常数 d,m 和 n , 使 $xg(t,x)>0,\ \forall t\in\mathbf{R},|x|\geqslant d,m<2/\omega^2$, 并且使下列条件之一成立:

收稿日期: 2012-01-10

作者简介: 林文贤(1966-), 男, 广东潮州人, 教授, 主要从事泛函微分方程的研究.

(i) 当 $t\in\mathbf{R},x\leqslant -d$ 时, $g(t,x)\geqslant mx-n$;

(ii) 当 $t\in\mathbf{R},x\geqslant d$ 时, $g(t,x)\leqslant mx+n$,

则方程(1)至少存在 1 个 ω- 周期解.

证　首先引入辅助方程

$$x''+\lambda g(t,x(t-\tau(t)))=\lambda p(t)\ ,\ \lambda\in(0,1)\ . \tag{2}$$

设 $x(t)$ 是(2)式的任一 ω- 周期解，将(2)式两边同时从 0 到 ω 积分得

$$\int_0^{\omega}[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\omega}g(t,x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t=0, \tag{3}$$

则由积分中值定理有，$\exists t^*\in[0,\omega]$，使得 $g(t^*,x(t^*-\tau(t^*)))=0$，记 $t^*-\tau(t^*)=k\omega+t_0$，其中 $t_0\in[0,\omega]$，且 k 为整数，则有 $x(t^*-\tau(t^*))=x(k\omega+t_0)=x(t_0)$，由条件得 $|x(t_0)|=|x(t^*-\tau(t^*))|\leqslant d$．又由连续函数性质知，$\exists t_1\in[t_0,t_0+\omega]$，使得 $|x(t_1)|=\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\omega}|x(t)|$，于是 $x(t_1)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}x'(s)\mathrm{d}s$，所以

$$|x(t_1)|\leqslant|x(t_0)|+\int_{t_0}^{t_1}|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant d+\int_{t_0}^{t_1}|x'(s)|\mathrm{d}s. \tag{4}$$

此外还有 $x(t_1)=x(t_0+\omega)-\int_{t_1}^{t_0+\omega}x'(s)\mathrm{d}s$，所以

$$|x(t_1)|\leqslant|x(t_0+\omega)|+\int_{t_1}^{t_0+\omega}|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$d+\int_{t_1}^{t_0+\omega}|x'(s)|\mathrm{d}s. \tag{5}$$

(4)式和(5)式相加得

$$|x(t)|\leqslant|x(t_0)|\leqslant d+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+\omega}|x'(s)|\mathrm{d}s=$$
$$d+\frac{1}{2}\int_0^{\omega}|x'(s)|\mathrm{d}s,$$

从而由 Schwarz 不等式有

$$|x|_{\infty}=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|\leqslant d+\frac{\sqrt{\omega}}{2}|x'|_2\ . \tag{6}$$

现记

$$[x(t-\tau(t))<-d]=\{t\,|\,t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))<-d\},$$
$$[x(t-\tau(t))\geqslant -d]=\{t\,|\,t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))\geqslant -d\},$$
$$[x(t-\tau(t))>d]=\{t\,|\,t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))>d\},$$
$$[x(t-\tau(t))\leqslant d]=\{t\,|\,t\in[0,\omega],x(t-\tau(t))\leqslant d\}.$$

情形 **1**　设条件(i)成立,由(3)式有

$$\int_{[x(t-\tau(t))>d]}|g(t,x(t-\tau(t)))|\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_{[x(t-\tau(t))>d]}g(t,x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t=$$
$$\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant d]}g(t,x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t. \tag{7}$$

结合(7)式和条件(i)有

$$\int_{[x(t-\tau(t))>d]}|g(t,x(t-\tau(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant d]}|g(t,x(t-\tau(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{[t:t\in[0,\omega],|x(t-\tau(t))|\leqslant d]}|g(t,x(t-\tau(t)))|\,\mathrm{d}t+$$
$$\int_{[x(t-\tau(t))<d]}|g(t,x(t-\tau(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant\omega\big(\max\{|g(t,x)|:$$
$$t\in\mathbf{R},|x|\leqslant d\}+n\big)+2m\omega|x'|_{\infty}\ . \tag{8}$$

将方程(2)两边同乘以 $x(t)$ 并从 0 到 ω 积分，由(6)式和(8)式有

$$|x'|_2^2=\lambda\int_0^{\omega}\big[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)\big]x(t)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\lambda\int_0^{\omega}\big[|g(t,x(t-\tau(t)))|+|p(t)|\big]|x(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant$$
$$|x|_{\infty}\left[\int_0^{\omega}|g(t,x(t-\tau(t)))|\,\mathrm{d}t+\int_0^{\omega}|p(t)|\,\mathrm{d}t\right]\leqslant$$
$$\Bigg[2\omega\big(\max\{|g(t,x)|:t\in\mathbf{R},|x|\leqslant d\}+n\big)+|p|_{\infty}+$$
$$2m\omega\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}|x'|_2+d\right)\Bigg]\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}|x'|_2+d\right)=$$
$$\left[\theta+2m\omega\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}|x'|_2+d\right)\right]\left(\frac{\sqrt{\omega}}{2}|x'|_2+d\right)=$$
$$\frac{1}{2}m\omega^2|x'|_2^2+\left(\frac{\theta}{2}+2dm\omega\right)\sqrt{\omega}|x'|_2+d(\theta+2dm\omega), \tag{9}$$

其中 $\theta=2\omega\big(\max\{|g(t,x)|:t\in\mathbf{R},|x|\leqslant d\}+n\big)+|p|_{\infty}$，并注意到 $m<2/\omega^2$，由(6)式和(9)式可知，存在常数 D_1 使得

$$|x'|_2<D_1,\quad |x|_{\infty}\leqslant d+\frac{\sqrt{\omega}}{2}|x'|_2<D_1. \tag{10}$$

由于 $x(0)=x(\omega)$，$\exists\xi\in[0,\omega]$，使得 $x'(\xi)=0$，从而

$$|x'|_{\infty}=|x'(\xi)+\int_{\xi}^{\omega}x''(s)\mathrm{d}s|\leqslant\int_0^{\omega}|x''(s)|\,\mathrm{d}s. \tag{11}$$

因此，由(10)式和(11)式有

$$|x'|_{\infty}\leqslant\int_0^{\omega}|x''(s)|\,\mathrm{d}s=\lambda\int_0^{\omega}[g(t,x(t-\tau(t)))-p(t)]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\omega\cdot\sup\{|g(t,x)|:t\in\mathbf{R},|x|\leqslant D_1\}+\omega|p|_{\infty}:=D_2. \tag{12}$$

情形 **2**　设条件(ii)成立，则类似于情形 1 的证明，可得(10)式和(12)式．于是，由(10)式和(12)式有

$$\|x\|_X\leqslant|x|_{\infty}+|x'|_{\infty}<D_1+D_2:=M_1.$$

余下的证明与文献[1]中的定理 1 证明类似，略.

类似于定理 1 的证明，可以证明如下结论成立.

定理 2　若存在非负常数 d,m 和 n，使 $xg(t,x)<0$，$\forall t\in\mathbf{R},|x|\geqslant d,m<2/\omega^2$，并且使下列条件之一成立:

(i) 当 $t\in\mathbf{R},x\leqslant -d$ 时, $g(t,x)\leqslant -mx+n$;

(ii) 当 $t\in\mathbf{R},x\geqslant d$ 时, $g(t,x)\geqslant -mx-n$,

则方程(1)至少存在 1 个 ω- 周期解.

注 1　定理 1 和定理 2 分别改进和包含了定理 A 和定理 B.

作为应用，给出如下例子.

例 1　考虑如下方程

$$x''(t)+g(t,x(t-\sin^2 t))=\sin t, \qquad (13)$$

其中当 $x \geqslant 0$时, $g(t,x)=x^9 e^{\cos^2 t}$, 当 $x<0$时, $g(t,x)=x e^{\cos^2 t}/(9\pi^2)$.

直接验证可知, (13)式满足定理1的所有条件，于是由定理 1 可得方程(13)至少存在 1 个 2π- 周期解. 显然方程(13)不满足定理 A.

2　参考文献

[1] 弭鲁芳, 武延树, 张萍萍. 一类具时滞耗散型 Duffing 方程的周期解 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(19): 235-238.

[2] 黄记洲. 一类时滞 Duffing 方程周期存在性的充分性定理 [J]. 甘肃联合大学学报: 自然科学版, 2006, 20(6): 29-31.

[3] 沈钦锐, 周宗福. 一类三阶时滞 Duffing 型方程周期解的存在唯一性 [J]. 集美大学学报：自然科学版，2012, 17(2): 142-146.

[4] Li Xiaojiang, Zhou Youming, Chen Xuangqing, et al. On the existence and uniqueness of periodic solution for Duffing type differential equations with a deviating argument [J]. Mathematica Applicata, 2012, 25(2): 335-340.

[5] 刘怡建, 陈晓星. 一类带时滞的 Duffing 方程概周期解的存在性 [J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2011, 39(3): 329-333.

[6] 李潇寰, 蒋振. 一类中立型 Duffing 方程的周期解 [J]. 宝鸡文理学院: 自然科学版, 2011, 31(3): 10-12.

[7] 张正球, 庚建设. 一类时滞 Duffing 型方程的周期解 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 1998, 13(4): 389-392.

[8] 肖兵, 周启元. 一类具偏差变元的 Duffing 型方程的周期解 [J].江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(1): 29-33.

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Lecture notes in math [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[10] 黄先开, 向子贵. 具有时滞的 Duffing 型方程 $x''+g(x(t-\tau(t)))=p(t)$的 2π周期解 [J]. 科学通报, 1994, 39(3): 201-203.

The Notes on Periodic Solution for a Kind of Duffing Equation with Deviating Arguments

LIN Wen-xian

(Department of Mathematics and Applied Mathematics, Hanshan Normal University, Chaozhou Guangdong 521041, China)

Abstract: By coincidence degree’s theory and better prior estimate, the existence of periodic solutions to a kind of Duffing equation with deviating arguments is studied. Some new results on the existence of periodic solutions to such equation are obtained, which improve some existing ones in the literature. An example is given.

Key words: Duffing equation; periodic solution; coincidence degree

(责任编辑：曾剑锋)