文章编号: 1000-5862(2012)05-0519-05

基于信息熵的证据融合方法

赖邦城[1,2], 吴根秀[1*]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022; 2. 南昌理工学院公共教学部, 江西 南昌 330044)

摘要: 通过引入信息熵和确定性指数概念, 利用证据的确定性指数对原始证据进行修正, 并对不确定性概率指派重新分配.利用修正后的证据提出了新的融合方法, 算例表明此方法能有效处理证据高冲突的融合问题, 得出合理的融合结果.

关键词: D-S 证据理论; 信息熵; 确定性指数

中图分类号: TP 11　　　　文献标志码: A

0 引言

近年来，许多学者关注信息融合的研究,由于信息具有不精确、不确定和不完备等特点,所以信息融合要综合这些因素,它一般是利用置信度理论来处理信息的不精确性、不确定性和不完备性,得到不同信息源的信息组合规则.D-S 合成规则[1-2]是目前经常使用的一个方法,该规则的关键步骤是对合成后的 bbm 函数标准化以符合 bbm 函数的基本性质.但合成的标准化过程可能会导致推理结果出现悖论[3-4].该问题最早由 L.A. Zadeh 提出,国内外学者对此先后提出多种新的证据合成方法,但均在不同角度存在缺陷.D-S 合成规则的另一问题是组合规则隐含了证据独立性条件,在实际问题中, 2 个证据由于具有相同的信息或背景而彼此相关，融合这种证据必须考虑到它们之间的相关性. 洪少南在文献[5]中就相关证据的相关部分已知时给出了合成方法. 另外,D-S 规则会导致一个自相矛盾的结论,即信息冲突越大,但合成的信息越稳定. 作为信息融合的“逆”过程,信息消去是根据已知信息及信息合成后的结果来推断一个未知的信息, 其中由 Dempster 规则导出的消去算法是一种信息消去算法, 可是它和 DS 合成算法并不可逆,因此,吴根秀等在文献[6]中提出了一个新的合成规则及相应的可逆消去算法.

本文主要就证据独立情况下,通过引入信息熵和确定性指数概念,利用证据的确定性指数对原始证据进行修正,利用修正后的证据提出了新的融合方法,算例表明此方法能有效处理证据高冲突的融合问题,得出合理的融合结果.

1 证据冲突及国内外相关研究

1.1 D-S 组合规则

定义 1　设 Θ 为非空有限识别框架, 若映射 $m:2^{\Theta}\to[0,1]$ 满足

$$\begin{cases} m(\varnothing)=0, \\ \sum\limits_{A\subseteq\Theta} m(A)=1, \end{cases}$$

则称 m 为 Θ 上的基本概率指派函数(Basic Probability Assignment), 简称 BPA 函数. $m(A)$ 表示命题 A 的基本概率指派, 若 $m(A)>0$, 则称 A 为 Θ 的焦元.

设 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 为同一识别框架 Θ 下的 n 个证据, Dempster - Shafer 合成公式为

$$\begin{cases} m(\varnothing)=0, \\ m(A)=\dfrac{1}{1-k}m_{\cap}(A),\ \ A\neq\varnothing, \end{cases}$$

其中 $m_{\cap}(A)=\sum\limits_{\cap A_j=A}\prod\limits_{j=1}^{n}m_j(A_i)$, $k=m_{\cap}(\varnothing)$ 为证据的

收稿日期: 2012-03-20

基金项目: 江西省教育厅科技(GJJ11384)资助项目.

作者简介: 吴根秀(1965-), 女, 江西南丰人, 教授, 主要从事不确定性推理和信息融合的研究.

冲突程度.

当 $k=1$ 时由于证据完全冲突, 所以无法合成; 当 $k\to 1$ 时若 2 个证据高度冲突, 则使用 D-S 规则合成后会产生不符合实际现象的结果, 下面举例说明这个问题.

例 **1** 识别框架为 $\Theta=\{A,B,C\}$, 有 2 个证据的基本概率指派分别为

S_1: $m_1(A)=0.99, m_1(B)=0.01, m_1(C)=0$,

S_2: $m_2(A)=0, m_2(B)=0.01, m_2(C)=0.99$.

组合证据得到 $m(A)=m(C)=0, m(B)=1$, $k=0.999\,9$, 虽然 m_1,m_2 对命题 B 的支持程度都很低, 但融合结果仍然认为 B 为真, 这显然是有悖常理的.

这个问题最早由 L.A.Zadeh 提出,他指出了该合成规则的弊端. 张所地等为 Dempster 合成规则的应用划出了一些禁区.

1.2 改进方法

1.2.1 *基于改进 D-S 合成规则的方法* 基于 D-S 合成规则的弊端, Yager 提出了改进方法, 其本质是不忽略冲突信息, 而认为冲突是由客观无知造成的, 进而将冲突信息全部分配给识别框架, 符合认知逻辑.具体合成规则如下:

$$\begin{cases} m_Y(A)=m_\cap(A), \forall A\subseteq\Theta, A\neq\Theta,\varnothing, \\ m_Y(\Theta)=m_\cap(\Theta)+m_\cap(\varnothing). \end{cases}$$

Yager 规则最大的优势是消除了经典 D-S 合成规则可能带来的不合理现象. 在冲突程度 k 不是很大的情况下,该规则具有较好的应用价值, 但 Yager 规则同样存在缺陷. 主要有 2 个: (a)当冲突较大时, 由于把冲突指派给识别框架, 导致焦元获得的概率指派较小, 聚焦能力差; (b)当证据超过 2 个时, 存在"一票否决"的现象.

例 **2** 识别框架为 $\Theta=\{A,B,C\}$, 有 3 个证据的基本概率指派分别为

$S_1: m_1(A)=0.98, m_1(B)=0.01, m_1(C)=0.01;$

$S_2: m_2(A)=0, m_2(B)=0.01, m_2(C)=0.99;$

$S_3: m_3(A)=0.9, m_3(B)=0, m_3(C)=0.1.$

由 Yager 公式可得

$$m_Y(A)=m_Y(B)=0, m_Y(C)=0.000\,99, m_Y(\Theta)\to 1,$$

从合成结果看, 即使绝大多数证据源支持 A, 仅有 1 个证据源否定 A, 但是合成结果为否定 A, 出现"一票否决"现象.

为此, 孙全等[7]给出了修正方法, 他通过引入有效性系数, 将总冲突 k 按一定比例分配给各个合成命题. 文献[8-9]采用证据距离为每个证据的可信度的方法来研究不可靠证据. 它们之间不同之处是设定有效性系数的方法, 文献[8]对各局部冲突按证据的可信度进行线性分配, 而文献[9]先对两两证据的支持度代数平均, 然后与证据间的相对可信度线性加权, 得到局部冲突的可信度, 最终按可信度线性分配局部冲突. 文献[7-9]在实质上是相同的, 相对于文献[7], 文献[8-9]分析了证据具有不同的可信度, 组合结果更好些. 这些方法本质均是对冲突进行重新分配, 只不过分配方法不同, 其组合模型可统一表示为

$$m(A)=m_\cap(A)+k\delta(A,m), A\neq\varnothing,$$

其中 $A,B,C\in 2^\Theta, k=m_\cap(\varnothing)$ 为证据冲突, $\delta(A,m)$ 为命题的权重且满足 $\sum_{A\subseteq\Theta}\delta(A,m)=1$, 它决定了分配给各个子集的冲突的大小.

1.2.2 *基于修改原始证据源的方法* C.K. Murphy 在文献[10]中首次提出此方法,其先把 n 个证据的 BPA 值取算术平均来给出新的证据模型,然后由 D-S 合成规则对新证据合成 n 次.此方法没有充分考虑到每个证据的重要程度,而仅是以相同权重平均化证据. 何兵等在文献[11]中提出修正方法,该方法模仿了处理冲突信息时所采用的策略,即首先将证据分类,保证分在同一类中的证据具有较大的相似性,然后依据分类结果中各类证据的个数决定对该类合成结果的信任度并通过加权方法得到最终的合成证据.

本文通过引入信息熵和确定性指数概念, 利用证据的确定性指数对原始证据进行修正, 利用修正后的证据提出了新的融合方法, 算例表明此方法能有效处理证据高冲突的融合问题, 得出合理的融合结果.

2 基于信息熵的新的证据合成方法

2.1 相关定义

定义 **2** 设 m 为识别框架 Θ 下的基本概率指派函数,即 BPA 函数, 称

$$I(m)=-\sum_{m(A)>0}m(A)\log_2 m(A) \tag{1}$$

为证据 m 的信息熵, 显然 $I(m)\geqslant 0$. 信息熵反映了

证据中所含信息量的大小, 信息熵越大, 信息量越大, 不确定性也越大.

当 $m(A)=1$ 时, $I(m)=0$ 达到最小, 此时证据完全确定.

当 $m(A_1)=m(A_2)=\cdots=m(A_n)=1/n$ (A_i 为证据焦元) 时, $I(m)=\log_2 n$ 达到最大. 此时证据不确定性程度最高.

考虑到信息熵小的证据, 信息量少, 可信度高, 在 n 个证据合成时应受到更多的支持. 为了描述证据的相对确定性程度, 下面引入确定性指数的概念.

定义 3　设 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 为同一识别框架 Θ 下的 s 个证据, 证据 m_j 的相对确定性指数为

$$\alpha_j=\exp\left(-I(m_j)/\sum_{k=1}^{s}I(m_k)\right). \tag{2}$$

它反映了证据 m_j 相对其它证据的确定性程度大小, $I(m_j)$ 越小, α_j 越大, 从而证据 m_j 越确定, 可信度越高. 此时称 $1-\alpha_j$ 为证据 m_j 的不确定程度.

显然 $0\leqslant I(m_j)/\sum_{k=1}^{s}I(m_k)\leqslant 1$, 所以 $\mathrm{e}^{-1}\leqslant\alpha_j\leqslant 1$. 当非空证据完全确定时, 即 $I(m_j)=0$, $\alpha_j=1$ 达到最大. 当除 m_j 外的其余证据均确定时, 即 $k\neq j, I(m_k)=0$, $\alpha_j=\mathrm{e}^{-1}$ 达到最小.

2.2　证据合成的新方法

由于证据 m_j 的确定程度为 α_j, 可认为 m_j 的基本概率指派 $m_j(A)$ 中确定部分占 α_j, 不确定部分占 $1-\alpha_j$, 对不确定部分需重新分配. 基本概率分配值大的焦元应该多分配, 分配值小的焦元少分配, 通过取分配权重系数 $\delta(A,m_j)=m_j^2(A)/\sum_{A\subseteq\Theta}m_j^2(A)$ 可达到上述目的. 下面利用证据的确定性指数及分配权重给出新的证据合成方法.

首先利用证据的确定性指数 α_j, 把原始证据源修正为 $\alpha_j m_j(A)$, 并对修正后的不确定程度 $1-\alpha_j$ 按焦元权重系数 $\delta(A,m_j)=m_j^2(A)/\sum_{A\subseteq\Theta}m_j^2(A)$ 进行再分配.具体公式如下:

$$m_j'(A)=\begin{cases}a_j m_j(A)+\delta(A,m_j)(1-\alpha_j), A\neq\varnothing,\\ 0, \qquad A=\varnothing,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\delta(A,m_j)=m_j^2(A)/\sum_{m(A)>0}m_j^2(A)$, 它表示分配给命题 A 的不确定概率的比例.

显然, 若 $m_j(A)=0$, 则 $\delta(A,m_j)=0$, 从而 $m_j'(A)=0$.

由(3)式可知, 修改后的证据模型中, 信息将向受支持较高的焦元靠拢, 证据聚焦能力明显提高.

利用修改后的证据源对证据进行合成, 并对总体冲突按权重系数 $\delta'(A,m)=\sum_{j=1}^{n}m_j^2(A)/\sum_{\substack{A\subseteq\Theta\\A\neq\varnothing}}\sum_{j=1}^{n}m_j^2(A)$ 进行分配. 新的合成公式如下:

$$\begin{cases}m(\varnothing)=0,\\ m(A)=m'_{\cap}(A)+\delta'(A,m)k', A\neq\varnothing,\end{cases} \tag{4}$$

其中 $k'=\sum_{\cap A_i=\varnothing}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}m_j'(A_i)$ 表示修正后证据模型的总冲突, $\delta'(A,m)=\sum_{j=1}^{n}m_j^2(A)/\sum_{\substack{A\subseteq\Theta\\A\neq\varnothing}}\sum_{j=1}^{n}m_j^2(A)$, 它决定了分配给命题的冲突的比例.

显然 $\sum_{\substack{A\subseteq\Theta\\A\neq\varnothing}}\delta(A,m)=1$, 且 $\sum_{A\subseteq\Theta}m(A)=\sum_{A\subseteq\Theta}m'_{\cap}(A)+\sum\delta(A,m)k'=1-k'+k'=1$, 合成后满足基本概率指派函数的要求.

命题 1　设 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 为识别框架 Θ 下的 n 个证据, 且 $k=m_{\cap}(\varnothing)\neq 0$, $A\subseteq\Theta$, 使 $m_k(A)\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,n,k\neq j)$, $m_j(A)=0$, 则利用(4)式合成后 $m(A)\neq 0$.

证　由 $m_j(A)=0$ 及 $m_k(A)\neq 0(k=1,2,\cdots,n,k\neq j)$, 显然 $k'=\sum_{\cap A_i=\varnothing}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}m_j'(A_i)\neq 0$, 而 $\delta'(A,m)=\sum_{j=1}^{n}m_j^2(A)/\sum_{\substack{A\subseteq\Theta\\A\neq\varnothing}}\sum_{j=1}^{n}m_j^2(A)\neq 0$, 所以 $m(A)\neq 0$.

命题 1 表明: 只要有证据支持 A, 不管其它证据是否支持 A, 利用公式(4)合成后 A 都将获得支持, 可有效避免"一票否决"现象的发生.

2.3　合成结果评价方法

为了评价融合结果的优劣, 以组合后的基本信任指派函数与各证据源的基本概率指派函数的距离[12]和以及组合后证据自冲突强度为指标对合成结果进行对比.

定义 4　证据 m 的自冲突强度为

$$m^*(\varnothing)=\sum_{B\cap C=\varnothing}m(B)m(C).$$

定义 5　证据 m,m_1 的距离为

$$\|m-m_1\|=\sum_{A\subseteq\Theta}(m(A)-m_1(A))^2 .$$

合成结果评价准则: (i)合成后证据的自冲突强度尽可能小; (ii)合成后结果与原始证据距离尽可能小.

于是评价函数为 $\min f=(\sum\|m-m_L\|+m^*(\varnothing))$, m 表示证据 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的合成.

对于不同的融合方法, 评价函数值越小, 合成结果越合理.

3 实验仿真

例 3[13] 识别框架 $\Theta=\{A,B,C\}$, 有 4 个证据的基本概率分配分别为

$S_1: m_1(A)=0.98, m_1(B)=0.01, m_1(C)=0.01;$

$S_2: m_2(A)=0, m_2(B)=0.01, m_2(C)=0.99;$

$S_3: m_3(A)=0.9, m_3(B)=0, m_3(C)=0.1;$

$S_4: m_4(A)=0.9, m_4(B)=0, m_4(C)=0.1.$

由(1)式求出各个证据的信息熵为

$I(m_1)=0.161\,4$, $I(m_2)=0.080\,8$,

$I(m_3)=I(m_4)=0.469\,0$.

再由(2)式求出各个证据的确定性系数为

$\alpha_1=0.872\,2, \alpha_2=0.933\,8, \alpha_3=\alpha_4=0.672\,1$.

由(3)式对证据源进行修正, 最后由(4)式可得到新的融合结果(见表 1).

表 1 各个融合结果比较

	m_1,m_2	m_1,m_2,m_3	m_1,m_2,m_3,m_4	评价函数值 $\min f$ (4 个证据情形)
D-S 合成公式	$m(A)=0$, $m(B)=0.010\,0$, $m(C)=0.990\,0$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0$, $m(B)=0$, $m(C)=1$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=m(B)=0$, $m(C)=1$, $m(\Theta)=0$	5.180 8
Yager 合成公式	$m(A)=0$, $m(B)=0.000\,1$, $m(C)=0.009\,9$, $m(\Theta)=0.990\,0$	$m(A)=m(B)=0$, $m(C)=0.000\,99$, $m(\Theta)=0.999\,01$	$m(A)=m(B)=0$, $m(C)=0.000\,099$, $m(\Theta)=0.999\,901$	3.580 7
文献[7]的合成公式	$m(A)=0.180\,0$, $m(B)=0.004\,0$, $m(C)=0.194\,0$, $m(\Theta)=0.622\,0$	$m(A)=0.321\,0$, $m(B)=0.003\,0$, $m(C)=0.188\,0$, $m(\Theta)=0.488\,0$	$m(A)=0.420\,0$, $m(B)=0.003\,0$, $m(C)=0.181\,0$, $m(\Theta)=0.396\,0$	1.964 8
文献[8]的合成公式	$m(A)=0.485\,1$, $m(B)=0.010\,0$, $m(C)=0.504\,9$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0.881\,0$, $m(B)=0.005\,1$, $m(C)=0.113\,9$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0.890\,2$, $m(B)=0.003\,4$, $m(C)=0.106\,4$, $m(\Theta)=0$	1.689 1
文献[14]的合成公式	$m(A)=0.485\,1$, $m(B)=0.010\,0$, $m(C)=0.504\,9$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0.626\,0$, $m(B)=0.006\,7$, $m(C)=0.367\,3$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0.694\,9$, $m(B)=0.005\,0$, $m(C)=0.300\,1$, $m(\Theta)=0$	1.502 1
本文合成公式	$m(A)=0.491\,5$, $m(B)=0.000\,2$, $m(C)=0.508\,3$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0.649\,1$, $m(B)=0$, $m(C)=0.350\,9$, $m(\Theta)=0$	$m(A)=0.730\,7$, $m(B)=0$, $m(C)=0.269\,3$, $m(\Theta)=0$	1.494 3

从合成结果及评价函数指标值看, 本文合成方法明显较优.

4 总　结

本文从信息熵入手, 利用确定性指数对证据源进行修正, 使得确定性强的证据获得更多支持.对修正后的不确定概率进行再分配, 高概率焦元将再次获得支持. 在修改后的证据源的基础上提出了新的合成公式, 该公式能有效避免“一票否决”现象的发生. 仿真结果表明, 公式对高冲突证据具有较好的合成结果. 不过, 本文主要针对证据相互独立的情况下给出了一种新的合成方法, 并未对相关证据的合成进行讨论, 这是今后需要进一步研究的内容.

5 参考文献

[1] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a

multi-valued mapping [J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(4): 325-339.

[2] Sharer G. A mathematical theory of evidence [M]. Princeton: Princeton University Press, 1976: 19-63.

[3] Zadeh L A. Review of books: a mathematical theory of evidence [J]. AI Magazine, 1984, 5(3): 81-83.

[4] 张所地，王拉娣. Dempster-Shafer 合成法则的悖论 [J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(5): 82-85.

[5] 洪少南. 相关部分已知时的相关证据合成 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2011, 35(5): 478-481.

[6] 吴根秀，连钢. 一种新的信息合成规则及其消去算法 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2009, 33(5): 539-543.

[7] 孙全，叶臭清，顾伟康. 一种新的基于证据理论的合成公式 [J]. 电子学报, 2000(8): 117-119.

[8] 邓勇，施文康. 一种改进的证据推理组合规则 [J]. 上海交通大学学报：自然科学版, 2003, 37(18): 1275-1279.

[9] 蒲书缙，杨雷，杨莘元，等. 一种改进的证据合成规则 [J]. 计算机工程, 2006, 32(23): 7-9.

[10] Murphy C K. Combining belief functions when evidence conflicts [J]. Decision Support Systems, 2000, 29(1): 1-9.

[11] 何兵. 基于分类不确定熵的 D-S 证据合成及判决方法 [J]. 电子与信息学报, 2002, 24(7): 894-899.

[12] 吴根秀. 冲突证据组合方法 [J]. 计算机工程, 2005(9): 151-154.

[13] 杜峰，施文康，邓勇. 证据特征提取及其在证据理论改进中的应用 [J]. 上海交通大学学报：自然科学版，2004，38(12): 164-168.

[14] 李弼程，王波，魏俊，等. 一种有效的证据理论合成公式 [J]. 数据采集与处理, 2002(17): 33-36.

The Evidence Combination Method Based on Information Entropy

LAI Bang-cheng[1, 2], WU Gen-xiu[1*]

(1. College of Mathematics Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022,China
2. Department of Public Teaching, Nanchang Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330044,China)

Abstract: After introducing the concept of informatics entropy and certainty index, the original evidence is amended by using the evidence certainty index and then the uncertainty probability is reassigned. A new combination formula is given by taking advantage of the revised evidence. Examples indicate that this method can effectively deal with the combination of evidence with high conflict, and come to a reasonable fusion results.

Key words: D-S theory of evidence; information entropy; certainty index

(责任编辑：曾剑锋)