文章编号: 1000-5862(2012)05-0516-03

几类图的符号星 k 控制数

徐保根, 丁宗鹏, 喻　卫

(华东交通大学基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 通过对图 G 的边集分析的方法, 对图的符号星 k 控制数进行研究, 确定了几类图的符号星 k 控制数

关键词: 完全图; 符号星 k 控制函数; 符号星 k 控制数

中图分类号: O 157.5　　　文献标志码: A

0　引言

近年来, 图的控制理论研究从图的点控制到边控制, 再到全控制, 研究成果不断丰富[1-12], 但是绝大部分的研究内容是属于图的点控制范畴, 图的边控制的研究成果相对来说还比较少. 文献[8]给出了图的符号边控制概念, 获得了一些显著的研究成果, 随后又从图的符号边控制延伸到图的符号星控制上, 并取得了一系列重要的结论, 文献[9]首次定义了图的符号星 k 控制的概念, 并得出了一些结论. 本文在其基础上确定了几类图的符号星 k 控制数.

给定一个图 $G=(V,E), v\in V$, v 点在 G 中的边邻域简记为 $E_G(v)=\{uv\in E\mid u\in V\}$.

定义 1　设 $G=(V,E)$ 是一个非空图, 函数 f: $E\to\{+1,-1\}$, 如果满足 $\sum\limits_{e\in E(v)} f(e)\geqslant 1$ 对 G 中至少 k 个点成立, 则称 f 为图 G 的一个符号星 k 控制函数. 图 G 的符号星 k 控制数定义为

$$\gamma^{k}{}_{ss}(G)=\min\left\{\sum_{e\in E(G)} f(e)\,\middle|\, f\text{为 } G \text{ 的符号星 } k \text{ 控制函数}\right\}.$$

在定义1中, 当 $k=|V(G)|$ 时, 称 f 为图 G 的一个符号星控制函数, 则图 G 的符号星控制数定义为

$$\gamma'_{ss}(G)=\min\left\{\sum_{e\in E(G)} f(e)\,\middle|\, f\text{为 } G \text{ 的符号星控制函数}\right\}.$$

引理 1　当 $n\geqslant 3$ 时, $\gamma'_{ss}(W_{n+1})=2\lfloor n/4\rfloor+2$.

为了便于描述, 如果 f 为 G 的一个符号星 k 控制函数, 那么称满足 $f(e)=1$ 的边 e 是在 f 下的 1 边, 满足 $f(e)=-1$ 的边 e 是在 f 下的-1 边.

1　主要结果及其证明

在本节中, 将确定完全图、轮图和扇形图的符号星 k 控制数.

定理 1　(i) 当 $1\leqslant k\leqslant\lceil n/2\rceil$ 时,

$$\gamma_{ss}^{k}(K_n)=2k\left\lceil\frac{n-2k+2}{2}\right\rceil+k(k-1)-\frac{n(n-1)}{2};$$

(ii) 当 $k\geqslant\lceil n/2\rceil+1$ 时,

$$\gamma_{ss}^{k}(K_n)=2\left\lceil\frac{k\lceil n/2\rceil}{2}\right\rceil-\frac{n(n-1)}{2}.$$

证　图 $G=K_n$, 当 $1\leqslant k\leqslant\lceil n/2\rceil$ 时, 设 f 为图 G 的一个最小符号星 k 控制函数, 则存在 k 个点 $v_1,v_2,\cdots,v_k\in V(G)$, 使得 $f(E(v_i))\geqslant 1(i=1,2,\cdots,k)$. 令 M_k 为当 k 个点满足 $f(E(v_i))\geqslant 1(i=1,2,\cdots,k)$ 时图 G 的 1 边集, 即 $M_k=\{e\in E\mid f(e)=1\}$. 由定义 1 可知, 这 k 个点中每个点至少邻接了 $\lceil n/2\rceil$ 条 1 边, 并且又 $|M_k|\geqslant\lceil n/2\rceil-(k-1)+|M_{k-1}|$, 不难得到

$$|M_k|\geqslant k\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-\frac{k(k-1)}{2}.$$

于是有

$$\gamma_{ss}^{k}(K_n)=2|M_k|-E(G)\geqslant 2k\lceil n/2\rceil-k(k-1)-n(n-1)/2=2k\lceil(n-2k+2)/2\rceil+k(k-1)-n(n-1)/2.$$

另一方面, 在图 $G=K_n$ 中, 考察它的导出子图 K_k, 其上的所有边均标号 1. 然后图 K_k 中每个点再与图 $G=K_n$ 中除去 K_k 所有点的其它的点邻接

收稿日期: 2012-05-15

基金项目: 国家自然科学基金(11061014)和江西省自然科学基金(20114BAB201010)资助项目.

作者简介: 徐保根(1963-), 男, 江西南昌人, 教授, 主要从事图论与组合数学的研究.

$\lceil (n-2k+2)/2 \rceil$ 条 1 边，剩下图 $G=K_n$ 中未标号边均标号-1．显然此标号满足符号星 k 控制的定义，所以

$$\gamma_{ss}^k(K_n) \leqslant 2k\left\lceil \frac{(n-2k+2)}{2} \right\rceil + k(k-1) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

综上所述，当 $1 \leqslant k \leqslant \lceil n/2 \rceil$ 时，

$$\gamma_{ss}^k(K_n) = 2k\left\lceil \frac{n-2k+2}{2} \right\rceil + k(k-1) - \frac{n(n-1)}{2};$$

当 $k \geqslant \lceil n/2 \rceil + 1$ 时，不难得到

$$|M_k| \geqslant \left\lceil \frac{k\lceil n/2 \rceil}{2} \right\rceil.$$

于是有

$$\gamma_{ss}^k(K_n) = 2|M_k| - E(G) \geqslant 2\left\lceil \frac{k\lceil n/2 \rceil}{2} \right\rceil - \frac{n(n-1)}{2}.$$

另一方面，在图 $G=K_n$ 中，考察它的导出子图 K_k．当 $k\lceil n/2 \rceil$ 为偶数时，考察 K_k 的生成子图 k 阶 $\lceil n/2 \rceil$- 正则图．其上的所有边均标号 1，剩下图 $G=K_n$ 中的边均标号-1．当 $k\lceil n/2 \rceil$ 为奇数时，考察 K_k 的生成子图，其中 $k-1$ 个点均邻接了 $\lceil n/2 \rceil$ 条 1 边，余下的一个点邻接了 $(\lceil n/2 \rceil + 1)$ 条 1 边，剩下图 $G=K_n$ 中未标号边均标号-1．显然此标号满足符号星 k 控制的定义，所以

$$\gamma_{ss}^k(K_n) \leqslant 2\left\lceil \frac{k\lceil n/2 \rceil}{2} \right\rceil - \frac{n(n-1)}{2}.$$

综上所述，当 $k \geqslant \lceil n/2 \rceil + 1$ 时，

$$\gamma_{ss}^k(K_n) = 2\left\lceil \frac{k\lceil n/2 \rceil}{2} \right\rceil - \frac{n(n-1)}{2}.$$

定理 2　(i) 当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时，

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2k-2n+2;$$

(ii) 当 $k=n$ 时，$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 0$；当 $k=n+1$ 时，$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2\lfloor n/4 \rfloor + 2$．

证　图 $G=W_{n+1}(n \geqslant 3)$，当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时，令 M_k 为当 k 个点满足 $f(E(v_i)) \geqslant 1 (i=1,2,\cdots,k)$ 时图 G 的 1 边集，即 $M_k = \{e \in E \mid f(e)=1\}$．不难得到 $|M_k| \geqslant k+1$．于是

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2|M_k| - E(G) \geqslant 2k-2n+2.$$

另一方面，依次取圈上相邻的 k 个点，其所关联的圈上的$(k+1)$条边标号1，剩下的边均标号-1．显然此标号满足符号星 k 控制的定义，于是有

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2|M_k| - E(G) \leqslant 2k-2n+2.$$

综上所述，当 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 时，

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2k-2n+2;$$

当 $k=n$ 时，不难得到 $|M_k| \geqslant k$．

于是

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2|M_k| - E(G) \geqslant 2k-2n = 0.$$

另一方面，取圈上 n 个点，其所关联的圈上 n 条边标号 1，剩下的边均标号-1．显然此标号满足符号星 k 控制的定义，有

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2|M_k| - E(G) \leqslant 2k-2n = 0.$$

综上所述，当 $k=n$ 时，$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 0$．

当 $k=n+1$ 时，由引理 1 知，

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2\lfloor n/4 \rfloor + 2.$$

定理 3　(i) 当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，

$$\gamma_{ss}^k(F_{n+1}) = 2k-2n+3;$$

(ii) 当 $k=n+1$ 时，

$$\gamma'_{ss}(F_{n+1}) = 2\left\lfloor \frac{n+1-\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + 1.$$

证　图 $G=F_{n+1}(n \geqslant 2)$，当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，令 M_k 为当 k 个点满足 $f(E(v_i)) \geqslant 1 (i=1,2,\cdots,k)$ 时图 G 的 1 边集，即 $M_k = \{e \in E \mid f(e)=1\}$．不难得到 $|M_k| \geqslant k+1$．于是

$$\gamma_{ss}^k(W_{n+1}) = 2|M_k| - E(G) \geqslant 2k-2n+3.$$

另一方面，依次取图上相邻的 k 个点(度为 2 或 3)，其所关联外部面上的$(k+1)$条边标号 1，剩下的边均标号-1．显然此标号满足符号星 k 控制的定义，于是有

$$\gamma_{ss}^k(F_{n+1}) = 2|M_k| - E(G) \leqslant 2k-2n+3.$$

综上所述，当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，

$$\gamma_{ss}^k(F_{n+1}) = 2k-2n+3.$$

当 $k=n+1$ 时，图 $G=F_{n+1}(n \geqslant 2)$，对 2 个 2 度点其所关联的边均标号 1，对 $(n-2)$ 个 3 度点每个点至多邻接 1 条-1 边，对最大度的点至多邻接 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 条-1 边．于是

$$\gamma'_{ss}(F_{n+1}) \geqslant 2n-1-2\left(\frac{n-2+\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{2}\right) = n+1-\lfloor (n-1)/2 \rfloor.$$

又 $\gamma'_{ss}(F_{n+1}) = (2n-1)(\mathrm{mod}\,2)$，即

$$\gamma'_{ss}(F_{n+1}) \geqslant 2\left\lfloor \frac{n+1-\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + 1.$$

另一方面，令 u 为扇形最大度点，其它点以 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 依次标示．给出图 G 的一个标号如下:

$f(v_2v_3)=f(v_4v_5)=\cdots=f(v_{2k}v_{2k+1})=f(uv_i)=-1$，其中 $2k<\lceil(n+1)/2\rceil-1, i=\lceil(n+1)/2\rceil,\cdots,n-1$.剩下的边均标号 1．显然此标号符合符号星控制的定义，于是有

$$\gamma'_{ss}(F_{n+1})\leqslant 2n-1-2\left(\lfloor(n-1)/2\rfloor+\left\lfloor\frac{\lceil(n+1)/2\rceil-2}{2}\right\rfloor\right)=2\left\lfloor\frac{n+1-\lfloor(n-1)/2\rfloor}{2}\right\rfloor+1.$$

综上所述，$\gamma'_{ss}(F_{n+1})=2\left\lfloor\frac{n+1-\lfloor(n-1)/2\rfloor}{2}\right\rfloor+1$.

2 参考文献

[1] 徐保根. 图的控制理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[2] Bondy J A, Murty V S R. Graph theory with applications [M]. New York: Elsevier, 1976.

[3] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Domination in graphs [M]. New York: Marcel Dekker, INC, 1998.

[4] 哈拉里 F. 图论 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1980.

[5] Xu Baogen. On minus domination and signed domination in graphs [J]. Journal of Mathematical Research & Exposition, 2003, 23(4): 585-590.

[6] 徐保根．两类图的符号星控制数 [J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(4): 146-148.

[7] 徐保根, 周尚超. 关于图的减边控制 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(1): 21-24.

[8] Xu Baogen. On signed edge domination of graphs [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2007, 27(1): 7-12.

[9] 徐保根, 李春华. 图的符号星 K 控制数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 638-641.

[10] Xu Baogen. On signed cycle domination in graphs [J]. Discrete Math, 2009, 309(4): 1007-1012.

[11] 黄中升．图的逆符号边控制数的上界 [J]. 应用数学学报, 2010, 33(5): 840-846.

[12] 徐保根, 陈悦, 孔祥阳. 图的符号边全 k 控制数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011,35(3): 316-318.

The Signed Star *k* Domination Numbers for Some Graphs

XU Bao-gen, DING Zong-peng, YU Wei

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: The signed *k* domination number in graph *G* is studied by partitioning the edge set of a graph *G*. The signed star k domination numbers for some graphs are given.

Key words: complete graph; signed star domination function; signed star domination number

(责任编辑：曾剑锋)