第 36 卷 第 6 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 36 No.6
2012 年 11 月 Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science) Nov. 2012

文章编号: 1000-5862(2012)06-0594-04

区间规划问题的 Wolfe 型对偶理论

孙玉华[1,2]，曾庆铎[1]，王来生[2]

(1. 北京科技大学数理学院, 北京 100083; 2. 中国农业大学理学院, 北京 100083)

摘要: 讨论了目标函数和约束函数是区间函数的区间规划问题. 首先定义了 LU 最优解的概念, 并给出了一类新的 Wolfe 型对偶模型, 在 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数定义下证明了弱对偶定理、强对偶定理和逆对偶定理.

关键词: 不确定优化; 区间规划; 对偶; (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数

中图分类号: O 224, O 221.2 文献标志码: **A**

0 引言

传统确定性优化方法无法处理规划过程中的不确定性因素，且无法应对未来环境的变化，缺乏灵活性、适应性.不确定规划是传统规划的延伸，近年来理论和应用逐渐受到人们的广泛关注，其研究也渗透到愈来愈多的领域，它使所做的决策更适应客观实际、更符合决策者意向.区间规划是不确定规划的一个重要分支，讨论的是不确定参数可能的变化范围用一个区间数表示的优化问题. 它只需给出区间的上下界就可以求解，因此区间规划更实用，更易于求解.

许多学者讨论了目标函数和约束条件是线性的区间规划问题[1-6].而非线性区间规划理论和方法的研究近几年才开始展开，相关文献较少.文献[7-8]给出了区间二次规划的求解方法；文献[9]讨论了混合对偶模型和理论;文献[10-11]讨论了区间非线性规划的最优性条件和对偶理论;文献[12]讨论了 Lagrangian 对偶理论.

以上非线性区间规划的理论都是在凸函数条件下给出的.而在实际问题中，所给函数往往是凸函数的推广形式一不变凸函数、广义凸函数，在这些函数条件下所得结论更具普遍性.文献[13]对 (p,r)- 不变凸函数和关于 η 的不变凸函数进行推广,给出了 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数.

本文讨论了目标函数和约束函数是区间函数的区间规划问题.首先利用序关系 $\leqslant_{LU}$ 定义了 LU 最优解的概念.其次，对所讨论区间规划问题给出了一类新的对偶形式，并在 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数条件下证明了相应的对偶理论.

1 预备知识

首先给出区间数和序关系的概念.

称 $A=\left[A^L,A^U\right]=\left\{a:A^L\leqslant a\leqslant A^U,a\in\mathbf{R}\right\}$ 是 1 个区间数，A^L 和 A^U 是 A 的左端点和右端点.当 $A^L=A^U=a$ 时，$A=[a,a]=a$ 退化为 1 个实数.

对区间 $A=\left[A^L,A^U\right]$ 和 $B=\left[B^L,B^U\right]$，常用的运算规则如下：$A+B=\left[A^L+B^L,A^U+B^U\right]$，$A-B=\left[A^L-B^U,A^U-B^L\right]$，并且 $\forall k\in\mathbf{R}$，当 $k\geqslant 0$ 时，$kA=\left[kA^L,kA^U\right]$,当 $k<0$ 时,$kA=\left[kA^U,kA^L\right]$.

为判断区间数之间关系，文献[1]定义了一种偏序关系 $\leqslant_{LU}$：

$A\leqslant_{LU}B\Leftrightarrow A^L\leqslant B^L$ 且 $A^U\leqslant B^U$.

$A<_{LU}B\Leftrightarrow A\leqslant_{LU}B$ 且 $A\neq B$,即 $A<_{LU}B$ 等价于 $\begin{cases}A^L<B^L,\\A^U<B^U,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A^L\leqslant B^L,\\A^U<B^U,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A^L<B^L,\\A^U\leqslant B^U.\end{cases}$

2 区间规划的对偶

本文讨论区间规划问题:

收稿日期：2012-06-28
基金项目：国家自然科学基金(11271367, 11101029)资助项目.
作者简介：孙玉华(1968-), 女, 河北任丘人, 副教授, 主要从事最优化理论与应用的研究.

(P) $\min F(x)=\left[F^L(x),F^U(x)\right]$

$$\text{s.t.}\quad g_i(x)=\left[g_i^L(x),g_i^U(x)\right]\leqslant_{LU} 0, i=1,2,\cdots,m,$$

$$x\in X\subseteq \mathbf{R}^n,$$

其中 X 是非空开凸集，$F(x)=\left[F^L(x),F^U(x)\right]$ 和 $g_i(x)=\left[g_i^L(x),g_i^U(x)\right](i=1,2,\cdots,m)$ 是区间函数，$F^L(x)$, $F^U(x)$ 和 $g_i^L(x),g_i^U(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 是实值可微函数.

记(P)的可行域为 $X^0=\left\{x\in X\middle|\left[g_i^L(x),g_i^U(x)\right]\leqslant_{LU} 0(i=1,2,\cdots,m),x\in X\subseteq\mathbf{R}^n\right\}$.

下面先定义区间规划问题(P)的 LU 最优解.

定义 1　设 $x^*\in X^0$，若对问题(P)的任意可行解 x 都不满足条件 $F(x)<_{LU} F(x^*)$，则称 x^* 为(P)的 1 个 LU 最优解.

与区间规划(P)相应的一种新的对偶模型:

(D) $\max\ F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y)=[F^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y),$

$$F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y)]$$

$$\text{s.t.}\ \nabla F^L(y)+\nabla F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i^U(y)=0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y)\geqslant 0, \tag{2}$$

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\geqslant 0, \tag{3}$$

$$y\in Y\subseteq\mathbf{R}^n,$$

其中 Y 为 1 个非空开凸集.记(D)的可行域为

$$Y^0=\Big\{(y,\lambda)\Big|\nabla F^L(y)+\nabla F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i^U(y)=0,\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y)\geqslant 0,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\geqslant 0,y\in Y\subseteq\mathbf{R}^n\Big\}.$$

定义 2　设 p,r 是任意实数且 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是可微函数.如果存在 $\rho\in\mathbf{R}$ 和函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $\theta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得当 $p\neq 0,r\neq 0$ 时，$(\mathrm{e}^{r(f(x)-f(u))}-1)/r\geqslant\nabla f(u)(\mathrm{e}^{p\eta(x,u)}-1)/p+\rho\|\theta(x,u)\|^2$，当 $p=0,r\neq 0$ 时，$(\mathrm{e}^{r(f(x)-f(u))}-1)/r\geqslant\nabla f(u)\eta(x,u)+\rho\|\theta(x,u)\|^2$，当 $p\neq 0,r=0$ 时，$f(x)-f(u)\geqslant\nabla f(u)(\mathrm{e}^{p\eta(x,u)}-1)/p+\rho\|\theta(x,u)\|^2$，当 $p=0,r=0$ 时，$f(x)-f(u)\geqslant\nabla f(u)\eta(x,u)+\rho\|\theta(x,u)\|^2$，则称 f 在 u 点为关于 η,θ 的 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数.若当 $x\neq u$ 时上述不等式为严格不等式，那么称 f 在 u 点为关于 η,θ 的严格 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数.

显然,当 $\rho\equiv 0$ 时，f 在 u 点为关于 η 的 (p,r)- 不变凸函数；当 $p=0,r=0,\rho=0$ 时，f 在 u 点为关于 η 的不变凸函数.

注 1　下面只证明当 $p\neq 0,r\neq 0$ 时结论成立，其它 3 种情况较简单，可类似得证.

定理 1(弱对偶定理)　假设(i) $x\in X^0$, $(y,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m))\in Y^0$; (ii) $F^L+F^U+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U$ 在 y 处是关于 η,θ 的 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数，$\rho\geqslant 0$,则

$$F(x)\nless_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y).$$

证（反证法）　假设 $F(x)<_{LU} F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y)$，则由 $<_{LU}$ 的定义可得

$$F^L(x)+F^U(x)<F^L(y)+F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y). \tag{4}$$

因为 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\geqslant 0$ 且 x 是(P)的可行解，所以 $\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x)=\left[\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(x),\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(x)\right]\leqslant_{LU} 0$，即 $\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(x)\leqslant 0$, $\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(x)\leqslant 0$，由(4)式得

$$F^L(x)+F^U(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(x)<F^L(y)+F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y), \tag{5}$$

由假设(ii)和定义 2 得

$$\left(\exp\left\{r\left[\left(F^L(x)+F^U(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(x)\right)-\left(F^L(y)+F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y)\right)\right\}-1\right]\right)/r\geqslant\left(\nabla F^L(y)+\nabla F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i^U(y)\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{p\eta(x,y)}-1\right)/p+\rho\|\theta(x,y)\|^2.$$

由(1)式且 $\rho\geqslant 0$ 得

$$\left(\exp\left\{r\left[\left(F^L(x)+F^U(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(x)\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(F^L(y)+F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y)\right)\right\}-1\right]\right)/r\geqslant 0,$$

即

$$F^L(x)+F^U(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(x)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(x)\geqslant$$
$$F^L(y)+F^U(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U(y),$$

与(5)式矛盾.所以 $F(x)\nless_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y)$.

定理 2(弱对偶定理) 假设(i) $x\in X^0$, $(y,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m))\in Y^0$, $x\neq y$; (ii) $F^L+F^U+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^L+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i^U$ 在 y 处是关于 η,θ 的严格 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数, $\rho\geqslant 0$,则

$$F(x)\nleqslant_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y).$$

证 类似于定理 1 的推导过程, 此处略.

下面给出对偶问题(D)的 LU 最优解定义.

定义 3 设 $(y^*,\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_m^*))$ 是(D)的可行解.如果不存在 $(y,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m))\in Y^0$ 使得

$$F(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i(y^*)<_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y),$$

则称 (y^*,λ^*) 是对偶问题(D)的 LU 最优解.

定理 3(强对偶定理) 设 $x^*\in X^0$, 且 $\exists\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_m^*)\geqslant 0$ 使得(1)~(3)式在 (x^*,λ^*) 成立, 则 $(x^*,\lambda^*)\in Y^0$.如果(P)和(D)的可行解满足定理 1 中的条件, 那么 (x^*,λ^*) 是问题(D)的 LU 最优解.

证 因为 (x^*,λ^*) 满足条件(1)~(3), 所以 (x^*,λ^*) 是(D)的可行解, 即 $(x^*,\lambda^*)\in Y^0$.又因为 $x^*\in X^0$, 所以由定理 1, $\forall(y,\lambda)\in Y^0$, 有

$$F(x^*)\nless_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y). \tag{6}$$

假设 (x^*,λ^*) 不是(D)的 LU 最优解,由定义 3 知, $\exists(y,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m))\in Y^0$ 使得

$$F(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i(x^*)<_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y). \tag{7}$$

因为 x^* 是(P)的可行解且 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_m^*)\geqslant 0$, 则 $\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i(x^*)=\left[\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*),\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(x^*)\right]\leqslant_{LU}0$, 即 $\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)\leqslant 0,\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(x^*)\leqslant 0$.又 (x^*,λ^*) 是(D)的可行解, 所以由(2)式, $\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(x^*)\geqslant 0$, 从而 $\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)=\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(x^*)=0$. 由(7)式得

$$F(x^*)<_{LU}F(y)+\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(y),$$

与(6)式矛盾.所以 (x^*,λ^*) 是(D)的 LU 最优解.

定理 4(逆对偶定理) 设 $(y^*,\lambda^*)\in Y^0$, 且 $y^*\in X^0$, $F^L+F^U+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U$ 在 y^* 处是关于 η,θ 的 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数, 且 $\rho\geqslant 0$, 则 y^* 是问题(P)的 LU 最优解.

证 与定理 1 同理可证.

定理 5(严格逆对偶定理) 假设(i) $x^*\in X^0$, $(y^*,\lambda^*)\in Y^0$; (ii) $F^L+F^U+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U$ 在 y^* 处是关于 η,θ 的严格 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数, $\rho\geqslant 0$; (iii) $F(x^*)\leqslant_{LU}F(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i(y^*)$,则 $x^*=y^*$, 且 y^* 是问题(P)的 LU 最优解.

证(反证法) 假设 $x^*\neq y^*$.由(iii)及 $\leqslant_{LU}$ 定义得

$$F^L(x^*)\leqslant F^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*),$$
$$F^U(x^*)\leqslant F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*).$$

又由(i)知, x^* 是(P)的可行解, 所以

$$F^L(x^*)+F^U(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)\leqslant$$
$$F^L(y^*)+F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*), \tag{8}$$

由假设(ii)和定义 2 得

$$\left(\exp\left\{r\left[\left(F^L(x^*)+F^U(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)\right)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left(F^L(y^*)+F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*)\right)\right]\right\}-1\right)/r>$$
$$\left(\nabla F^L(y^*)+\nabla F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^*\nabla g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^*\nabla g_i^U(y^*)\right)\cdot$$
$$\left(\mathrm{e}^{p\eta(x^*,y^*)}-1\right)/p+\rho\left\|\theta(x^*,y^*)\right\|^2.$$

因 (y^*,λ^*) 是(D)的可行解, 从而(1)式成立, 又 $\rho\geqslant 0$, 所以

$$F^L(x^*)+F^U(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)>$$

$$F^L(y^*)+F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*),\quad(9)$$

与(8)式矛盾．故 $x^*=y^*$．

设 y^* 不是(P)的 LU 最优解，从而存在(P)的可行解 $\bar{x}$ 满足 $F(\bar{x})<_{LU}F(y^*)$，即 $F^L(\bar{x})+F^U(\bar{x})<F^L(y^*)+F^U(y^*)$．由(i)知，$\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(\bar{x})\leqslant 0$，$\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(\bar{x})\leqslant 0$，$\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*)\geqslant 0$，所以

$$F^L(\bar{x})+F^U(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(\bar{x})<$$

$$F^L(y^*)+F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*),\quad(10)$$

又 $\bar{x}\neq y^*$，类似于(9)式的推导过程得

$$F^L(\bar{x})+F^U(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(\bar{x})>$$

$$F^L(y^*)+F^U(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L(y^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U(y^*),$$

与(10)式矛盾，所以 y^* 是(P)的 LU 最优解．

注 2　若定理 5 的条件(ii)改为：$F^L+F^U+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^L+\sum_{i=1}^m\lambda_i^* g_i^U$ 在 y^* 处是关于 η,θ 的 (p,r)-ρ-(η,θ)- 不变凸函数，且 $\rho\left\|\eta(x^*,y^*)\right\|^2>0$，则也可得相同结论．

3　参考文献

[1] Ishibuchi H, Tanaka H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function [J]. Eur J Oper Res, 1990, 48(2): 219-225.

[2] Tong Shaocheng. Interval number and fuzzy number linear programmings [J]. Fuzzy Sets Syst, 1994, 66(3): 301-306.

[3] Ida M. Portfolio selection problem with interval coefficients [J]. Appl Math Lett, 2003, 16(5): 709-713.

[4] Huang Yuefei, Baetz B W, Huang Guohe, et al. Violation analysis for solid waste management systems: an interval fuzzy programming approach [J]. J Environ Manage, 2002, 65(4): 431-446.

[5] Oliveira C. Multiple objective linear programming models with interval coefficients-an illustrated overview [J]. Eur J Oper Res, 2007, 181(3): 1434-1463.

[6] Alefeld G, Mayer G. Interval analysis: theory and applications [J]. J Comput Appl Math, 2000, 121(1/2): 421-464.

[7] Ding Ke, Huang Nanjing. A new class of interval projection neural networks for solving interval quadratic program [J]. Chaos Solitons Fract, 2008, 25(4): 718-725.

[8] Li Wei, Tian Xiaoli. Numerical solution method for general interval quadratic programming [J]. Appl Math Comput, 2008, 202(2): 589-595.

[9] Zhou Houchun, Wang Yiju. Optimality condition and mixed duality for interval-valued optimization [J]. Fuzzy Info and Eng AISC, 2009, 62(2): 1315-1323.

[10] Wu Hsien Chung. Wolfe duality for interval-valued optimization [J]. J Optim Theory Appl, 2008, 138(3): 497-509.

[11] Wu Hsien Chung. Duality theory for optimization problems with interval-valued objective functions [J]. J Optim Theory Appl, 2010, 144(3): 615-628.

[12] Wu Hsien Chung. On interval-valued nonlinear programming problems [J]. J Math Anal Appl, 2008, 338(1): 299-316.

[13] Mandal P, Nahak C. Symmetric duality with (p,r)-ρ-(η,θ)-invexity [J]. Appl Math Comput, 2011, 217(21): 8141-8148.

Wolfe Duality Theory for Interval-Valued Programming

SUN Yu-hua [1, 2], ZENG Qing-duo[1], WANG Lai-sheng[2]

(1. School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;
2. College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract: Interval-valued programming where the objective function and constrict functions are interval-valued functions is considered. The concepts of LU optimal solution to interval-valued programming problem is defined. A new type dual for interval-valued optimization problem is formulated. Under (p,r)-ρ-(η,θ)- invexity assumptions, weak, strong and converse duality results are proved.

Key words: uncertain optimization; interval-valued programming; duality; (p,r)-ρ-(η,θ)- invexity functions

(责任编辑：曾剑锋)