文章编号: 1000-5862(2012)06-0589-05

一类超 2 次 2 阶哈密顿系统的无穷多周期解

李　芳，张清业*

(江西师范大学数学与信息科学学院，江西　南昌 330022)

摘要：运用临界点理论中的喷泉定理研究了一类超 2 次 2 阶哈密顿系统多重周期解的问题，得到了其无穷多个大能量周期解的存在性，丰富并推广了已有的结果.

关键词：超 2 次；哈密顿系统；周期解; Cerami 条件；喷泉定理

中图分类号: O 177.25　　　　文献标志码: A

0　引言及主要结论

考虑 2 阶哈密顿系统如下:

$$\begin{cases} \ddot{u}+\nabla_u V(t,u)=0, & \forall t\in \mathbf{R}, \\ u(0)=u(T),\dot{u}(0)=\dot{u}(T),T>0, \end{cases} \tag{1}$$

其中$V(t,u)=\langle U(t)u,u\rangle/2+W(t,u)$且$V\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$以$T$为周期，$U(\cdot)$为一连续的以$T$为周期的对称矩阵函数．记$\langle\cdot,\cdot\rangle$及$|\cdot|$分别为$\mathbf{R}^N$的标准内积及相应范数．

在超 2 次情形下，许多文献对系统(1)周期解的存在或多重性进行了研究[1-12]，但大部分关于其周期解多重性的结果都是在$W(t,u)$满足“Ambrosetti-Rabinowitz 超 2 次条件”下得到的．文献[4]给出了一个新形式的超 2 次条件：对$t\in[0,T]$一致地有

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{W(t,u)}{|u|^2}=\infty,$$

并在此条件和其它假设下，得到了系统(1)周期解的存在性结果．此外，在该超 2 次条件下，文献[13]对$U(t)$恒为 0 的情形，得到了系统(1)无穷多周期解的存在性结果；而文献[14]对$U(t)$不恒为 0 的情况，运用喷泉定理的变化形式[15]，也得到了系统(1)无穷多周期解的存在性结果．受这些研究的启发，在不同于文献[14]的条件下，本文将研究系统(1)无穷多个大能量周期解的存在性．具体地，记$\tilde{W}(t,u)=\langle\nabla_u W(t,u),u\rangle-2W(t,u)$，给出如下假设:

(W1) 存在常数$a_1>0$及$\gamma>2$，使得$\forall(t,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$，有$|\nabla_u W(t,u)|\leqslant a_1(1+|u|^{\gamma-1})$；

(W2) $\forall t\in[0,T]$，一致地有$\lim\limits_{|u|\to\infty}W(t,u)/|u|^2=\infty$；

(W3) $\exists\mu\geqslant 1$，对$(t,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$，$s\in[0,1]$，有$\mu\tilde{W}(t,u)\geqslant\tilde{W}(t,su)$；

(W4) 对$(t,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$，有$W(t,-u)=W(t,u)$．

在上述条件下，将证明如下结果:

定理 1　设$W(t,u)$满足(W1)~(W4)，则系统(1)有一列解$\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$满足：当$k\to\infty$时，

$$\frac{1}{2}\int_0^T\left(|\dot{u}_k|^2-\langle U(t)u_k,u_k\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T W(t,u_k)\mathrm{d}t\to\infty．$$

注 1　文献[14]的结果是运用文献[15]中所建立的“变化的喷泉定理”来证明的，因此必须要求$W(t,u)$在$[0,T]\times\mathbf{R}^N$总是非负的.相比之下，定理 1 则不需要这一限制性较强的条件.此外，定理 1 中的条件(W3)与文献[14]中条件(SQ_3)属于互相不蕴含的 2 类条件.事实上，文献[14]中的条件(SQ_3)能保证有些变分泛函在一些特殊的扰动下满足(PS)条件，而定理 1 中的条件(W3)并不能保证这一点.为了克服这一困难，将运用定理1中的条件(W3)来证明相应的泛函满足相对更弱的 Cerami 条件，从而可以运用 Cerami 条件下的喷泉定理来证明本文的结果.

1　空间分解及问题分析

$\forall u\in H^1(S_T,\mathbf{R}^N)$，令$\|u\|_1=\left(\int_0^T\left(|\dot{u}|^2+|u|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$，

收稿日期：2012-09-20

基金项目：国家自然科学基金数学天元基金(11126146)和江西师范大学青年成长基金(3914)资助项目.

作者简介：张清业(1982-)，男，湖北洪湖人，讲师，博士，主要从事哈密顿系统的研究.

其中 $S_T=\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$，则 $H^1\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$ 为 Hilbert 空间．记 $L^2\equiv L^2\left((0,T),\mathbf{R}^N\right)$ 上的哈密顿算子 $A=-\left(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\right)-U(t)$，其定义域为 $D(A)=H^2\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$，则 A 为一共轭算子且具有如下特征值序列:

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\to\infty \text{ (按重数计算)},$$

其相应的特征函数 $\left\{e_j:j\in\mathbf{N}\right\}$ 构成 L^2 的一组正交基．记 $|A|$ 为 A 的绝对值，$|A|^{1/2}$ 为 $|A|$ 的开方，则由椭圆估计及文献[16]中定理 3.6，有

$$D\left(|A|^{1/2}\right)=H^1\left(S_T,\mathbf{R}^N\right).$$

因为 λ_1 不一定大于 0，可对(1)式变形，即两边同时加上 $\bar\lambda u$，得

$$\begin{cases}\left[-\left(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\right)-U(t)+\bar\lambda\right]u=\nabla_u W(t,u)+\bar\lambda u=\\ \nabla_u\left(W(t,u)+\dfrac{\bar\lambda}{2}|u|^2\right),\forall t\in\mathbf{R},\\ u(0)=u(T),\dot u(0)=\dot u(T),\ T>0.\end{cases}\tag{2}$$

记算子 $\bar A=-\left(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\right)-U(t)+\bar\lambda$，$\bar A$ 所对应的特征值序列为

$$\lambda_1+\bar\lambda\leqslant\lambda_2+\bar\lambda\leqslant\cdots\to\infty.$$

取 $\bar\lambda$ 充分大，使 $\lambda_1+\bar\lambda>0$，则 $\bar A>0$．又因为(1)式与(2)式同解，且记 $\bar W(t,u)=W(t,u)+\bar\lambda|u|^2/2$，如果 $W(t,u)$ 满足(W1)~(W4)，则 $\bar W(t,u)$ 也同时满足(W1)~(W4)且只需选一些新的相应常数即可．

注 2 由(W1)可知,

$$\left|\nabla_u\bar W(t,u)\right|=\left|\nabla_u\left(W(t,u)+\frac{\bar\lambda}{2}|u|^2\right)\right|\leqslant a_1\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)+\bar\lambda|u|,$$

当 $|u|\leqslant1$ 时，$\left|\nabla_u\bar W(t,u)\right|\leqslant a_1\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)+\bar\lambda\leqslant\left(a_1+\bar\lambda\right)\cdot\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)=\bar a_1\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)$，当 $|u|>1$ 时，$\left|\nabla_u\bar W(t,u)\right|\leqslant a_1\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)+\bar\lambda|u|^{\gamma-1}\leqslant\left(a_1+\bar\lambda\right)\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)=\bar a_1\left(1+|u|^{\gamma-1}\right)$，其中 $\bar a_1=a_1+\bar\lambda$，故 $\bar W(t,u)$ 满足(W1)；显然 $\bar W(t,u)$ 也满足(W2)~(W4)．因此，下面不妨都假设 $\lambda_1>0$，从而 A 是正算子．

下面定义 $H^1\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$ 上一个新的内积及相应范数如下:

$$(u,v)=\left(A^{1/2}u,A^{1/2}v\right)_2,\ \|u\|=(u,u)^{1/2},$$

则在 $H^1\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$ 上 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，其中 $(\cdot,\cdot)_2$ 为 L^2 上的一般内积．令 $E=H^1\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$，则 $\left(E,(\cdot,\cdot),\|\cdot\|\right)$ 为所研究的空间．

由 Sobolev 嵌入定理，可以有如下结果.

引理 1 $\forall p\in[1,\infty)$，E 紧嵌入 $L^p\left((0,T),\mathbf{R}^N\right)$ 且 $\exists\alpha_p>0$，使得 $\forall u\in E$，

$$|u|_{L^p}\leqslant\alpha_p\|u\|,$$

其中 $|u|_{L^p}$ 为 $L^p\left((0,T),\mathbf{R}^N\right)$ 中的范数．

系统(1)在 E 上相应的泛函 $I:E\to\mathbf{R}$ 为

$$I(u)=\frac12\int_0^T\left(|\dot u|^2-\left\langle U(t)u,u\right\rangle\right)\mathrm{d}t-J(u)=\frac12\|u\|^2-J(u),\tag{3}$$

其中 $J(u)=\int_0^T W(t,u)\mathrm{d}t$．由条件(W1)可知，存在常数 $a_2>0$，使得 $\forall(t,u)\in(0,T)\times\mathbf{R}^N$，都有

$$W(t,u)\leqslant a_1\left(|u|+|u|^\gamma\right)+a_2,\tag{4}$$

因此，由(4)式及引理 1 可知，I 及 J 是有定义的．

命题 1 设 $W(t,u)$ 满足(W1)，则 $J\in C^1(E,\mathbf{R})$ 且 $J':E\to E^*$ 是紧的，因此 $I\in C^1(E,\mathbf{R})$，而且 $\forall u,v\in E$，

$$J'(u)v=\int_0^T\left\langle\nabla_u W(t,u),v\right\rangle\mathrm{d}t,$$

$$I'(u)v=\int_0^T\left(\dot u\cdot\dot v-\left\langle U(t)u,v\right\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T\left\langle\nabla_u W(t,u),v\right\rangle\mathrm{d}t=(u,v)-\int_0^T\left\langle\nabla_u W(t,u),v\right\rangle\mathrm{d}t,$$

且 I 在 E 中的临界点恰为方程(1)的解[17-18]．

下面将方程(1)解的存在性问题转化为求 I 的临界点问题，从而只要运用临界点理论证明 I 有一列临界点 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 满足 $I(u_k)\to\infty$ 即可知定理 1 成立．

2 主要结论的证明

众所周知，运用临界点理论来解决问题时(PS)条件至关重要，但本文的条件并不能保证(3)式定义的 I 满足(PS)条件，这就需要寻找另一种途径来解决这一问题．受文献[19]的启发，可以验证 I 满足 Cerami 条件，虽然 Cerami 条件比(PS)条件弱，但和(PS)条件一样可以保证第一形变定理成立．下面给出 Cerami 条件及 Cerami 条件下的喷泉定理—Bartsch 喷泉定理[20]．

定义 1[21] 若任一序列 $\{u_n\}$ 满足:

$$\sup_n\left|I(u_n)\right|<\infty,\ \left(1+\|u_n\|\right)I'(u_n)\to0,$$

则称 $\{u_n\}$ 为 Cerami 序列；若 I 的任一 Cerami 序列都有收敛子列，则称 I 满足 Cerami 条件．

设 E 是可分的 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|$ 且 $E=\overline{\oplus_{j\in\mathbf{N}}X_j}$，及 $\forall j\in\mathbf{N}$，$\dim X_j<\infty$，记 $Y_k=\oplus_{j=1}^{k}X_j$，$Z_k=\overline{\oplus_{j=k}^{\infty}X_j}$．

命题 **2** (Bartsch 喷泉定理)　若 $I\in C^1(E,\mathbf{R})$ 且满足 Cerami 条件：$I(-u)=I(u)$．设对每个 $k\in\mathbf{N}$，$\rho_k>r_k>0$，使

(i) 当 $k\to\infty$ 时，$\xi_k=\inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I(u)\to\infty$；

(ii) $\zeta_k=\max\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}I(u)\leqslant 0$，

则 I 有一列趋于 ∞ 的临界值．

因此，将运用 Cerami 条件下的喷泉定理来证明本文的结论．此处 $E=H^1(S_T,\mathbf{R}^N)$ 且 $X_j=\operatorname{span}\{e_j\}$，其中 $\{e_j: j\in\mathbf{N}\}$ 为特征函数，Y_k，Z_k 如上所述，由命题 2，要证明本文的主要结论，需证明以下 3 个引理．

引理　**2**　设 $W(t,u)$ 满足(W1)~(W3)，则泛函 I 满足 Cerami 条件．

证　(i) 证明 Cerami 序列有界．反之，若 Cerami 序列无界，则由定义 1，$\exists c\in\mathbf{R}$，及 E 中序列 $\{u_n\}$ 满足

$$I(u_n)\to c,\ \|u_n\|\to\infty \text{ 且 } \|I'(u_n)\|_{E^*}\cdot\|u_n\|\to 0, \tag{5}$$

其中 $\|\cdot\|_{E^*}$ 是 $E=H^1(S_T,\mathbf{R}^N)$ 的对偶空间 E^* 的范数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left(\frac{1}{2}\langle\nabla_u W(t,u_n),u_n\rangle-W(t,u_n)\right)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\left(I(u_n)-\frac{1}{2}I'(u_n)u_n\right)=c, \tag{6}$$

记 $w_n=u_n/\|u_n\|$，则 w_n 有界，且由 E 的自反性及引理 1 的紧嵌入，故 w_n 必有弱收敛子列，不妨设

$$w_n\overset{弱}{\to}w\ \text{ in }\ E,$$
$$w_n\to w\quad\text{in}\quad L^s((0,T),\mathbf{R}^N)\ (1\leqslant s\leqslant\infty), \tag{7}$$
$$w_n(t)\to w(t)\ a.e.,\ t\in[0,T],$$

其中 $\overset{弱}{\to}$ 表示弱收敛．

当 $w\equiv 0$ 时，类似于文献[22]，可以定义一列实数 $\{s_n\}$ 使得

$$I(s_nu_n)=\max_{s\in[0,1]}I(su_n),$$

若有多个 s_n 满足，则任取其中一个即可，$\forall\rho>0$，令 $\bar{w}_n=\sqrt{4\rho}\,w_n$，由 (W1) 及 (7) 式，可得 $W(t,u)\leqslant a_1\left(|u|+|u|^{\gamma}\right)+a_2$ 且

$$\left|\int_0^T W(t,\bar{w}_n)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^T|W(t,\bar{w}_n)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\left(a_1|\bar{w}_n|+a_1|\bar{w}_n|^{\gamma}+a_2\right)\mathrm{d}t=a_1\sqrt{4\rho}\int_0^T|w_n|\mathrm{d}t+a_1\left(\sqrt{4\rho}\right)^{\gamma}\int_0^T|w_n|^{\gamma}\mathrm{d}t+a_2T=a_1\sqrt{4\rho}\int_0^T|w_n-w|\mathrm{d}t+a_1\left(\sqrt{4\rho}\right)^{\gamma}\int_0^T|w_n-w|^{\gamma}\mathrm{d}t+a_2T,$$

故 $\exists M>0$，使得 $\left|\int_0^T W(t,\bar{w}_n)\mathrm{d}t\right|<M$．于是当 n 充分大时，

$$I(s_nu_n)\geqslant I(\bar{w}_n)=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\left(\sqrt{4\rho}\right)^2\frac{|\dot{u}_n|^2}{\|u_n\|^2}-\left\langle U(t)\frac{\sqrt{4\rho}u_n}{\|u_n\|},\frac{\sqrt{4\rho}u_n}{\|u_n\|}\right\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T W\left(t,\frac{\sqrt{4\rho}u_n}{\|u_n\|}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot 4\rho\frac{\int_0^T\left(|\dot{u}_n|^2-\langle U(t)u_n,u_n\rangle\right)\mathrm{d}t}{\|u_n\|^2}-\int_0^T W(t,\bar{w}_n)\mathrm{d}t=2\rho-\int_0^T W(t,\bar{w}_n)\mathrm{d}t\geqslant 2\rho-M.$$

当 ρ 充分大时，$I(s_nu_n)\geqslant\rho$，且由 ρ 的任意性可得 $I(s_nu_n)\to\infty$．由 $s_n\in[0,1]$，又因为当 $s=0$ 时，$I(0)=0$；当 $s=1$ 时，$I(u_n)\to c$，则 $I(su_n)$ 的最大值在 $(0,1)$ 中取得，故 $s_n\in(0,1)$．因此当 n 充分大时，

$$0=s_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=s_n}I(su_n)=I'(s_nu_n)(s_nu_n)=\int_0^T\left(|(s_n\dot{u}_n)|^2-\langle U(t)(s_nu_n),(s_nu_n)\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T\langle\nabla_u W(t,s_nu_n),s_nu_n\rangle\mathrm{d}t,$$

即

$$\int_0^T\left(|(s_n\dot{u}_n)|^2-\langle U(t)(s_nu_n),(s_nu_n)\rangle\right)\mathrm{d}t=\int_0^T\langle\nabla_u W(t,s_nu_n),s_nu_n\rangle\mathrm{d}t,$$

从而可得

$$\int_0^T\left[\frac{1}{2}\langle\nabla_u W(t,s_nu_n),s_nu_n\rangle-W(t,s_nu_n)\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^T\left(|(s_n\dot{u}_n)|^2-\langle U(t)(s_nu_n),(s_nu_n)\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T W(t,s_nu_n)\mathrm{d}t=I(s_nu_n)\to\infty(n\to\infty). \tag{8}$$

另一方面，因为 $s_n\in(0,1)$，由(W3)知，$\exists\mu\geqslant 1$，使得 $\mu\tilde{W}(t,u)\geqslant\tilde{W}(t,s_nu)$，且由(8)式可得

$$\int_0^T\left[\frac{1}{2}\langle\nabla_u W(t,u_n),u_n\rangle-W(t,u_n)\right]\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^T\left[\langle\nabla_u W(t,u_n),u_n\rangle-2W(t,u_n)\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^T\tilde{W}(t,u_n)\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\frac{1}{2\mu}\int_0^T\tilde{W}(t,s_nu_n)\mathrm{d}t=\frac{1}{\mu}\int_0^T\left[\frac{1}{2}\langle\nabla_u W(t,s_nu_n),s_nu_n\rangle-\right.$$
$$\left.W(t,s_nu_n)\right]\mathrm{d}t\to\infty(n\to\infty).$$

这与(6)式矛盾.

当 w 不恒为 0 时，由(5)式可得

$$o(1)=I(u_n)/\|u_n\|^2=\left[\frac{1}{2}\int_0^T\left(|\dot{u}_n|^2-\langle U(t)u_n,u_n\rangle\right)\mathrm{d}t-\right.$$
$$\left.\int_0^T W(t,u_n)\mathrm{d}t\right]/\|u_n\|^2=1/2-\int_0^T W(t,u_n)\mathrm{d}t/\|u_n\|^2,$$

即

$$\frac{1}{2}-o(1)=\frac{\int_0^T W(t,u_n)\mathrm{d}t}{\|u_n\|^2}=\left(\int_{w\neq0}+\int_{w=0}\right)\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

对于 $t\in\Gamma=\{t\in[0,T]\,|\,w(t)\neq0\}$ 有

$$|w(t)|=\left|\lim_{n\to\infty}w_n(t)\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\|u_n\|}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\|u_n\|}>0.$$

又由(5)式知，当 $\|u_n\|\to\infty$ 时，$|u_n|\to\infty$，从而由(W2)，得

$$\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\to\infty\ (n\to\infty).$$

由 Fatou 引理，且 $|\Gamma|>0$ ($|\Gamma|$ 为 Γ 的 Lebesgue 测度)，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{w\neq0}\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\int_{w\neq0}\lim_{n\to\infty}\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}t\to\infty(n\to\infty). \tag{10}$$

另一方面，由(W2)，$\exists\eta>-\infty$，使得对 $(t,v)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$，有 $W(t,v)/|v|^2\geqslant\eta$，又

$$\int_{w=0}|w_n|^2\,\mathrm{d}t=\int_{w=0}|w_n-w|^2\,\mathrm{d}t\to0(n\to\infty),$$

故 $\exists\Lambda>-\infty$ 使得

$$\int_{w=0}\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}t\geqslant\eta\int_{w=0}|w_n|^2\,\mathrm{d}t\geqslant\Lambda>-\infty(n\to\infty). \tag{11}$$

由(9)~(11)式可得

$$\frac{1}{2}-o(1)=\left(\int_{w\neq0}+\int_{w=0}\right)\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\int_{w\neq0}\frac{W(t,u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}t+\Lambda\to\infty\ (n\to\infty),$$

产生矛盾，因此假设不成立，即 Cerami 序列有界.

(ii) 证明该有界 Cerami 序列 $\{u_n\}$ 有收敛子列. 由 Riesz 表示定理，可以将 $I':E\to E^*$ 及 $J':E\to E^*$ 视为 $I':E\to E$ 及 $J':E\to E$，其中 E^* 为 E 的对偶空间. 因为 $\{u_n\}$ 为 Cerami 序列，则 $I'(u_n)\to0$，又 $I'(u_n)v=(u_n,v)-J'(u_n)v$，故

$$u_n=I'(u_n)+J'(u_n). \tag{12}$$

由 $\{u_n\}$ 为有界序列，则其必有弱收敛子列，不妨设 $u_n\xrightarrow{弱}u$，由命题 1 中 $J':E\to E$ 的紧性，有 $J'(u_n)\to J'(u)$，因此由(12)式可得 $u_n\to J'(u)$. 由弱极限的唯一性得 $u_n\to u=J'(u)$，即 $\{u_n\}$ 有收敛子列.

引理 3 设 $W(t,u)$ 满足(W1)，则对每个 $k\in\mathbf{N}$，$\exists r_k>0$，使得，当 $k\to\infty$ 时，

$$\xi_k=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I(u)\to\infty.$$

证 由(W1)，$\exists a>0$，使得 $|W(t,u)|\leqslant a\left(1+|u|^\gamma\right)$，令 $\beta_k=\sup_{u\in Z_k,\|u\|=1}|u|_{L^\gamma}$，$k=1,2,\cdots$，其中 $|\cdot|_{L^\gamma}$ 是 $L^\gamma\left(S_T\,\mathbf{R}^N\right)$ 中的范数. 由 β_k 的定义可知，当 $k\to\infty$ 时，$\beta_k\to0$. 否则，当 $k\to\infty$ 时，由 β_k 递减且 $\beta_k>0$，不妨设 $\beta_k\to c>0$. 则 $\exists K\in\mathbf{N}$，当 $k>K$ 时，有 $\beta_k>c/2$，又 $\|u_k\|=1$ 且 E 为 Hilbert 空间，故有 u_k 有弱收敛子列，不妨设 $u_k\xrightarrow{弱}\bar{u}$. 又 $u\in Z_k$，故 $u_k=\sum_{j=k}^{\infty}(u_k,e_j)e_j$. 对任意固定的 $j_0\in\mathbf{N}$，当 k 充分大时，一定有 $k>j_0$，从而 $(u_k,e_{j_0})=0$. 又 $\bar{u}=\sum_{j=1}^{\infty}(\bar{u},e_j)e_j$ 且 $(u_k,e_{j_0})\to(\bar{u},e_{j_0})=0$，由 j_0 的任意性可得 $\bar{u}=0$. 由嵌入 $E\to L^\gamma\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$ 的紧性，则在 $L^\gamma\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$ 中 $u_k\to\bar{u}=0$，故 $|u_k|_{L^\gamma}\to0$，与 $|u_k|_{L^\gamma}>c/2$ 矛盾.

由 β_k 的定义，$\forall u\in Z_k$，有

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\left(|\dot{u}|^2-\langle U(t)u,u\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T W(t,u)\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|^2-a|u|_{L^\gamma}^\gamma-aT\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-a\beta_k^\gamma\|u\|^\gamma-aT. \tag{13}$$

取 $r_k=\left(4a\beta_k^\gamma\right)^{1/(2-\gamma)}$，$\|u\|=r_k$，由(13)式，可得

$$I(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-a\beta_k^\gamma\|u\|^\gamma-aT=\frac{1}{4}\|u\|^2-aT=$$
$$\frac{1}{4}\left(4a\beta_k^\gamma\right)^{2/(2-\gamma)}-aT. \tag{14}$$

又因为 $\beta_k\to0$ 及 $\gamma>2$，由(14)式，当 $k\to\infty$ 时，

$I(u)\to\infty$，因此取 ξ_k 如下：

$$\xi_k=\inf_{u\in Z_k,\|u_k\|=r_k} I(u)\to\infty,(k\to\infty).$$

引理 4　设 $W(t,u)$ 满足(W2)，则对每个 $k\in\mathbf{N}$，$\exists\rho_k>r_k>0$，其中 r_k 由引理 3 给出，使得 $\zeta_k=\max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k} I(u)\leqslant 0$.

证　由 Y_k 的定义，$\dim Y_k<\infty$，又因为有限维空间上各种范数等价，故 $\exists C_K>0$，$\forall u\in Y_k$，有

$$\frac{1}{2}\int_0^T\left(|\dot{u}|^2-\langle U(t)u,u\rangle\right)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2\leqslant C_k|u|_{L^2}^2\equiv C_k\int_0^T|u|^2\,\mathrm{d}t, \tag{15}$$

其中 $|\cdot|_{L^2}$ 是 $L^2\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$ 上的范数．由(W2)知，$\exists R_k>0$，当 $|u|>R_k$ 时，$W(t,u)\geqslant 2C_k|u|^2$；当 $|u|\leqslant R_k$ 时，$(t,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$，$\exists M_k>0$，使得 $|W(t,u)|\leqslant M_k$．取 $M=M_k+2C_kR_k^2$，则 $\forall(t,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}^N$，有

$$W(t,u)\geqslant 2C_k|u|^2-M. \tag{16}$$

由(15)式及(16)式，对 $u\in Y_k$，有

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\left(|\dot{u}|^2-\langle U(t)u,u\rangle\right)\mathrm{d}t-\int_0^T W(t,u)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C_k|u|_{L^2}^2-2C_k|u|_{L^2}^2+MT=-C_k|u|_{L^2}^2+MT\leqslant$$

$$-\frac{1}{2}\|u\|^2+MT. \tag{17}$$

取 $\rho_k>r_k>0$ 且 ρ_k 充分大，由(17)式，可得

$$\zeta_k=\max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k} I(u)\leqslant 0.$$

定理 1 的证明　由(W4)，$\forall u\in E=H^1\left(S_T,\mathbf{R}^N\right)$，有 $I(-u)=I(u)$，且由引理 2~4，I 满足 Cerami 条件且满足命题 2 中的条件(i)和(ii)．因此，I 有一列临界点 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$，使得 $I(u_k)\to\infty$．定理 1 证毕．

3　参考文献

[1] Antonacci F, Magrone P. Second order nonautonomous systems with symmetric potential changing sign [J]. Rend Mat Appl, 1998, 18: 367-379.

[2] Benci V. On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries [J]. Trans Amer Math Soc, 1982, 274(2): 533-572.

[3] Ding Yanheng, Lee C. Periodic solutions of Hamiltonian systems [J]. SIAM J Math Anal, 2000, 32(3): 555-571.

[4] Fei Guihua. On periodic solutions of superquadratic Hamiltonian systems [J]. Electron J Diff Eqns , 2002, 2002(8): 1-12.

[5] Girardi M, Matzeu M. Existence and multiplicity results for periodic solutions of superquadratic Hamiltonian systems where the potential changes sign [J]. Nonlinear Differential Equatio-ns Appl, 1995, 2(1): 35-61.

[6] Lassoued L. Periodic solutions of a second order superquadratic system with a change of sign in the potential [J]. Differential Equations, 1991, 93: 1-18.

[7] Long Yiming. Multiple solutions of perturbed superquadratic second order Hamiltonian systems[J]. Trans Amer Math Soc, 1989, 311(2): 749-780.

[8] Long Yiming. Periodic solutions of perturbed superquadratic Hamiltonian systems [J]. Ann Scu-ola Norm Sup Pisa Cl Sci, 1990, 17 (4): 35-77.

[9] Long Yiming. Periodic solutions of superquadratic Hamiltonian systems with bounded forcing terms [J]. Math Z, 1990, 203(1): 453-467.

[10] Pisani R, Tucci M. Existence of infinitely many periodic solutions for a perturbed Hamilto-nian system [J]. Nonlinear Anal, TMA, 1984, 8(8): 873-892.

[11] Rabinowitz P H. Periodic solutions of large norm of Hamiltonian systems [J]. J Differential Equations, 1983, 50(1): 33-48.

[12] 王少敏，杨培亮．一类二阶哈密顿系统的周期解 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2007, 31(2): 174-177.

[13] 张申贵．超二次Hamiltonian系统的无穷多周期解 [J]．甘肃联合大学学报：自然科学版, 2006, 20(1): 10-13.

[14] Zhang Qingye, Liu Chungen. Infinitely many periodic solutions for second order Hamiltonian systems [J]. Journal of Differential Equations, 2011, 251(4/5): 816-833.

[15] Zou Wenming. Variant fountain theorems and their applications [J]. Manuscripta Math, 2001, 104(3): 343-358.

[16] Raymond X S. Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators: Studies in advanced mathematics [M]. Boca Raton: CRC Press, 1991.

[17] Benci V, Rabinowitz P H. Critical point theorems for indefinite functional [J]. Invent Math, 1979, 52(3): 241-273.

[18] Rabinnowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations [M]. Washington, DC: American Mathematical Society, 1986.

[19] 刘轼波，李树杰．一类超线性椭圆方程的无穷多解 [J]．数学学报, 2003, 46(4): 625-630.

[20] Bartsch T. Infinitely many solutions of a symmetric dirichlet problem [J]. Nonl Anal TMA, 1993, 20(10): 1205-1216.

[21] Cerami G.Un criterio de esistenza pe i punti critici su varietà illimitate [J]. Rend Acad Sci Let Ist Lombardo, 1978, 112: 332-336.

[22] Jeanjean L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on $\mathbf{R}^N$ [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1999, 129(A): 787-809.

(下转第 597 页)