文章编号: 1000-5862(2012)05-0506-06

一类具季节性时变参数和周期时滞的浮游植物-浮游动物模型的正周期解

刘华祥[1]，曾广洪[2]

(1. 广东海洋大学理学院数学系，广东 湛江 524088; 2. 江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330022)

摘要：提出了一类具季节性时变参数和周期时滞的有 3 种浮游生物种群组成的动力学模型，包括无毒浮游植物(NTP)、有毒浮游植物(TPP)和浮游动物(Z)，并研究了该系统的正周期解的存在性. 通过运用叠合度理论中的延拓定理，建立了保证该系统至少存在 1 个正周期解的充分条件，所得结果适用于相应的无时滞和离散时滞系统.

关键词：浮游植物-浮游动物；时滞；正周期解；叠合度的延拓定理；拓扑度

中图分类号: O 29　　　　文献标志码: A

0　引言

海洋中的浮游植物群落的一个特征是生物种群有时会呈激速增长或爆发的趋势，也就是发生所谓的水华现象. 由于生物量的高度聚集，或者由于毒性的存在，水华中有一些被称之为“有害水华”，它们不仅对海洋生态系统或人类健康产生危害，而且可能危及海洋生态资源，对社会经济造成极大损害. 因此，防止有害藻华，维持浮游动植物种群的共存，是关乎水生生态环境保护、海洋资源开发利用以及人类健康的重要问题.

近年来，利用生态数学模型研究浮游植物群落巨大波动的机理成为生物数学的一个重要课题. Maynard Smith 和 J. Chattopadhyay 基于 2 种群 Lotka-Volterra竞争系统，通过假设每一种群会产生对另一个种群生存有抑制作用的物质(以下称植化相克物质)，而提出了一个修改的 2 种群 Lotka-Volterra 竞争系统[1-2]. A. Mukhopadhyay 等提出了时滞 Lotka-Volterra 系统[3]. P.K.Tapaswi 等提出了带随机扰动项的 Lotka- Volterra 系统[4]. 宋新宇等提出了具季节性时变参数的浮游生物植化相克时滞微分方程模型[5]. 然而这些研究大都只涉及 2 种浮游植物种群的相互作用. 事实上，水生环境中，浮游生物包括两大类别，即浮游植物和浮游动物，在考虑水生环境的生态状况时，对浮游动物与浮游植物之间的相互作用是不容忽视的. 现有的研究已经发现，水生系统中存在着有毒浮游植物、无毒浮游植物和浮游动物之间的作用，所以利用 3 种群的捕食-被捕食模型来研究浮游动物与浮游植物之间的相互作用更为合理. J.Chattopadhyay 等研究了浮游植物-浮游动物的相互作用[6]. S. Pal 等结合现场的调查研究，对 J. Chattopadhyay 等提出的模型进行了推广，提出并研究了如下模型[7]：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}=rP_1\left(1-\dfrac{P_1+\alpha P_2}{K_1}\right)-\alpha_1P_1f(P_1,P_2,Z),\\ \dfrac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t}=sP_2\left(1-\dfrac{P_2+\beta P_1}{K_2}\right)-\alpha_2P_2f(P_1,P_2,Z),\\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=(\alpha_1'P_1-\alpha_2'P_2)f(P_1,P_2,Z)-\mu Z,\end{cases}$$

其中 $P_1(t)$、$P_2(t)$ 和 $Z(t)$ 分别为无毒浮游植物(NTP)、产毒浮游植物(TPP)和浮游动物(Z)种群在时刻 t 的密度，r 和 s 分别是无毒浮游植物和产毒浮游植物的增长率，μ 为浮游动物的死亡率，α 和 β 为浮游植物种间竞争系数，K_1 和 K_2 为无毒浮游植物和有毒浮游植物的承载量，α_1 和 α_2 是浮游动物分别对无毒浮游植物和有毒浮游植物的攻击率，α_1' 和 α_2' 分别是无毒浮游植物和有毒浮游植物转换为浮游动物生物量的转换效率，功能反应为 Beddington 型函数

收稿日期：2012-06-20

基金项目：国家自然科学基金青年科学基金(61203153)和广东海洋大学科研(0612163)资助项目.

作者简介：刘华祥(1958-)，男，江西吉安人，教授，主要从事生物数学的研究.

$f(P_1,P_2,Z)=Z/(1+\beta_1P_1+\beta_2P_2)$.

然而, 现有的研究已经表明, TPP 种群释放化学毒素是有条件的, 即只有在其周围存在浓度较高的浮游动物种群时才释放化学毒素, 而且毒素物质使得摄食强度减少的效果并不是即时的, 而是有一个时间延迟, 同时, 有毒和无毒浮游植物之间的竞争不仅存在, 而且也存在植化相克物质的释放且其效果也是有延迟的. 另一方面, 按照 Berryman 的观点, 捕食者平均增长率不只是与被捕食者密度有关, 还应与捕食者密度有关, 据此 R. Arditi 等提出了比率依赖的功能反应[8]. 另外, 生态系统中环境的周期性变化(如季节性变化、食物供给、群居习性等)对于种群的生存与发展是一个现实的因素, 因而不可忽视. 根据这些考虑, 本文在上述模型中将捕食者功能反应取为比率依赖的功能反应, 并加入与水生环境更为贴近的 2 个因素: 周期性的时变环境; 竞争的浮游植物种群产生的植化相克物质以及产生对浮游动物的摄食有抑制作用的毒素都不是即时的, 而是需要一定的时间延迟, 因此假设系统中的相关系数和时滞是连续可微的 ω 周期函数, 从而提出下述模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}=r(t)P_1\left(1-\dfrac{P_1+\alpha(t)P_2(t-\tau_2(t))}{K_1}\right)-\\\qquad\dfrac{\alpha_1(t)P_1Z}{\beta_1Z+P_1},\\\dfrac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t}=s(t)P_2\left(1-\dfrac{P_2+\beta(t)P_1(t-\tau_1(t))}{K_2}\right)-\\\qquad\dfrac{\alpha_2(t)P_2Z}{\beta_2Z+P_2(t-\tau_3(t))},\\\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\alpha_1'(t)P_1Z}{\beta_1Z+P_1}-\dfrac{\alpha_2'(t)P_2Z}{\beta_2Z+P_2(t-\tau_3(t))}-\mu(t)Z,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $r(t)$, $s(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\alpha_i(t)$, $\alpha_i'(t)$, $\tau_i(t)\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 都是正的 ω-周期函数, β_i 是正常数 ($i=1,2$). 考虑到系统(1)的生物意义,假定系统(1)初始条件为

$$\begin{aligned}&P_1(\theta)=\phi_1(\theta)\geqslant 0,P_2(\theta)=\phi_2(\theta)\geqslant 0,\\&\phi_i(0)>0,i=1,2,Z(\theta)=\phi_3(\theta)>0,\\&\theta\in[-\tau,0],\tau=\max_{t\in[0,\omega]}\{\tau_i(t),i=1,2,3\},\end{aligned}\tag{2}$$

而 $(\phi_1(\theta),\phi_2(\theta),\phi_3(\theta))\in C^1([-\tau,\ 0],R_{+0}^3)$, $R_{+0}^3=\{(x_1,x_2,x_3):x_i\geqslant 0,i=1,2,3\}$, 同时定义 $R_+^3=\{(x_1,x_2,x_3):x_i>0,i=1,2,3\}$.

对于正的连续 ω 周期函数 f 引入记号:

$$f^L=\min_{t\in[0,\omega]}f(t),\ f^M=\max_{t\in[0,\omega]}f(t),\ \ \bar f=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}f(t)\mathrm{d}t.$$

周期环境中多种群相互共存以及在某些情况下不同种群的消长总是一个自然现象, 而浮游生物种群的激速增长导致的水华现象是这种自然现象中更值得关注的问题. 因此, 本文主要研究满足初始条件(2)的系统(1)的非常数周期解的存在性.

1　记号和引理

本节介绍本研究中将要用到的关于叠合度的概念和有关结果[5,9-10].

设 X, Z 都是赋范线性空间, L: $\mathrm{Dom}L\subset X\to Z$ 是线性映射, $N:X\to Z$ 为连续映射. 若 $\dim\mathrm{Ker}L=\mathrm{codim}\mathrm{Im}L<+\infty$, 且 $\mathrm{Im}L$ 在 Z 中闭, 则称线性映射是指标为 0 的 Fredholm 映射. 若 L 是指标为 0 的 Fredholm 映射, 则存在连续投影 $P:X\to X$, $Q:Z\to Z$ 使得 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L=\mathrm{Im}(I-Q)$. 由此可知, $L|_{\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P}:(I-P)X\to\mathrm{Im}L$ 可逆, 用 K_P 表示这个映射的逆.

设 Ω 是 X 的有界开子集, 若 $QN(\bar\Omega)$ 有界, 且 $K_P(I-Q)N:\bar\Omega\to X$ 是紧映射, 则称映射 N 在 $\bar\Omega$ 上是 L-紧的. 因 $\mathrm{Im}Q$ 与 $\mathrm{Ker}L$ 同构, 所以存在同构映射 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$.

引理 **1(延拓定理)**　设 L 是指标为 0 的 Fredholm 映射, N 在 $\bar\Omega$ 上是 L-紧的, 如果

(i) 对每个 $\beta\in(0,1)$, $Lx=\beta Nx$ 的解 x 满足 $x\notin\partial\Omega$;

(ii) 对每个 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{K}$, $QNx\neq 0$, 且 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$, 则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L\cap\bar\Omega$ 中至少有 1 个解.

引理 2　R_+^3 关于系统(1)是正不变的.

2　非平凡周期解的存在性

本节利用延拓定理研究系统(1)存在非平凡正周期解的条件.

定理 1　假设条件

$$\text{(H1)}\quad \left(1-\frac{\bar\alpha_1}{\beta_1\bar r}\right)K_1>\frac{\overline{r\alpha}}{\bar r}K_2\mathrm{e}^{2\bar s\omega},$$

$$\left(1-\frac{\bar\alpha_2}{\beta_2\bar s}\right)K_2>\frac{\overline{s\beta}}{\bar s}K_1\mathrm{e}^{2\bar r\omega},$$

$$\bar\alpha_1'>\bar\mu+\bar\alpha_2'K_2\mathrm{e}^{2\bar s\omega},$$

$$\text{(H2)}\quad K_1\bar r>K_2\overline{r\alpha},\ \ K_2\bar s>K_1\overline{s\beta}$$

成立, 则满足初始条件(2)的系统(1)至少存在 1 个正 ω 周期解.

证 由引理 2 知, 满足初始条件(2)的系统(1)的解对所有 $t \geqslant 0$ 都为正, 故可令 $u_i(t) = \ln(P_i(t))$, $i = 1,2$, $u_3(t) = \ln(Z(t))$, 则系统(1)变成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = r(t)\big(1 - g_1(t)\big) - f_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = s(t)\big(1 - g_2(t)\big) - f_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} f_1(t) - \dfrac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} f_2(t) - \mu(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$g_1(t) = \frac{\mathrm{e}^{u_1(t)} + \alpha(t)\mathrm{e}^{u_2(t-\tau_2(t))}}{K_1},$$

$$f_1(t) = \frac{\alpha_1(t)\mathrm{e}^{u_3(t)}}{\beta_1 \mathrm{e}^{u_3(t)} + \mathrm{e}^{u_1(t)}},$$

$$g_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{u_2(t)} + \beta(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\tau_1(t))}}{K_2},$$

$$f_2(t) = \frac{\alpha_2(t)\mathrm{e}^{u_3(t)}}{\beta_2 \mathrm{e}^{u_3(t)} + \mathrm{e}^{u_2(t-\tau_3(t))}},$$

容易看出, 如果系统(3)有 1 个 ω 周期解 $(u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t))^{\mathrm{T}}$, 则 $(P_1^*(t), P_2^*(t), Z^*(t))^{\mathrm{T}} = (\mathrm{e}^{u_1^*(t)}, \mathrm{e}^{u_2^*(t)}, \mathrm{e}^{u_3^*(t)})^{\mathrm{T}}$ 是系统(1)的 1 个周期解, 因此, 为了完成定理 1 的证明, 只须证明系统(3)至少有 1 个 ω 周期解. 取

$$X = Z = \left\{ \boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^{\mathrm{T}} \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3) : \boldsymbol{u}(t+\omega) = u(t) \right\},$$

则 X 和 Z 依范数 $\| \boldsymbol{u}(t) \| = \| (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^{\mathrm{T}} \| = \sum_{i=1}^{3} \max_{t\in[0,\omega]} | u_i(t) |$ 都是 Banach 空间. 记 $\mathrm{Dom}L = \{(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^{\mathrm{T}} \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)\}$, 并分别取 L: $\mathrm{Dom}L \cap X \to X$, $N: X \to X$, $P: X \to X$, $Q: Y \to Y$ 如下:

$$N\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t)\big(1 - g_1(t)\big) - f_1(t) \\ s(t)\big(1 - g_2(t)\big) - f_2(t) \\ \dfrac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} f_1(t) - \dfrac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} f_2(t) - \mu(t) \end{bmatrix}, L\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{u}},$$

$$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Dom}L \cap X, \quad P\boldsymbol{u} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{u} \in X,$$

$$Q\boldsymbol{w} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t, \quad \boldsymbol{w} \in Z,$$

则有

$$\mathrm{Ker}L = \left\{ \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in X, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^3 \right\},$$

$$\mathrm{Im}L = \left\{ \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in Z, \int_0^{\omega} \boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t = 0 \right\},$$

且易知 $\mathrm{Im}L$ 在 Z 中是闭的, 并且有 $\dim\mathrm{Ker}L = 3 = \mathrm{codim}\mathrm{Im}L$, 因此 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子. 容易看出, P 和 Q 都是连续投影, 且使得

$$\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L, \quad \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L = \mathrm{Im}(I - Q),$$

因此, L_P 的嵌入 K_P: $\mathrm{ImL} \to \mathrm{KerP} \cap \mathrm{Dom}L$ 存在, 且

$$K_P(\boldsymbol{w}) = \int_0^t \boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t \boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

于是

$$QN\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\Big[r(t)\big(1 - g_1(t)\big) - f_1(t)\Big]\mathrm{d}t \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\Big[s(t)\big(1 - g_2(t)\big) - f_2(t)\Big]\mathrm{d}t \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^{\omega}\left[\dfrac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} f_1(t) - \dfrac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} f_2(t) - \mu(t)\right]\mathrm{d}t \end{bmatrix},$$

$$K_P(I - Q)N\boldsymbol{u} = \int_0^t N\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t N\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\int_0^{\omega} N\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s.$$

显然, QN 和 $K_P(I - Q)N$ 都是连续的. 于是对于 X 中的任何有界开集 Ω, 应用 Arzela-Ascoli 定理,容易证明 $\overline{K_P(I - Q)N(\bar{\Omega})}$ 是紧致集, $QN(\bar{\Omega})$ 是有界集. 因此, N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

下面寻找一个合适的开有界集 Ω, 以便能利用引理 1 完成定理 1 的证明.

对应于算子方程 $L\boldsymbol{u} = \lambda N\boldsymbol{u}$, $\lambda \in (0,1)$, 有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \lambda\Big[r(t)\big(1 - g_1(t)\big) - f_1(t)\Big], \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \lambda\Big[s(t)\big(1 - g_2(t)\big) - f_2(t)\Big], \\ \dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} = \lambda\left[\dfrac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} f_1(t) - \dfrac{\alpha_2'(t)}{\alpha_2(t)} f_2(t) - \mu(t)\right]. \end{cases} \tag{4}$$

设 $u = u(t) \in X$ 是方程组(4)在 $\lambda \in (0,1)$ 取某一定值时的解, 在区间 $[0,\omega]$ 上对(4)式进行积分, 并注意到 $\int_0^{\omega} \dot{\boldsymbol{u}}(t)\mathrm{d}t = 0$, 于是得到

$$\begin{aligned} &\int_0^{\omega} r(t)\frac{\mathrm{e}^{u_1(t)} + \alpha(t)\mathrm{e}^{u_2(t-\tau_2(t))}}{K_1}\mathrm{d}t + \\ &\int_0^{\omega} \frac{\alpha_1(t)\mathrm{e}^{u_3(t)}}{\beta_1 \mathrm{e}^{u_3(t)} + \mathrm{e}^{u_1(t)}}\mathrm{d}t = \bar{r}\omega, \\ &\int_0^{\omega} s(t)\frac{\mathrm{e}^{u_2(t)} + \beta(t)\mathrm{e}^{u_1(t-\tau_1(t))}}{K_2}\mathrm{d}t + \\ &\int_0^{\omega} \frac{\alpha_2 \mathrm{e}^{u_3(t)}}{\beta_2 \mathrm{e}^{u_3(t)} + \mathrm{e}^{u_2(t-\tau_3(t))}}\mathrm{d}t = \bar{s}\omega, \\ &\int_0^{\omega}\left[\frac{\alpha_1'(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}}{\beta_1 \mathrm{e}^{u_3(t)} + \mathrm{e}^{u_1(t)}} - \frac{\alpha_2'(t)\mathrm{e}^{u_2(t)}}{\beta_2 \mathrm{e}^{u_3(t)} + \mathrm{e}^{u_2(t-\tau_3(t))}}\right]\mathrm{d}t = \bar{\mu}\omega, \end{aligned} \tag{5}$$

从而由(4)式和(5)式可得

$$\begin{cases}\int_0^{\omega}|\dot{u}_1(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\overline{r}\,\omega,\\ \int_0^{\omega}|\dot{u}_2(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\overline{s}\,\omega,\\ \int_0^{\omega}|\dot{u}_3(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant 2\overline{\mu}\omega.\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^{\mathrm{T}}\in X$，所以 $\exists\xi_i$，$\eta_i\in[0,\omega]$，$i=1,2,3$，使得

$$u_i(\xi_i)=\min_{t\in[0,\omega]}u_i(t),\quad u_i(\eta_i)=\max_{t\in[0,\omega]}u_i(t),$$

由(5)式可得

$$u_1(\xi_1)\leqslant\ln K_1,\quad u_2(\xi_2)\leqslant\ln K_2,$$

利用这 2 个不等式, 可得

$$u_1(t)\leqslant u_1(\xi_1)+\int_0^{\omega}|\dot{u}_1(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\ln K_1+2\overline{r}\,\omega\triangleq H_1,$$

$$u_2(t)\leqslant u_2(\xi_2)+\int_0^{\omega}|\dot{u}_2(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\ln K_2+2\overline{s}\,\omega\triangleq H_2.$$

由此, 又利用(5)式中的第 3 式可得

$$\overline{\mu}\omega\leqslant\frac{\mathrm{e}^{H_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3(\xi_3)}}\overline{\alpha}_1'\omega,$$

所以

$$u_3(\xi_3)\leqslant\ln\frac{K_1\overline{\alpha}_1'}{\beta_1\overline{\mu}}+2\overline{r}\,\omega\triangleq\ln K_3,$$

这样就有

$$\begin{cases}u_1(t)\leqslant u_1(\xi_1)+\int_0^{\omega}|\dot{u}_1(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\ln K_1+2\overline{r}\,\omega\triangleq H_1,\\ u_2(t)\leqslant u_2(\xi_2)+\int_0^{\omega}|\dot{u}_2(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\ln K_2+2\overline{s}\,\omega\triangleq H_2,\\ u_3(t)\leqslant u_3(\xi_3)+\int_0^{\omega}|\dot{u}_3(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\ln K_3+2\overline{\mu}\omega\triangleq H_3.\end{cases}\tag{6}$$

另一方面, 由(5)式中的第 1 式和(6)式中的第 2 式可得

$$\overline{r}\,\omega\leqslant\frac{1}{K_1}\int_0^{\omega}r(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{d}t+\frac{\overline{r\alpha}}{K_1}\mathrm{e}^{H_2}\omega+\frac{\overline{\alpha}_1}{\beta_1}\omega.$$

因为条件(H1)成立, 故由此可解得

$$\int_0^{\omega}r(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}\mathrm{d}t\geqslant\left[\left(\overline{r}-\frac{\overline{\alpha}_1}{\beta_1}\right)K_1-\overline{r\alpha}\mathrm{e}^{H_2}\right]\omega,$$

同理可得

$$\int_0^{\omega}s(t)\mathrm{e}^{u_2(t)}\mathrm{d}t\geqslant\left[\left(\overline{s}-\frac{\overline{\alpha}_2}{\beta_2}\right)K_2-\overline{s\beta}\mathrm{e}^{H_1}\right]\omega.$$

利用积分中值定理可知, $\exists\eta_i^*\in[0,\omega]$, 使得

$$u_1(\eta_1^*)\geqslant\ln\left[\left(\overline{r}-\frac{\overline{\alpha}_1}{\beta_1}\right)K_1-\overline{r\alpha}\mathrm{e}^{H_2}\right]\frac{1}{\overline{r}},$$

$$u_2(\eta_2^*)\geqslant\ln\left[\left(\overline{s}-\frac{\overline{\alpha}_2}{\beta_2}\right)K_2-\overline{s\beta}\mathrm{e}^{H_1}\right]\frac{1}{\overline{s}}.$$

由(5)中的第 3 式及(6)式可得

$$\overline{\mu}\omega\geqslant\frac{\mathrm{e}^{u_1(\xi_1)}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3(\eta_3)}+\mathrm{e}^{u_1(\xi_1)}}\overline{\alpha}_1'\omega-\mathrm{e}^{H_2-u_2(\xi_2)}\overline{\alpha}_2'\omega,$$

由此又可得

$$u_3(\eta_3)\geqslant\ln\frac{\overline{\alpha}_1'-\overline{\mu}-\overline{\alpha}_2'\mathrm{e}^{H_2}}{\beta_1(\mu+\overline{\alpha}_2'\mathrm{e}^{H_2})}+u_1(\xi_1).$$

利用上述所得结果又可得下述不等式组

$$\begin{cases}u_1(t)\geqslant u_1(\eta_1^*)-\int_0^{\omega}|\dot{u}_1(t)|\,\mathrm{d}t\geqslant\\ \ln\left[\left(\overline{r}-\frac{\overline{\alpha}_1}{\beta_1}\right)K_1-\overline{r\alpha}\mathrm{e}^{H_2}\right]\frac{1}{\overline{r}}-2\overline{r}\,\omega\triangleq H_4,\\ u_2(t)\geqslant u_2(\eta_2^*)-\int_0^{\omega}|\dot{u}_2(t)|\,\mathrm{d}t\geqslant\\ \ln\left[\left(\overline{s}-\frac{\overline{\alpha}_2}{\beta_2}\right)K_2-\overline{s\beta}\mathrm{e}^{H_1}\right]\frac{1}{\overline{s}}-2\overline{s}\,\omega\triangleq H_5,\\ u_3(t)\geqslant u_3(\eta_3)-\int_0^{\omega}|\dot{u}_3(t)|\,\mathrm{d}t\geqslant\\ \ln\frac{\overline{\alpha}_1'-\overline{\mu}-\overline{\alpha}_2'\mathrm{e}^{H_2}}{\beta_1(\mu+\overline{\alpha}_2'\mathrm{e}^{H_2})}+H_4-2\overline{\mu}\omega\triangleq H_6.\end{cases}\tag{7}$$

令 $B_1=\max\limits_{i\in\{1,4\}}\{|H_i|\}$ ， $B_2=\max\limits_{i\in\{2,5\}}\{|H_i|\}$ ， $B_3=\max\limits_{i\in\{3,6\}}\{|H_i|\}$,则由(6)式及(7)式可知, $\max\limits_{t\in[0,\omega]}|u_i(t)|\leqslant B_i$，$i=1,2,3$．显然 B_i ($i=1,2,3$)都不依赖于 λ，且对于(4)式的解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)\in X$ 有 $\|\boldsymbol{u}(t)\|\leqslant B_1+B_2+B_3<R_1$.

又若 3 元常数组 $(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ 满足下列方程组

$$\begin{cases}\overline{r}-\overline{r}\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_1}-\overline{r\alpha}\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_1}-\frac{\mathrm{e}^{u_3}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\overline{\alpha}_1=0\\ \overline{s}-\overline{s}\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_2}-\overline{s\beta}\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_2}-\frac{\mathrm{e}^{u_3}}{\beta_2\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_2}}\overline{\alpha}_2=0,\\ \overline{\mu}-\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\overline{\alpha}_1'+\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{\beta_2\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_2}}\overline{\alpha}_2'=0\end{cases}\tag{8}$$

由(8)式并结合前面的计算结果, 有

$$\begin{cases}\overline{r}\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_1}=\overline{r}-\overline{r\alpha}\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_1}-\frac{\mathrm{e}^{u_3}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\overline{\alpha}_1\geqslant\\ \qquad\overline{r}-\overline{r\alpha}\frac{K_2}{K_1}-\frac{\overline{\alpha}_1}{\beta_1},\\ \overline{s}\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_2}=\overline{s}-\overline{s\beta}\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_2}-\frac{\mathrm{e}^{u_3}}{\beta_2\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_2}}\overline{\alpha}_2\geqslant\\ \qquad\overline{s}-\overline{s\beta}\frac{K_1}{K_2}-\frac{\overline{\alpha}_2}{\beta_2},\\ \overline{\mu}=\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\overline{\alpha}_1'-\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{\beta_2\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_2}}\overline{\alpha}_2'\geqslant\\ \qquad\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\overline{\alpha}_1'-\overline{\alpha}_2'.\end{cases}\tag{9}$$

再利用条件(H1), 从(9)式可解得

$$
\begin{cases}
u_1 \geqslant \ln\left[\left(1-\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\beta_1\bar{r}}\right)K_1-\dfrac{\overline{r\alpha}}{\bar{r}}K_2\right],\\
u_2 \geqslant \ln\left[\left(1-\dfrac{\bar{\alpha}_2}{\beta_2\bar{s}}\right)K_2-\dfrac{\overline{s\beta}}{\bar{s}}K_1\right],\\
u_3 \geqslant \ln\dfrac{\bar{\alpha}_1'-\bar{\mu}-\bar{\alpha}_2'}{\beta_1(\bar{\mu}+\bar{\alpha}_2')}+\ln\left[\left(1-\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\beta_1\bar{r}}\right)K_1-\dfrac{\overline{r\alpha}}{\bar{r}}K_2\right].
\end{cases} \tag{10}
$$

又显然有 $u_1 \leqslant \ln K_1$，$u_2 \leqslant \ln K_2$，$u_3 \leqslant \ln\left[\dfrac{K_1(1-\bar{\mu}\bar{\alpha}_1')}{(\beta_1\bar{\mu}\bar{\alpha}_1')}\right]$，由此及(10)式有

$$
\begin{cases}
|u_1| \leqslant \max\left\{\left|\ln\left[\left(1-\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\beta_1\bar{r}}\right)K_1-\dfrac{\overline{r\alpha}}{\bar{r}}K_2\right]\right|,\ \ln K_1\right\} \triangleq H_7,\\
|u_2| \leqslant \max\left\{\left|\ln\left[\left(1-\dfrac{\bar{\alpha}_2}{\beta_2\bar{s}}\right)K_2-\dfrac{\overline{s\beta}}{\bar{s}}K_1\right]\right|,\ \ln K_2\right\} \triangleq H_8,\\
|u_3| \leqslant \max\left\{\left|\ln\dfrac{\bar{\alpha}_1'-\bar{\mu}-\bar{\alpha}_2'}{\beta_1(\bar{\mu}+\bar{\alpha}_2')}\left[\left(1-\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\beta_1\bar{r}}\right)K_1-\dfrac{\overline{r\alpha}}{\bar{r}}K_2\right]\right|,\left|\ln\dfrac{K_1(1-\bar{\mu}\bar{\alpha}_1')}{\beta_1\bar{\mu}\bar{\alpha}_1'}\right|\right\} \triangleq H_9,
\end{cases} \tag{11}
$$

据(11)式就有

$$|u_1|+|u_2|+|u_3| \leqslant H_7+H_8+H_9<R_2 .$$

综上可知，若取

$\Omega=\left\{\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^{\mathrm{T}} \in X:\|\boldsymbol{u}(t)\|<R_1+R_2\right\}$，则引理 1 的条件(i)得到满足．又当 $\boldsymbol{u}(t) \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L=\partial\Omega \cap \mathbf{R}^3$ 时，$\boldsymbol{u}(t)=(u_1,\ u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的实向量，且它满足 $|u_1|+|u_2|+|u_3|=R_1+R_2$，对这样的实向量有

$$QN\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} \neq 0 ,$$

这证明引理 1 中条件(ii)也得到满足．

为了验证引理 1 中的条件(iii)，定义同伦映射 $G:\mathrm{Dom}L \cap \mathrm{Ker}L \times[0,1] \rightarrow X$ 为

$$
\boldsymbol{G}(u_1,u_2,u_3,\lambda)=\begin{bmatrix}
\bar{r}-\bar{r}\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_1}-\overline{r\alpha}\dfrac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_1}\\
\bar{s}-\bar{s}\dfrac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_2}-\overline{s\beta}\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_2}\\
\bar{\mu}-\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\bar{\alpha}_1'
\end{bmatrix}+
\lambda\begin{bmatrix}
-\dfrac{\mathrm{e}^{u_3}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\bar{\alpha}_1\\
-\dfrac{\mathrm{e}^{u_3}}{\beta_2\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_2}}\bar{\alpha}_2\\
\dfrac{\mathrm{e}^{u_2}}{\beta_2\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_2}}\bar{\alpha}_2'
\end{bmatrix},\quad \lambda \in[0,1]
$$

当 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}} \in \partial\Omega \cap \mathbf{R}^3$，$\|\boldsymbol{u}\|=R_1+R_2$ 时，易知 $\boldsymbol{G}(u_1,u_2,u_3,\lambda) \neq(0,0,0)^{\mathrm{T}}$．事实上，若不然，则由 $\boldsymbol{G}(u_1,u_2,u_3,\lambda)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 易知，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ 满足(9)~(11)式，从而有 $\|\boldsymbol{u}\|<R_1+R_2$，矛盾．因此，有 $\boldsymbol{G}(u_1,u_2,u_3,\lambda) \neq(0,0,0)^{\mathrm{T}}$．于是，由拓扑度的同伦不变性定理可得

$$
\begin{aligned}
&\deg(JQN(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}},\Omega \cap \mathrm{Ker}L,(0,0,0)^{\mathrm{T}})=\\
&\deg(\boldsymbol{G}(u_1,u_2,u_3,1),\Omega \cap \mathrm{Ker}L,(0,0,0)^{\mathrm{T}})=\\
&\deg(\boldsymbol{G}(u_1,u_2,u_3,0),\Omega \cap \mathrm{Ker}L,(0,0,0)^{\mathrm{T}})=\\
&\deg\left(\left(\bar{r}-\bar{r}\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_1}-\overline{r\alpha}\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_1},\bar{s}-\bar{s}\frac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_2}-\overline{s\beta}\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_2},\right.\right.\\
&\left.\left.\bar{\mu}-\frac{\mathrm{e}^{u_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\bar{\alpha}_1'\right)^{\mathrm{T}},\Omega \cap \mathrm{Ker}L,(0,0,0)^{\mathrm{T}}\right)
\end{aligned}
$$

由条件(H1)和(H2)，下面的代数方程组

$$
\begin{cases}
\bar{r}-\bar{r}\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_1}-\overline{r\alpha}\dfrac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_1}=0\\
\bar{s}-\bar{s}\dfrac{\mathrm{e}^{u_2}}{K_2}-\overline{s\beta}\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}}{K_2}=0\\
\bar{\mu}-\dfrac{\mathrm{e}^{u_1}}{\beta_1\mathrm{e}^{u_3}+\mathrm{e}^{u_1}}\bar{\alpha}_1'=0
\end{cases}
$$

有唯一解 $(u_1^*,u_2^*,u_3^*)^{\mathrm{T}} \in \Omega \cap \mathrm{Ker}L$，其中

$$
\begin{cases}
u_1^*=\ln\dfrac{K_1\bar{r}\cdot\bar{s}-K_2\bar{s}\cdot\overline{r\alpha}}{\bar{r}\cdot\bar{s}-\overline{r\alpha}\cdot\overline{s\beta}},\\
u_2^*=\ln\dfrac{K_2\bar{r}\cdot\bar{s}-K_1\bar{r}\cdot\overline{s\beta}}{\bar{r}\cdot\bar{s}-\overline{r\alpha}\cdot\overline{s\beta}},\\
u_3^*=\ln\dfrac{\bar{\alpha}_1'-\bar{\mu}}{\beta_1\bar{\mu}}+u_1^*.
\end{cases}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&\deg(JQN(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}},\Omega \cap \mathrm{Ker}L,(0,0,0)^{\mathrm{T}})=\\
&\operatorname{sgn}\left[\frac{\bar{r}\cdot\bar{s}-\overline{r\alpha}\,\overline{s\beta}}{K_1K_2}\frac{\beta_1\alpha_1'\mathrm{e}^{u_1^*}}{(\beta_1\mathrm{e}^{u_3^*}+\mathrm{e}^{u_1^*})^2}\right]=1 \neq 0 .
\end{aligned}
$$

至此，已经证明 Ω 满足引理 1 中的所有条件，因此，系统(3)至少有 1 个 ω 周期解，从而系统(1)至少有 1 个正 ω 周期解．

推论 1　定理 1 对系统(1)在具有离散时滞或无时滞时仍成立.

3　结束语

本文对 J. Chattopadhyay 等提出的模型进行了有实际意义的推广, 提出了有 3 种浮游生物种群组成的动力学模型, 包括无毒浮游植物(NTP)、有毒浮游植物(TPP)和浮游动物(Z). 通过应用 Gaines 和 Mawhin 的延拓定理, 建立了保证系统(1)至少存在 1 个正周期解的条件, 这组条件不仅便于验证, 而且揭示了系统中的浮游植物-浮游动物在相互作用中维持营养动力学的动态平衡达到所有物种呈周期性消长的各系数函数之间的制约关系. 本文的研究结果显示, 海洋浮游生物种群之间的共存是动态的, 当相互之间的消长作用达到一定的条件时, 种群的密度会呈现周期性的变化, 而这正好说明了在种群发展的某些时期, 在一定的条件下, 某个种群的密度发生激速增长从而导致水华现象的出现是一种必然.

4　参考文献

[1] Maynard-Smith J. Models in ecology [M]. Cambridge: Cambridge University, 1974.

[2] Chattopadhyay J. Effect of toxic substances on a two-species competitive system [J]. Ecological Modelling, 1996, 84(1/2/3): 287-289.

[3] Mukhopadhyay A, Chattopadhyay J, Tapaswi P K. A delay differential equations model of plankton allelopathy [J]. Math Biosci, 1998, 149(2): 167-189.

[4] Tapaswi P K, Mukhopadhyay A. Effects of environmental fluctuation on plankton allelopathy [J]. J Math Biol, 1999, 39(1): 39-58.

[5] 宋新宇, 陈兰荪. 一类浮游生物植化相克时滞微分方程的周期解 [J]. 数学物理学报, 2003, 23A (1): 8- 13.

[6] Chattopadhyay J, Sarkar R R, Pal S. Mathematical modelling of harmful algal blooms supported by experimental findings [J]. Ecol Comp, 2004, 1(3): 225–235.

[7] Pal S, Samrat Chatterjee, Krishna Pada Das, et al. Role of competition in phytoplankton population for the occurrence and control of plankton bloom in the presence of environmental fluctuations [J]. Ecological Modeling, 2009, 220(2): 96-110.

[8] Arditi R, Ginzburg L R. Coupling in predator-prey dynamics: Ration-dependence [J]. J Theor Biol, 1989, 139(3): 311-326.

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin, New York: Springer, 1977.

[10] 向昭红. 一类食物链条系统的正周期解 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(4): 342-347.

The Existence of Positive Periodic Solutions for a Phytoplankton-Zooplankton Model with Seasonally Varying Parameters and Time Delays

LIU Hua-xiang[1], ZENG Guang-hong[2]

(1. Department of Mathematics, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong 524088, China;
2. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: A three-dimensional ratio-dependent phytoplankton- zooplankton model with time delay and seasonal effects consisting of non-toxic phytoplankton(NTP), toxin producing phytoplankton (TPP) and zooplankton (Z) is considered. The existence of positive periodic solutions for the systems is studied. By using the continuation theorem of coincidence degree theory, a set of sufficient conditions are obtained for the existence of at least one strictly positive periodic solution. The results are established for the underlying systems without time delay or with discrete time delay.

Key words: phytoplankton-zooplankton; time delay; positive periodic solution; the continuation theorem of coincidence degree; topological degree

(责任编辑: 曾剑锋)