文章编号: 1000-5862(2012)06-0579-05

微分方程 $f''+A_1(z)e^{az^n}f'+A_0(z)e^{bz^n}f=F(z)$ 的复振荡

李延玲, 刘慧芳*, 冯　斌

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西　南昌 330022)

摘要: 研究微分方程 $f''+A_1(z)e^{az^n}f'+A_0(z)e^{bz^n}f=F(z)$ 的复振荡问题, 其中 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是多项式, $F(z)(\not\equiv 0)$ 是整函数, 且 $\deg(A_0)<\deg(A_1)<n-1(n\geqslant 2)$, $\sigma(F)<n$, 得到上述方程的每个非零解 $f(z)$ 满足 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$, $\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n$.

关键词: 微分方程; 整函数; 增长级; 超级

中图分类号: O 174.52　　　　文献标志码: A

0　引言及主要结果

本文采用值分布理论的标准记号[1-3], 并用 $\sigma(f),\lambda(f),\overline{\lambda}(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级、零点收敛指数、不同零点收敛指数, 用 $\sigma_2(f),\lambda_2(f),\overline{\lambda_2}(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的超级、2 级零点收敛指数、2 级不同零点收敛指数[4].

2001 年, 陈宗煊研究了如下问题: 设 $Q(z)$ 是有限级整函数, 当 $\sigma(Q)=1$ 时, $Q(z)$ 满足什么条件, 将使得微分方程 $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ 的每一非零解具有无穷级?得到的下述结果大大推广和完善了 M. Frei, M. Ozawa, G. Gundersen 等[5-8]的结果.

定理 A[9]　设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$, a,b 是复常数, 满足 $ab\neq 0$ 和 $a=cb(c>1)$, 则方程

$$f''+A_1(z)e^{az}f'+A_0(z)e^{bz}f=0$$

的所有非零解 $f(z)$ 具有无穷级.

2005 年, 李纯红研究了对应于上述齐次方程的非齐次方程解的性质, 得到下述结果.

定理 B[10]　设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1),F(z)(\not\equiv 0)$ 是整函数, 且 $\sigma(A_j)<1$, $\sigma(F)<\infty$, a,b 是复常数, 满足 $ab\neq 0$ 和 $a=cb(c>1)$, 则方程

$$f''+A_1(z)e^{az}f'+A_0(z)e^{bz}f=F(z)$$

满足

(i) 除至多有 1 个可能的有穷级例外解 $f_0(z)$ 外, 其余所有解有

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty;$$

(ii) 如果存在(i)中有穷级例外解 $f_0(z)$, 那么 $f_0(z)$ 满足

$$\sigma(f_0)\leqslant\max\{\overline{\lambda}(f_0),\sigma(F),1\}.$$

若 $\sigma(F)\neq 1$, 且 $\overline{\lambda}(f_0)<\sigma(f_0)$, 则有

$$\sigma(f_0)=\max\{\sigma(F),1\}.$$

本文研究了 2 阶非齐次线性微分方程解的性质, 得到其级和零点收敛指数的精确估计.

定理 1　假设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是多项式, 且 $\deg(A_0)<\deg(A_1)<n-1(n\geqslant 2)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ 是级小于 n 的整函数, a,b 是复常数, 满足 $ab\neq 0$ 和 $a=cb(c>1)$, 则方程

$$f''+A_1(z)e^{az^n}f'+A_0(z)e^{bz^n}f=F(z)\qquad(1)$$

的每一非零解 $f(z)$ 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty,\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n.$$

注 1　定理 1 中, 如果 $\sigma(F)\geqslant n$, 方程(1)可能存在有穷级解.

例 1　微分方程

$$f''+e^{2z^n}f'+e^{z^n}f=e^z\left(1+e^{2z^n}+e^{z^n}\right)$$

有解 $f=e^z$, 满足 $\sigma(f)=1$, $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=0$.

收稿日期: 2012-06-06

基金项目: 国家自然科学基金(11201195, 11171119), 江西省自然科学基金(20122BAB201012)和江西省教育厅科技(GJJ12179)资助项目.

作者简介: 刘慧芳(1973-), 女, 江西半城人, 副教授, 博士, 主要从事复分析的研究.

1 引 理

引理 1[11] 设 $f(z)$ 是整函数且 $\sigma(f)=\sigma<+\infty$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在有限线性测度或有限对数测度之集 $E_1\subset(1,\infty)$，使得对满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的 z，有

$$\exp\left\{-r^{\sigma+\varepsilon}\right\}\leqslant|f(z)|\leqslant\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}.$$

引理 2[9,12-13] 设 $P(z)=(\alpha+\mathrm{i}\beta)z^n+\cdots(\alpha,\beta$是实数，$|\alpha|+|\beta|\neq0)$ 是多项式且次数 $n\geqslant1$，$A(z)(\not\equiv0)$ 是整函数且 $\sigma(A)<n$．令

$g(z)=A(z)\mathrm{e}^{P(z)}, z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \delta(P,\theta)=\alpha\cos n\theta-\beta\sin n\theta$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在集合 $H_1\subset[0,2\pi)$，其线测度为 0，满足 $\forall\theta\in[0,2\pi)\setminus(H_1\cup H_2)$，$\exists R>0$，使得 $|z|=r>R$，有

(i) 若 $\delta(P,\theta)>0$，则

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\}\leqslant\left|g\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\leqslant\exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\};$$

(ii) 若 $\delta(P,\theta)<0$，则

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\}\leqslant\left|g\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\leqslant\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\right\},$$

其中 $H_2=\{\theta\in[0,2\pi);\delta(P,\theta)=0\}$ 是有限集.

引理 3 设 $f(z)$ 是整函数且 $\sigma(f)=\infty$ 和 $\sigma_2(f)=\alpha<+\infty$，集合 $E\subset[1,\infty)$ 有有限对数测度，则存在点列 $\left\{z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right\}$，满足 $|f(z_k)|=M(r_k,f)$，$\theta_k\in[0,2\pi)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0\in[0,2\pi)$，$r_k\notin E$，$r_k\to\infty$，使得 $\forall\varepsilon>0$，当 r_k 充分大时，有

$$\varlimsup_{k\to\infty}\log v(r_k)/\log r_k=\infty, \tag{2}$$

$$\exp\left\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\right\}<v(r_k)<\exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{3}$$

其中 $v(r)$ 是 $f(z)$ 的中心指标.

引理 4 设 $f(z)$ 是整函数且 $\sigma(f)=\sigma<+\infty$，集合 $E\subset[1,\infty)$ 有有限对数测度,则存在点列 $\left\{z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right\}$，满足 $|f(z_k)|=M(r_k,f)$，$\theta_k\in[0,2\pi)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0\in[0,2\pi)$，$r_k\notin E$，$r_k\to\infty$，使得 $\forall\varepsilon>0$，当 r_k 充分大时，有

$$\varlimsup_{k\to\infty}\log v(r_k)/\log r_k=\sigma, \tag{4}$$

$$r_k^{\sigma-\varepsilon}<v(r_k)<r_k^{\sigma+\varepsilon}. \tag{5}$$

引理 5 设 $f(z),F(z)(\not\equiv0)$ 是整函数，且 $\sigma(F)<\sigma(f)$，则存在点列 $\left\{z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right\}$，满足 $|f(z_k)|=M(r_k,f)$，$\theta_k\in[0,2\pi)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0\in[0,2\pi)$，有

$$\lim_{r_k\to\infty}|F(z_k)/f(z_k)|=0. \tag{6}$$

证 只讨论 $\sigma(f)<\infty$ 的情形，对 $\sigma(f)=\infty$ 的情形可以类似证明. 由引理 1，$\forall\varepsilon(0<3\varepsilon<\sigma(f)-\sigma(F))$，存在一集合 $E\subset[1,\infty)$ 有有限对数测度，使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E$ 的 z，当 r 充分大时，有

$$|F(z)|\leqslant\exp\left\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}. \tag{7}$$

根据文献[2，p26]的推论，$\forall\varepsilon'$ $(0<\varepsilon'<1)$，有 $\mu(r)\leqslant M(r,f)$，$\upsilon(r)<[\log\mu(r)]^{1+\varepsilon'}$.

再结合引理 4 知,存在点列 $\left\{z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right\}$，满足 $|f(z_k)|=M(r_k,f)$，$\theta_k\in[0,2\pi)$，$\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0\in[0,2\pi)$，$r_k\notin[0,1]\cup E$，$r_k\to\infty$，且对充分大的 r_k，有

$$\exp\left\{r_k^{\sigma(f)-2\varepsilon}\right\}<M(r_k,f). \tag{8}$$

由(7)~ (8)式得

$$\lim_{r_k\to\infty}\left|\frac{F(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant\frac{\exp\left\{r_k^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r_k^{\sigma(f)-2\varepsilon}\right\}}\to0.$$

引理 6[3,10] 设 $A(z)$，$B(z)$，$F(z)$ 均是有穷级整函数，则方程 $f''+Af'+Bf=F(z)$ 的所有无穷级解满足

(i) $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$;

(ii) $\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)\leqslant\sigma=\max\{\sigma(A),\sigma(B)\}$.

2 定理的证明

定理 1 的证明 令 $A_j(z)=a_{m_j}z^{m_j}+\cdots$ $(a_{m_j}\neq0,j=0,1)$．由复域内微分方程的基本理论知，方程(1)的所有解均为整函数. 设 $f(z)$ 是方程(1)的非零解，下面分 2 步证明 $\sigma(f)=\infty$.

第 1 步：证明 $\sigma(f)\geqslant n$．假设 $\sigma(f)=\sigma<n$，则 $\sigma\left(f^{(j)}\right)=\sigma(f)=\sigma<n(j=1,2)$．从而由引理 1，$\forall\varepsilon\left(0<\varepsilon<\min\{(c-1)/(2c+2),n-\sigma(F)\}\right)$，存在有限对数测度集 $E_1\subset[1,\infty)$，使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的 z，当 r 充分大时，有

$$\left|f^{(j)}(z)\right|\leqslant\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}(j=1,2), \tag{9}$$

$$\left|F(z)\right|\leqslant \exp\left\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}. \tag{10}$$

又由引理 2, 对上述 ε, 存在一射线 $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus(H_1\cup H_2)$ (其中 $H_1\subset[0,2\pi)$ 是线测度为 0 的集合, $H_2=\{\theta\in[0,2\pi);\delta(P,\theta)=0\}$ 是有限集), 使 $\delta(az^n,\theta)=c\delta(bz^n,\theta)>0$, 且对充分大的 r, 有

$$\left|A_1\left(re^{i\theta}\right)f'\left(re^{i\theta}\right)e^{ar^ne^{in\theta}}\right|\geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta\left(az^n,\theta\right)r^n\right\}, \tag{11}$$

$$\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)f\left(re^{i\theta}\right)e^{br^ne^{in\theta}}\right|\leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)(1/c)\delta\left(az^n,\theta\right)r^n\right\}. \tag{12}$$

结合(9)~(12)式和方程(1)得

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta\left(az^n,\theta\right)r^n\right\}\leqslant\left|A_1\left(re^{i\theta}\right)f'\left(re^{i\theta}\right)e^{ar^ne^{in\theta}}\right|\leqslant$$
$$\left|f''\left(re^{i\theta}\right)\right|+\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)f\left(re^{i\theta}\right)e^{br^ne^{in\theta}}\right|+\left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|\leqslant$$
$$\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}+\exp\left\{(1+\varepsilon)(1/c)\delta\left(az^n,\theta\right)r^n\right\}+\exp\left\{r^{\sigma(F)+\varepsilon}\right\}\leqslant$$
$$3\exp\left\{r^{\beta_1+\varepsilon}\right\}\exp\left\{(1+\varepsilon)(1/c)\delta\left(az^n,\theta\right)r^n\right\}, \tag{13}$$

其中 $\beta_1=\max\{\sigma,\sigma(F)\}<n$. 由(13)式得

$$\exp\left\{\left((c+1)/c\right)\varepsilon\delta\left(az^n,\theta\right)r^n\right\}\leqslant 3\exp\left\{r^{\beta_1+\varepsilon}\right\},$$

矛盾. 从而 $\sigma(f)\geqslant n$.

第 2 步: 证明 $\sigma(f)=\infty$. 设 $\sigma(f)=\sigma<\infty$, 则由第 1 步知 $\sigma(f)\geqslant n$.

由 Wiman-Valiron 理论, 存在一对数测度为有限的集合 $E_2\subset(1,\infty)$, 使得对所有满足 $|f(z)|=M(r,f)$ 和 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 的 z, 有

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{v(r)}{z}\right)^j\left(1+o(1)\right), j=1,2. \tag{14}$$

又由引理 4 和引理 5, 存在点列 $\left\{z_k=r_ke^{i\theta_k}\right\}$, 满足 $\left|f(z_k)\right|=M(r_k,f)$, $\theta_k\in[0,2\pi)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0\in[0,2\pi)$, $r_k\notin[0,1]\cup E_2$, $r_k\to\infty$, 使得 $\forall\varepsilon>0$, 当 r_k 充分大时, 有(4)~(6)式成立.

令 $\delta=\delta\left(az^n,\theta_0\right)$, 则存在 3 种情形: (i) $\delta>0$; (ii) $\delta<0$; (iii) $\delta=0$.

情形(i)　$\delta>0$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0$, 则当 k 充分大时, 有 $\delta_k=:\delta\left(az_k^n,\theta_k\right)>0$. 从而 $\delta\left(-bz_k^n,\theta_k\right)=(-1/c)\delta_k<0$, $\delta\left(az_k^n-bz_k^n,\theta_k\right)=\left((c-1)/c\right)\delta_k>0$. 故由引理 2, 当 r_k 充分大时, 有

$$\left|e^{-bz_k^n}\right|\leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)(-1/c)\delta_kr_k^n\right\}, \tag{15}$$

$$\left|A_1(z_k)e^{az_k^n-bz_k^n}\right|\geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\left((c-1)/c\right)\delta_kr_k^n\right\}. \tag{16}$$

改写方程(1)得

$$-A_1(z)e^{az^n-bz^n}\frac{f'(z)}{f(z)}=e^{-bz^n}\left(\frac{f''(z)}{f(z)}-\frac{F(z)}{f(z)}\right)+A_0(z). \tag{17}$$

从而由(5)~(6)式及(14)~(17)式得, $\forall\varepsilon>0$ 及充分大的 k, 有

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\left((c-1)/c\right)\delta_kr_k^n\right\}r_k^{\sigma-\varepsilon-1}\left(1+o(1)\right)\leqslant$$
$$\left|A_1(z_k)e^{az_k^n-bz_k^n}\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant$$
$$\left|e^{-bz_k^n}\right|\left(\left|\frac{f''(z_k)}{f(z_k)}\right|+\left|\frac{F(z_k)}{f(z_k)}\right|\right)+\left|A_0(z_k)\right|\leqslant$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(-1/c)\delta_kr_k^n\right\}\left(r_k^{2(\sigma+\varepsilon-1)}\left(1+o(1)\right)+o(1)\right)+$$
$$r_k^{m_0+1}\leqslant\ 2r_k^{2(\sigma+\varepsilon-1)}+r_k^{m_0+1},$$

这是矛盾的.

情形(ii)　$\delta<0$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0$, 则当 k 充分大时, 有 $\delta\left(az_k^n,\theta_k\right)=\delta_k<0$, 从而 $\delta\left(bz_k^n,\theta_k\right)=(1/c)\delta_k<0$. 故由引理 2, 当 r_k 充分大时, 有

$$\left|A_1(z_k)e^{az_k^n}\right|\leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_kr_k^n\right\}, \tag{18}$$

$$\left|A_0(z_k)e^{bz_k^n}\right|\leqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)(1/c)\delta_kr_k^n\right\}. \tag{19}$$

改写方程(1)得

$$-\frac{f''(z)}{f(z)}=A_1(z)e^{az^n}\frac{f'(z)}{f(z)}+A_0(z)e^{bz^n}-\frac{F(z)}{f(z)}. \tag{20}$$

从而由(5)~(6)式、(14)式及(18)~(20)式得, $\forall\varepsilon>0$ 及充分大的 k, 有

$$r_k^{2(\sigma-\varepsilon-1)}\left(1+o(1)\right)\leqslant\frac{v^2(r_k)}{r_k^{\ 2}}\left(1+o(1)\right)\leqslant\left|\frac{f''(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_kr_k^n\right\}\frac{v(r_k)}{r_k}\left(1+o(1)\right)+$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(1/c)\delta_kr_k^n\right\}+o(1)\leqslant$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_kr_k^n\right\}r_k^{\sigma+\varepsilon-1}\left(1+o(1)\right)+$$
$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(1/c)\delta_kr_k^n\right\}+o(1)\to 0,$$

这是矛盾的.

情形(iii)　$\delta=0$. 由对任意 k, $\mathrm{Re}\left\{ar_k^ne^{in\theta_0}\right\}=0$ 和直线 $\arg z=\theta_0$ 是 $\left\{ar_k^ne^{in\theta_k}\right\}$ 的渐近线, 因而 $\exists K>0$, 满足当 $k>K$ 时, 有

$$-1<\mathrm{Re}\left\{ar_k^ne^{in\theta_k}\right\}<1,\quad -1/c<\mathrm{Re}\left\{br_k^ne^{in\theta_k}\right\}<1/c. \tag{21}$$

由(6)、(14)和(21)式及方程(1)得, 对充分大的 k, 有

$$v^2(r_k)r_k^{-2}(1+o(1))=\left|f''(z_k)/f(z_k)\right|\leqslant$$

$$\left|A_1(z_k)e^{az_k^n}\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|+\left|A_0(z_k)e^{bz_k^n}\right|+\left|\frac{F(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant$$

$$e\left|a_{m_1}\right|r_k^{m_1}v(r_k)r_k^{-1}(1+o(1))+e\left|a_{m_0}\right|r_k^{m_0}(1+o(1))+o(1), \tag{22}$$

由(22)式得 $v(r_k)\leqslant Mr_k^{m_1+1}$, 其中 $m_0<m_1<n-1(n\geqslant 2)$, $M>0$ 为某一常数, 这与(5)式矛盾.

最后由引理 6 得, $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

下面证明 $\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n$. 设 $f(z)$ 是方程(1)的无穷级解. 由引理 6 知

$$\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)\leqslant n=\max\left\{\sigma\left(A_1e^{az^n}\right),\sigma\left(A_0e^{bz^n}\right)\right\}.$$

下面断言 $\sigma_2(f)=n$. 否则, 设 $\sigma_2(f)=\alpha<n$.

由 Wiman-Valiron 理论, 存在一对数测度为有限的集合 $E_3\subset(1,\infty)$, 使得对所有满足 $|f(z)|=M(r,f)$ 和 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$ 的 z, 有(14)式成立.

由引理 3, 存在点列 $\left\{z_k=r_ke^{i\theta_k}\right\}$, 满足 $|f(z_k)|=M(r_k,f)$, $\theta_k\in[0,2\pi)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0\in[0,2\pi)$, $r_k\notin[0,1]\cup E_3$, $r_k\to\infty$, 使得 $\forall\varepsilon>0$, 当 r_k 充分大时, 有(2)~(3)式成立.

令 $\delta=\delta(az^n,\theta_0)$, 则存在 3 种情形: (i) $\delta<0$; (ii) $\delta>0$; (iii) $\delta=0$.

情形 (i) $\delta<0$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0$, 则当 k 充分大时, 有 $\delta(az_k^n,\theta_k)=\delta_k<0$, 从而 $\delta(-bz_k^n,\theta_k)=(-1/c)\delta_k>0$, $\delta(az_k^n-bz_k^n,\theta_k)=((c-1)/c)\delta_k<0$. 故由引理 2, 当 r_k 充分大时, 有

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(-1/c)\delta_kr_k^n\right\}\leqslant\left|e^{-bz_k^n}\right|, \tag{23}$$

$$\left|A_1(z_k)e^{az_k^n-bz_k^n}\right|\leqslant\exp\left\{(1-\varepsilon)((c-1)/c)\delta_kr_k^n\right\}. \tag{24}$$

又由引理 5, 有

$$\lim_{r_k\to\infty}\left|e^{-bz_k^n}F(z_k)/f(z_k)\right|=0. \tag{25}$$

改写方程(1)得

$$-e^{-bz^n}\frac{f''(z)}{f(z)}=A_1(z)e^{az^n-bz^n}\frac{f'(z)}{f(z)}+A_0(z)-e^{-bz^n}\frac{F(z)}{f(z)}. \tag{26}$$

由(3)、(14)式及(23)~(26)式得, $\forall\varepsilon(0<2\varepsilon<n-\alpha)$ 及充分大的 k, 有

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(-1/c)\delta_kr_k^n\right\}\exp\left\{2r_k^{\alpha-\varepsilon}\right\}r_k^{-2}(1+o(1))\leqslant$$

$$\left|e^{-bz_k^n}f''(z_k)/f(z_k)\right|\leqslant$$

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)((c-1)/c)\delta_kr_k^n\right\}v(r_k)r_k^{-1}(1+o(1))+$$

$$r_k^{m_0+1}+o(1)\leqslant\exp\left\{(1-\varepsilon)((c-1)/c)\delta_kr_k^n\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_k^{-1}(1+o(1))+r_k^{m_0+1}+o(1)\leqslant 3r_k^{m_0+1},$$

这是矛盾的.

情形(ii) $\delta>0$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0$, 则当 k 充分大时, 有 $\delta(az_k^n,\theta_k)=\delta_k>0$, 从而 $\delta(-az_k^n,\theta_k)=-\delta_k<0$, $\delta(bz_k^n-az_k^n,\theta_k)=((1-c)/c)\delta_k<0$. 由引理 2, 当 r_k 充分大时, 有

$$\left|e^{-az_k^n}\right|\leqslant\exp\left\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k^n\right\}, \tag{27}$$

$$\left|A_0(z_k)e^{bz_k^n-az_k^n}\right|\leqslant\exp\left\{(1-\varepsilon)((1-c)/c)\delta_kr_k^n\right\}. \tag{28}$$

又由引理 5, 有

$$\lim_{r_k\to\infty}\left|e^{-az_k^n}F(z_k)/f(z_k)\right|=0. \tag{29}$$

改写方程(1)得

$$-A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=e^{-az^n}\frac{f''(z)}{f(z)}+e^{bz^n-az^n}A_0(z)-e^{-az^n}\frac{F(z)}{f(z)}. \tag{30}$$

由(3)、(14)式及(27)~(30)式得, $\forall\varepsilon(0<2\varepsilon<n-\alpha)$ 及充分大的 k, 有

$$\left|a_{m_1}\right|r_k^{m_1}\exp\left\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\right\}r_k^{-1}(1-o(1))\leqslant$$

$$\left|a_{m_1}\right|r_k^{m_1}(1-o(1))\frac{v(r_k)}{r_k}(1+o(1))\leqslant$$

$$\left|A_1(z_k)f'(z_k)/f(z_k)\right|\leqslant$$

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k^n\right\}\frac{v^2(r_k)}{r_k^2}(1+o(1))+$$

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{1-c}{c}\delta_kr_k^n\right\}+o(1)\leqslant$$

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k^n\right\}\exp\left\{2r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_k^{-2}(1+o(1))+$$

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{1-c}{c}\delta_kr_k^n\right\}+o(1)\to 0.$$

这是矛盾的.

情形(iii) $\delta=0$. 由对任意 k, $\mathrm{Re}\left\{ar_k^ne^{in\theta_0}\right\}=0$ 和直线 $\arg z=\theta_0$ 是 $\left\{ar_k^ne^{in\theta_k}\right\}$ 的渐近线, 因而 $\exists K>0$, 满足当 $k>K$ 时, 有

$$-1<\operatorname{Re}\left\{ar_k^n e^{in\theta_k}\right\}<1,\quad -1/c<\operatorname{Re}\left\{br_k^n e^{in\theta_k}\right\}<1/c. \quad (31)$$

由(6)、(14)、(31)式和方程(1)得, 对充分大的 k, 有

$$\frac{v^2(r_k)}{r_k^2}(1+o(1))=\left|\frac{f''(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant$$

$$\left|A_1(z_k)e^{az_k^n}\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right|+\left|A_0(z_k)e^{bz_k^n}\right|+\left|\frac{F(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant \quad (32)$$

$$e\,r_k^{m_1+1}v(r_k)r_k^{-1}(1+o(1))+er_k^{m_0+1}+o(1),$$

由(32)式得 $v(r_k)\leqslant Mr_k^{m_1+2}$, 其中 $M>0$ 为某一常数, 这与(3)式矛盾.

所以 $\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n$.

3　参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[3] 高仕安, 陈宗煊, 陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武昌: 华中理工大学出版社, 1997.

[4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] Frei M. Über die subnormalen lösungen der differentialgleichung $\omega''+e^{-z}\omega'+(\text{konst.})\omega=0$ [J]. Comment Math Helv, 1962, 36: 1-8.

[6] Ozawa M. On a solution of $\omega''+e^{-z}\omega'+(az+b)\omega=0$ [J]. Kodai Math J, 1980, 3(2): 295-309.

[7] Gundersen G . On the question of whether $f''+e^{-z}f'+B(z)f=0$ can admit a solution $f\neq 0$ of finite order [J]. Proc R S E, 1986, 102(1/2): 9-17.

[8] Langley J K. On complex oscillation and a problem of Ozawa [J]. Kodai Math J, 1986, 9(3): 430-439.

[9] 陈宗煊. 微分方程 $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ 解的增长性 [J]. 中国科学: A 辑, 2001, 31(9): 775-784.

[10] 李纯红, 顾永兴. 微分方程 $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=F(z)$ 的复振荡 [J]. 数学物理学报, 2005, 25A(2): 192-200.

[11] Chen Zongxuan. The zero, pole and order of meromorphic solution of differential equations with meromorphic coefficients [J]. Kodai Math J, 1996, 19(3): 341-354.

[12] 毛志强. 某类 2 阶微分方程解的增长级与零点 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(4): 334-338.

[13] 涂金, 陈宗煊, 曹廷彬, 等. 某类高阶微分方程解的复振荡 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2005, 29(1): 8-11.

On the Complex Oscillation of Differential Equations $f''+A_1(z)e^{az^n}f'+A_0(z)e^{bz^n}f=F(z)$

LI Yan-ling, LIU Hui-fang*, FENG Bin

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The complex oscillation problem concerning the differential equation $f''+A_1(z)e^{az^n}f'+A_0(z)e^{bz^n}f=F(z)$ has been investigated, where $A_j(z)(\neq 0)(j=0,1)$ are nonzero polynomials satisfying $\deg(A_0)<\deg(A_1)<n-1(n\geqslant 2)$, $F(z)(\neq 0)$ is an entire function of $\sigma(F)<n$. It is proved that every nonzero solution $f(z)$ of the above equation satisfies $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$, $\overline{\lambda_2}(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=n$.

Key words: differential equation; entire function; order of growth; hyper-order

(责任编辑: 王金莲)