第 36 卷 第 5 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No. 5
2012 年 9 月　　Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)　　Sep. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)05-0502-04

脉冲输入环境毒素的单种群动力学模型研究

鲍　磊, 班晓倩

(贵州财经大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550004)

摘要: 利用已有的结果研究了脉冲输入环境毒素的单种群动力学模型, 考虑毒素的侵扰, 将内禀增长率改变为与生物体内毒素相关的非线性函数形式, 得到了边界周期解的全局吸引和系统永久生存的判别条件.

关键词: 单种群动力学模型; 脉冲输入环境毒素; 全局吸引; 永久生存

中图分类号: O 175. 2　　文献标志码: A

0 引言

工农业快速发展给人类带来了极大物质繁荣的同时, 随之而来的环境污染问题也日益突出. 因此, 生态环境与生物种群的可持续发展问题已经越来越受到许多专家学者的重视. 近年来, 许多从事生态数学研究的学者建立了一些数学模型, 用以研究污染环境下生物种群的生存状况, 得到了一些较好的结果; 尤其是污染环境下的单种群动力学模型, 被给予持续关注[1-6].

假设某生物种群生存于某一给定空间, 密度分布均匀, 且没有成员从此空间迁入和迁出. 在时刻 t , 空间内的该种群密度为 $x(t)$, 环境中毒素浓度为 $C_e(t)$, 生物体内毒素浓度为 $C_0(t)$.

众所周知, 在没有环境毒素影响的情况下, 最经典的单种群演化典模型为 Logistic 方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\big(r_0-fx(t)\big),$$

其中 r_0 为种群的内禀增长率, f 为密度制约系数.

由于受到毒素的侵扰, 种群 $x(t)$ 的内禀增长率 r_0 必然将随体内毒素浓度 $C_0(t)$ 的增大而减小. 文献[7]使用 $r_0-r_1C_0(t)$ 表示种群 $x(t)$ 内禀增长率, 即种群 $x(t)$ 内禀增长率按照生物体内毒素的浓度线性减小, 这是符合现实情况的. 然而, 受到文献[8-10]的启发, 同样可以考虑种群的内禀增长率是与生物体内毒素浓度相关的非线性函数, 于是内禀增长率可以改写为

$$r\big(C_0(t)\big)=\frac{r_0-r_1C_0(t)}{1+C_0(t)},\tag{1}$$

这里 r_0 和 r_1 都是正的常数.

考虑环境毒素的侵扰, 并假定环境毒素是脉冲注入的, 结合前面的讨论, 给出了如下将要研究的模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\left(\dfrac{r_0-r_1C_0(t)}{1+C_0(t)}-fx(t)\right), t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ \dfrac{\mathrm{d}C_0(t)}{\mathrm{d}t}=aC_e(t)-hC_0(t)-KC_0(t), t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ \dfrac{\mathrm{d}C_e(t)}{\mathrm{d}t}=-mC_e(t), \qquad t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ \Delta x(t)=0, \Delta C_0(t)=0, \Delta C_e(t)=\mu, \quad t=n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ x(t)>0, 0\leqslant C_0(t)\leqslant 1, 0\leqslant C_e(t)\leqslant 1,\end{cases}\tag{2}$$

这里 r_0 和 r_1 的意义和系统(1)相同, f 为密度制约系数. 系统(2)的第 2 个方程中的 $aC_e(t)$ 表示有机体对环境毒素的净吸收率, 而 $-hC_0(t)$ 和 $-KC_0(t)$ 分别表示有机体内对环境毒素的排泄率和净化率. 系统(2)的第 3 个方程中的 $-mC_e(t)$ 表示由蒸发作用等所造成的环境毒素的自然损耗.

当 $t=n\tau$ 时, 系统(1)中环境毒素发生脉冲注入, 且有 $\Delta x(t)=x(t^+)-x(t), \Delta C_0(t)=\Delta C_0(t^+)-\Delta C_0(t)$,

收稿日期: 2012-05-20
基金项目: 国家自然科学基金(10961008), 贵州省教育厅自然科学研究培育(2010027)和贵州省科学技术基金(2010J2130)资助项目.
作者简介: 鲍　磊(1982-), 男, 江苏新沂人, 讲师, 硕士, 主要从事生物数学的研究.

$\Delta C_e(t)=C_e(t^+)-C_e(t)$. τ 为外界环境毒素脉冲注入的周期, μ 为毒素每次注入的量.

显然, 当 $C_0(t)=0$ 时, $r(C_0(t))=r_0$, 此时描述的就是 Logistic 方程的情形. 另一方面, 因为内禀增长率总是大于 0, 易知 $C_0(t)<r_0/r_1$. 后面总假设这个前提成立.

因为 $C_0(t)$ 和 $C_e(t)$ 是密度, 因此必然满足 $0\leqslant C_0(0)\leqslant 1, 0\leqslant C_e(t)\leqslant 1$. 为了使得 $C_0(t)$ 和 $C_e(t)$ 总小于 1, 必然还要求下式成立:

$$a<h+K,\ \ \mu<1-\mathrm{e}^{-h\tau}. \tag{3}$$

下面假设(3)式都是成立.

1　主要结论

定理 1　系统(2)的解 $(x(t),C_0(t),C_e(t))$ 是最终一致有界的. 换句话说, 存在常数 $M>0$, 使得当 t 充分大时, $x(t)\leqslant M$, $C_0(t)\leqslant M$, $C_e(t)\leqslant M$.

证　令 $V(t)=x(t)+C_0(t)+C_e(t)$, 取 $\rho=\min\{h+K, m\}$. 那么, 当 $t\neq n\tau$ 时,

$$D^+V(t)+\rho V(t)=x(t)\left[\frac{r_0-r_1C_0(t)}{1+C_0(t)}+\rho-fx(t)\right]+(\rho-h-K)C_0(t)+(\rho-m)C_e(t)\leqslant x(t)(r_0+\rho-fx(t))\leqslant M_0,$$

其中 $M_0=(r_0+\rho)^2/(4f)$; 当 $t=n\tau$ 时, $V(n\tau^+)=V(n\tau)+\mu$.

由文献[11]中引理 2.2 可知, 对于 $t\in(n\tau,(n+1)\tau]$, 有

$$V(t)\leqslant V(0)\mathrm{e}^{-\rho t}+\frac{M_0}{\rho}\left(1-\mathrm{e}^{-\rho t}\right)+\frac{\mu\mathrm{e}^{-\rho(t-\tau)}}{1-\mathrm{e}^{\rho\tau}}+\frac{\mu\mathrm{e}^{\rho\tau}}{\mathrm{e}^{\rho\tau}-1}\to\frac{M_0}{\rho}+\frac{\mu\mathrm{e}^{\rho\tau}}{\mathrm{e}^{\rho\tau}-1}, t\to\infty,$$

所以, $V(t)$ 是最终一致有界的.

因此, 由 $V(t)$ 的定义可知, 存在常数 $M=M_0/\rho+\mu\mathrm{e}^{\rho\tau}/(\mathrm{e}^{\rho\tau}-1)>0$, 使得当 t 充分大时, $x(t)\leqslant M$, $C_0(t)\leqslant M$, $C_e(t)\leqslant M$.

考虑如下子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}C_0(t)}{\mathrm{d}t}=aC_e(t)-hC_0(t)-KC_0(t), & t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ \dfrac{\mathrm{d}C_e(t)}{\mathrm{d}t}=-mC_e(t), & t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ \Delta x(t)=0, \Delta C_0(t)=0, \Delta C_e(t)=\mu, & t=n\tau, n\in\mathbf{Z}^+,\\ 0\leqslant C_0(t)\leqslant 1, 0\leqslant C_e(t)\leqslant 1.\end{cases} \tag{4}$$

类似于文献[4], 有如下引理.

引理 1　子系统(4)有唯一的 τ-正周期解 $(\tilde{C}_0(t),\tilde{C}_e(t))$, 且该 τ-正周期解 $(\tilde{C}_0(t),\tilde{C}_e(t))$ 为全局渐近稳定的, 即当 $t\to+\infty$ 时, 对于该子系统的每个解 $(\tilde{C}_0(t),\tilde{C}_e(t))$, 都有 $C_0(t)\to\tilde{C}_0(t)$, $C_e(t)\to\tilde{C}_e(t)$, 其中

$$\begin{cases}\tilde{C}_0(t)=\tilde{C}_0(0)\mathrm{e}^{-(h+K)(t-n\tau)}+\dfrac{a\mu\left(\mathrm{e}^{-(h+K)(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-m(t-n\tau)}\right)}{(m-h-K)\left(1-\mathrm{e}^{-m\tau}\right)},\\ \tilde{C}_e(t)=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-m(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-m\tau}},\\ \tilde{C}_0(0)=\dfrac{a\mu\left(\mathrm{e}^{-(h+K)(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-m(t-n\tau)}\right)}{(m-h-K)\left(1-\mathrm{e}^{-(h+K)\tau}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-m\tau}\right)},\\ \tilde{C}_e(0)=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-m\tau}}{1-\mathrm{e}^{-m\tau}},\end{cases}$$

这里 $t\in(n\tau,(n+1)\tau]$ 和 $n\in\mathbf{Z}^+$.

引理 1 的证明可参见文献[3].

生物体内毒素密度 $C_0(t)$ 和环境中毒素 $C_e(t)$ 分别趋近于唯一的 τ-正周期解, 这说明周期性环境毒素脉冲输入引起系统(2)中生物体内毒素密度 $C_0(t)$ 和环境中毒素 $C_e(t)$ 的周期性变化.

从引理 1 可以看出, $C_0(t)$ 和 $C_e(t)$ 是可以被依次解出来的. 因此, 系统(2)事实上可看作一个 1 维系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\left(\dfrac{r_0-r_1C_0(t)}{1+C_0(t)}-fx(t)\right),\\ x(0)>0.\end{cases} \tag{5}$$

引理 2　如果 $0<x\leqslant y<1$, 则下列不等式成立

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)}\leqslant\frac{y-x}{xy}.$$

利用引理 2, 可以得到如下的引理.

引理 3　令 $x(t)$ 为系统(5)满足初始条件的任意

一个解, 如果条件

$$\mu > \frac{r_0 m\tau\left(h+K\right)}{ar_1}$$

成立, 则当 $t \to \infty$ 时, $x\left(t\right) \to 0$.

结合引理 1 和引理 3, 可得到如下的结论.

定理 2 如果条件

$$\mu > \frac{r_0 m\tau\left(h+K\right)}{ar_1}$$

成立, 则系统(4)的边界灭绝周期解 $\left(0, \tilde{C}_0\left(t\right), \tilde{C}_e\left(t\right)\right)$ 是全局吸引的.

定义 1 如果存在常数 $\delta > 0$ 和充分大的 T_0, 使得当 $t > T_0$ 时, 满足初始条件 $x\left(t\right) > 0$, $C_0\left(t\right) > 0$, $C_e\left(t\right) > 0$ 的系统(2)的解 $\left(x\left(t\right), C_0\left(t\right), C_e\left(t\right)\right)$ 都有

$$\delta < x\left(t\right) < 1/\delta, \delta < C_0\left(t\right) < 1/\delta, \delta < C_e\left(t\right) < 1/\delta,$$

则称系统(4)是永久生存的.

关于系统(4)的永久生存, 有如下结论.

定理 3 如果条件

$$\mu < \frac{r_0 m\tau\left(h+K\right)}{ar_1}$$

成立, 则系统(4)是永久生存的.

引理 3, 定理 2 和定理 3 的证明可以参见文献[1, 3, 7-8], 在这里不再赘述.

下面给出系统(4)的正周期解的存在性和稳定性的相关结论.

定理 4 对于系统(4), 如果 $\mu < r_0 m\tau\left(h+K\right)/(ar_1)$ 成立, 那么存在唯一满足初始条件 $x\left(t\right) > 0$, $C_0\left(t\right) > 0$, $C_e\left(t\right) > 0$ 的全局渐近稳定的 τ-正周期解 $\left(\tilde{x}\left(t\right), \tilde{C}_0\left(t\right), \tilde{C}_e\left(t\right)\right)$, 且当 $t \to \infty$ 时,

$$\left(x\left(t\right), C_0\left(t\right), C_e\left(t\right)\right) \to \left(\tilde{x}\left(t\right), \tilde{C}_0\left(t\right), \tilde{C}_e\left(t\right)\right).$$

2 讨论

本文基于考虑种群的内禀增长率是与生物体内毒素浓度相关的非线性函数, 建立了一个污染环境中的单种群动力学模型, 研究了周期性毒素输入对于种群的影响. 从引理 3 和定理 3 可以看出, $r_0 m\tau\left(h+K\right)/(ar_1)$ 是一个重要的阈值条件. 当环境毒素的脉冲输入量 $\mu > r_0 m\tau\left(h+K\right)/(ar_1)$ 时, 种群走向灭绝; 而当 $\mu < r_0 m\tau\left(h+K\right)/(ar_1)$ 时, 种群永久生存. 因此, 当种群和环境给定的情况下, 为避免由于毒素排放而造成种群的灭绝, 必须适度控制周期性排放到环境中毒素的总量. 本文结论对于日常生产也有一定借鉴意义.

3 参考文献

[1] Hallam T G, Clark C E, Jordan G S. Effects of toxicants on population: a qualitative approach I. equilibrium environmental exposure [J]. Ecological Modelling, 1983, 18(3/4): 291-340.

[2] Debasis M. Persistence and global stability of a population in a polluted environment with delay [J]. Journal of Biological Systems, 2002, 10: 225-232.

[3] Jiao Jianjun, Long Wen, Chen Lansun. A single stage-structured population model with mature individuals in a polluted environment and pulse input of environmental toxin [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(5): 3073-3081.

[4] 雒志学, 于晓娣, 巴争刚. 污染环境下单种群模型生存阈值 [J]. 生物数学学报, 2011, 26(2): 211-222.

[5] 焦建军, 鲍磊, 陈兰荪. 具脉冲出生与脉冲收获阶段结构单独种群动力学模型 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2011, 49(1): 6-10.

[6] 栾施, 刘兵, 张丽霞. 一个污染环境中的单种群模型的动力学性质 [J]. 生物数学学报, 2011, 26(4): 689-694.

[7] Liu Bing, Chen Lansun, Zhang Yujuan. The effects of impulsive toxicant input on a population in a polluted environment [J]. Journal of Biological Systems, 2003, 11(3): 265-274.

[8] Thomas D M, Snell T W, Jaffar S M. A control problem in a polluted environment [J]. Mathematical Bioscience, 1996, 133(2): 139-163.

[9] 燕雪飞. 污染环境中单种群生存分析 [J]. 生物数学学报, 2009, 24(1): 87-92.

[10] 简敏菲, 宋玉斌, 倪才英, 等. 鄱阳湖湿地水生生物重金属污染的特性分析 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2006, 30(5): 504-508.

[11] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of impulsive differential equations [M]. Singapore: World Science, 1989.

The Study on Single Population Model with Pulse Input of Environmental Toxin

BAO Lei, BAN Xiao-qian

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang Guizhou 550004, China)

Abstract: Based on the known results, a single population model in a polluted environment with pulse toxicant input at fixed moment is studied. Considering the harassment of toxin, the intrinsic rate of growth is changed into non-linear functional style related to the concentration of the toxin in the organisms. The threshold condition for the attractivity of the population-extinction boundary period solution and the permanence of the system are obtained.

Key words: single population model; pulse input of environmental toxin; global attractivity; permanence

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 486 页)

The (*p*, *q*)(R) Type of Random Dirichlet Series under the Condition of Moment

LU Wan-chun[1], YI Cai-feng[2]

(1. Department of Mathematics, Pingxiang College, Pingxiang Jiangxi 337055, China;
2. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The (*p*,*q*)(**R**) type of a kind of general random Dirichlet series under the condition that of $0 \leqslant d^2\sigma_n{}^2 = d^2 E|Z_n|^2 \leqslant E^2|Z_n| < +\infty$ has been studied. The main conclusion drawn is that the (*p*,*q*)(**R**) type of this kind of random Dirichlet is almost surely the same as that of corresponding Dirichlet series, and the (*p*,*q*)(**R**) types of horizontal line and horizontal zone are almost surely the same as that of each in the whole plane.

Key words: random Dirichlet series; (*p*,*q*)(**R**) order; (*p*,*q*)(**R**) type

(责任编辑: 王金莲)