文章编号: 1000-5862(2012)06-0594-04

Stampacchia 型和 Minty 型似变分不等式解的性质

赵　亮, 刘学文*

(重庆师范大学数学学院, 重庆　401331)

摘要: 在实 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 中利用上 *Dini* 方向导数构造了 Minty 型似变分不等式的间隙函数 $G(x)$, 并在此基础上讨论了 Stampacchia 型和 Minty 型这两类似变分不等式的解与 $G(x)$ 的关系, 得到了 2 类似变分不等式解集相等的 1 个充分条件.

关键词: 解集; 伪单调; 间隙函数; 似变分不等式
中图分类号: O 110.74　　　　文献标志码: A

0　引　言

变分不等式理论是解决经济、优化、工程和运筹学的有力工具. 变分不等式的一个重要推广形式就是似变分不等式(记为 VLI), 是指寻找向量 $\bar{x}\in S$, 满足

$$\eta(\boldsymbol{y},\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}F(\bar{x})\geqslant 0,\quad \forall \boldsymbol{y}\in S,$$

其中 $F(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{x})$, $S\subseteq\mathbf{R}^n$. J. Parida 等[1]讨论了可微形式的 VLI 解的存在情况并推广了 VLI 和可微凸规划之间的关系. 但现实中优化问题的目标函数不一定可微. 因此, 就产生了用方向导数定义的变分不等式, 如 G. P. Crespi 等[2-3]介绍了下 *Dini* 方向导数形式的 Minty 变分不等式, 并将其应用推广到非可微情形. 随后, V. I. Ivanov[4]将下 *Dini* 方向导数形式的变分不等式的应用推广到非可微伪凸情形, 并分别给出了 Stampacchia 变分不等式和 Minty 变分不等式解集的刻画. 最近, Liu Cai-ping 等[5]介绍了上 *Dini* 方向导数形式的 Stampacchia 型和 Minty 型似变分不等式, 并给出了这 2 类似变分不等式解集的刻画. 本文在文献[5]的基础上, 利用上 *Dini* 方向导数构造了 Minty 型似变分不等式的间隙函数 $G(x)$, 并在此基础上讨论了 Stampacchia 型和 Minty 型这 2 类似变分不等式的解与 $G(x)$ 的关系, 最后得到 2 类似变分不等式解集相等的 1 个充分条件, 丰富了文献[5]的结果.

1　预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 是实 n 维欧式空间, S 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, $f:S\to\mathbf{R}$ 是实值函数, $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 是向量值函数.

定义 1[6]　设集合 $S\subset\mathbf{R}^n$, 如果 $\exists\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$, 使得 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S$, 则称 S 是 η -不变凸集.

定义 2[7]　如果 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$, $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 满足 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$, 则称 η 是反对称函数.

注 1　若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$ 满足 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 显然 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

条件 **C**[8]　$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$ 满足

$$\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=-\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$
$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(1-\lambda)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

定义 3[9]　设函数 $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,

(i) 如果 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, $\forall r>0$, 有 $h(r\boldsymbol{x})=rh(\boldsymbol{x})$, 则称 h 是正齐次的;

(ii) 如果 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 有 $h(\boldsymbol{x})+h(-\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 则称 h 是次奇性的.

定义 4　函数 $f:S\to\mathbf{R}$ 在点 $\boldsymbol{x}\in S$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n$ 的上 *Dini* 方向导数定义为

$$f'_+(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})=\limsup_{t\to 0^+}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{x})}{t},$$

其中 $f'_+(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d}):S\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$.

收稿日期: 2012-06-30
基金项目: 国家自然科学基金(11001289)和重庆市教委科研(KJ100608)资助项目.
作者简介: 刘学文(1967-), 男, 重庆石柱人, 副教授, 主要从事广义凸性及其在最优化理论中应用的研究.

显然由定义可知，f'_+ 关于第 2 个变量是正齐次的，即 $\forall\lambda\geqslant 0$，$f'_+(\boldsymbol{x};\lambda\boldsymbol{d})=\lambda f'_+(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})$.

定义 5　设双变量函数 $h:S\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$，$\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$，若 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$，满足

$$h(\boldsymbol{x};\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))\geqslant 0\Rightarrow h(\boldsymbol{y};\eta(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}))\leqslant 0,$$

则称 h 在 S 上是 η-伪单调的.

定义 6　Stampacchia 型似变分不等式[10](记为 $SVLI$)是指寻找向量 $\boldsymbol{x}^*\in S$，满足

$$f'_+(\boldsymbol{x}^*;\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{x}\in S.$$

定义 7　Minty 型似变分不等式[11](记为 $MVLI$)是指寻找向量 $\boldsymbol{x}_*\in S$，满足

$$f'_+(\boldsymbol{x};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}))\leqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{x}\in S.$$

注 2　把 $SVLI$ 和 $MVLI$ 的解集分别记为

$$C^*=\left\{\boldsymbol{x}^*\in S: f'_+(\boldsymbol{x}^*;\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0,\forall\boldsymbol{x}\in S\right\},$$

$$C_*=\left\{\boldsymbol{x}_*\in S: f'_+(\boldsymbol{x};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}))\leqslant 0,\forall\boldsymbol{x}\in S\right\}.$$

下面给出 $MVLI$ 间隙函数的定义.

定义 8　如果函数 $p:S\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 满足

(i) $p(\boldsymbol{y})\geqslant 0,\forall\boldsymbol{y}\in S$;

(ii) $p(\boldsymbol{y})=0$ 且 $\boldsymbol{y}\in S$ 当且仅当 $\boldsymbol{y}$ 是 $MVLI$ 的 1 个解，

则称 p 是 $MVLI$ 的一个间隙函数.

2　主要结果

定理 1　称函数 $G(x):=\sup\left\{f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})):\boldsymbol{c}\in S\right\}$，$\boldsymbol{x}\in S$ 是 $MVLI$ 的间隙函数，其中 η 是反对称函数[12].

证　(i) 取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\in S$，则

$$f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}))=\limsup_{t\to 0^+}\frac{f(\boldsymbol{c}+t\eta(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}))-f(\boldsymbol{c})}{t}=0,$$

所以

$$G(\boldsymbol{x})=\sup\left\{f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})):\boldsymbol{c}\in S\right\}\geqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{x}\in S.$$

(ii) 必要性　假设 $\exists\boldsymbol{x}_*\in S$ 使得 $G(\boldsymbol{x}_*)=0$，即 $G(\boldsymbol{x}_*)=\sup\left\{f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{c})):\boldsymbol{c}\in S\right\}=0$，从而

$$f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{c}))\leqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{c}\in S,$$

由定义 7 可知，$\boldsymbol{x}_*$ 是 $MVLI$ 的解.

充分性　若 $\boldsymbol{x}_*$ 是 $MVLI$ 的 1 个解，由定义 7 可知，

$$f'_+(\boldsymbol{x};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}))\leqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{x}\in S,$$

等价于

$$\max_{\boldsymbol{c}\in S}\left\{f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{c}))\right\}=0.$$

又由(i)知，$\forall\boldsymbol{x}\in S$ 有 $G(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，因此

$$G(\boldsymbol{x}_*)=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\max_{\boldsymbol{c}\in S}\left\{f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}))\right\}=0.$$

定理 2　设 η 是反对称函数，定义

$$\varLambda(x):=\left\{\boldsymbol{c}\in S: f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}))=G(\boldsymbol{x})\right\},$$

$$H:=\arg\min\left\{G(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in S\right\},$$

则

(i)　$\boldsymbol{x}_*\in C_*\Leftrightarrow G(\boldsymbol{x}_*)=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}_*\in\varLambda(\boldsymbol{x}_*)$;

(ii)　$C_*\subseteq H$;

(iii)　$\forall\boldsymbol{x}_*\in C_*$，$C^*\subseteq\varLambda(\boldsymbol{x}_*)$;

(iv)　如果 f'_+ 在 η-不变凸集 S 上是 η-伪单调的，那么 $\forall\boldsymbol{x}^*\in C^*$，$C^*\subseteq\varLambda(\boldsymbol{x}^*)$.

证　(i) 由间隙函数的定义可知，$\boldsymbol{x}_*\in C_*\Leftrightarrow G(\boldsymbol{x}_*)=0$ 显然成立.

因为 $\forall\boldsymbol{x}_*\in C_*$，$f'_+(\boldsymbol{x}_*;\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}_*))=0$，则 $G(\boldsymbol{x}_*)=0\Leftrightarrow f'_+(\boldsymbol{x}_*;\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}_*))=G(\boldsymbol{x}_*)=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}_*\in\varLambda(\boldsymbol{x}_*)$.

(ii)　设 $\forall\boldsymbol{x}_*\in C_*$，由(i)可知，$G(\boldsymbol{x}_*)=0$，又 $\forall\boldsymbol{x}\in S$，$G(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，因此 $\boldsymbol{x}_*\in H$.

(iii)　设 $\forall\boldsymbol{x}_*\in C_*$，由(i)可知，$G(\boldsymbol{x}_*)=0$. 设 $\forall\boldsymbol{x}^*\in C^*$，由定义 6 知，

$$f'_+(\boldsymbol{x}^*;\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{x}_*\in C_*\subseteq S.\tag{1}$$

又因为

$$f'_+(\boldsymbol{x}^*;\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}^*))\leqslant\sup\left\{f'_+(\boldsymbol{c};\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{c})):\boldsymbol{c}\in S\right\}=G(\boldsymbol{x}_*)=0.\tag{2}$$

由(1)式和(2)式可得

$$f'_+(\boldsymbol{x}^*;\eta(\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}^*))=G(\boldsymbol{x}_*),$$

因此 $\boldsymbol{x}^*\in\varLambda(\boldsymbol{x}_*)$.

(iv)　$\forall\boldsymbol{x}^*\in C^*$，有 $f'_+(\boldsymbol{x}^*;\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*))\geqslant 0$，$\forall\boldsymbol{x}\in S$. 又 f'_+ 在 S 上是 η-伪单调的，

$$f'_+(\boldsymbol{x};\eta(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}))\leqslant 0,\quad\forall\boldsymbol{x}\in S,$$

所以 $\boldsymbol{x}^*\in C_*$，结合(iii)可知，$C^*\subseteq\varLambda(\boldsymbol{x}^*)$.

定理 3　设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 是 η-不变凸集，且设 $f(\boldsymbol{x})=\int_0^1 f'_+(\boldsymbol{x}^*+v\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*);\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*))\mathrm{d}v$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*\in S$，若满足

(a)　η 是反对称函数且满足条件 C;

(b)　f'_+ 关于第 2 个变量是次奇性的;

(c)　$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$，映射 $v\to f'_+(\boldsymbol{y}+v\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y});\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在 0^+ 处是连续的，

那么

(i)　如果 f 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处取得最小值，则 $\boldsymbol{x}^*\in C^*$，

(ii)　如果 $\boldsymbol{x}^*\in C_*$，则 f 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处取得最小值，并且 $\boldsymbol{x}^*\in C^*$.

证　(i) 若 f 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处取得最小值，则 $\forall t\in[0,1]$，$\forall\boldsymbol{x}\in S$ 有 $f(\boldsymbol{x}^*+t\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*))\geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$.

根据定义 4 得

$$f'_+(x^*;\eta(x,x^*))=\limsup_{t\to 0^+}\frac{f(x^*+t\eta(x,x^*))-f(x^*)}{t}\geqslant 0,$$

即

$$f'_+(x^*;\eta(x,x^*))\geqslant 0,\quad \forall x\in S,$$

因此 $x^*\in C^*$.

(ii) 若 $x^*\in C_*$，由定义 7 知，$\forall(x,v)\in S\times(0,1]$，有

$$f'_+(x^*+v\eta(x,x^*);\eta(x^*,x^*+v\eta(x,x^*)))\leqslant 0,$$

由于 η 满足条件 C，则有

$$f'_+(x^*+v\eta(x,x^*);-v\eta(x,x^*))\leqslant 0.$$

因为 f'_+ 关于第 2 个变量是次奇性的并且是正齐次的,

$$f'_+(x^*+v\eta(x,x^*);v\eta(x,x^*))\geqslant$$
$$-f'_+(x^*+v\eta(x,x^*);-v\eta(x,x^*))\geqslant 0,$$

即

$$f'_+(x^*+v\eta(x,x^*);\eta(x,x^*))\geqslant 0. \tag{3}$$

不等式(3)两边同时积分得

$$\int_0^1 f'_+(x^*+v\eta(x,x^*);\eta(x,x^*))\mathrm{d}v\geqslant\int_0^1 0\mathrm{d}v=$$
$$\int_0^1 f'_+(x^*+v\eta(x^*,x^*);,\eta(x^*,x^*))\mathrm{d}v,$$

即

$$f(x)\geqslant f(x^*),\quad \forall x\in S.$$

由于 $\forall x,y\in S$，映射 $v\to f'_+(y+v\eta(x,y);\eta(x,y))$ 在 0^+ 处是连续的，对(3)式，令 $v\to 0^+$ 得

$$f'_+(x^*;\eta(x,x^*))\geqslant 0,\quad \forall x\in S,$$

因此 $x^*\in C^*$.

定理 **4** 设 S 是 η-不变凸集，若满足

(i) η 满足条件 C;

(ii) f'_+ 在 S 上是 η-伪单调的;

(iii) f'_+ 关于第 2 个变量是次奇性的;

(iv) $\forall x,y\in S$，映射 $v\to f'_+(y+v\eta(x,y);\eta(x,y))$ 在 0^+ 处是连续的,

则 $C^*=C_*$.

证 先证 $C^*\subseteq C_*$.由定理 2 中(iv)的证明可知，$C^*\subseteq C_*$ 显然成立.

下证 $C_*\subseteq C^*$. $\forall x_*\in C_*$，有 $f'_+(y;\eta(x_*,y))\leqslant 0$，$\forall y\in S$. 由于 S 是 η-不变凸集，令

$$y=x_*+v\eta(x,x_*),\quad \forall v\in(0,1),\quad \forall x\in S,$$

则有

$$f'_+(x_*+v\eta(x,x_*);\eta(x_*,x_*+v\eta(x,x_*)))\leqslant 0,$$

由条件 C 知

$$f'_+(x_*+v\eta(x,x_*);-v\eta(x,x_*))\leqslant 0.$$

由于 f'_+ 关于第 2 个变量是次奇性的并且是正齐次的,

$$f'_+(x_*+v\eta(x,x_*);v\eta(x,x_*))\geqslant$$
$$-f'_+(x_*+v\eta(x,x_*);-v\eta(x,x_*))\geqslant 0,$$

即

$$f'_+(x_*+v\eta(x,x_*);\eta(x,x_*))\geqslant 0.$$

又因为映射 $v\to f'_+(y+v\eta(x,y);\eta(x,y))$ 在 0^+ 处是连续的，令 $v\to 0^+$，则有

$$f'_+(x_*;\eta(x,x_*))\geqslant 0,$$

故 $x_*\in C^*$.

3 参考文献

[1] Parida J, Sahoo M, Kumar A. A variational-like inequality problem [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1989, 39(2): 225-231.

[2] Crespi G P, Ginchev I, Rocca M. Minty variational inequalities, increase along rays property and optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 123(3): 479-496.

[3] Crespi G P, Ginchev I, Rocca M. Existence of solutions and star-shapedness in minty variational inequalities [J]. Journal of Global Optimization, 2005, 32(4): 485-494.

[4] Ivanov V I. Optimization and variational inequalities with pseudoconvex functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 146(3): 602–616.

[5] Liu Caiping, Yang Xinmin, Lee H W. Characterizations of the solution sets of pseudoinvex programs and variational inequalities [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2011(1): 1-13.

[6] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiple objective optimization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(1): 29-38.

[7] Ansari Q H, Rezaei M. Generalized pseudolinearity [J]. Optimization Letters, 2012, 6(2): 241-251.

[8] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189(3): 901-908.

[9] Sach P H, Penot J P. Characterizations of generalized convexities via generalized directional derivative [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 1998, 19(5/6): 615-634.

[10] 王岗，刘学文，姜艮，等. 一类变分不等式问题解集的刻画 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版, 2011, 35(4): 388-390.

[11] 肖红. 广义 Minty 似变分不等式解的性质 [J]. 西南大学学报：自然科学版, 2010, 32(10): 126-131.

[12] 陈熙德. 自反 Banach 空间中一类变发不等式解的存在唯一性 [J]. 重庆师范大学学报：自然科学版, 1991, 16(2):44-48.

The Properties of the Solution in Stampacchia-Type and Minty-Type Variational-Like Inequalities

ZHAO Liang, LIU Xue-wen*

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Gap function $G(x)$ of the Minty-type variational-like inequalities was constructed by upper Dini directional derivative in a real n-dimensional Euclidean space. And some relations between solutions of Stampacchia-type and Minty-type variational-like inequalities and $G(x)$ are investigated. A sufficient condition of two class of variational-like inequality solution sets equal is obtained.

Key words: solution set; pseudomonotone; gap function; variational-like inequalities

(责任编辑：曾剑锋)

(上接第 593 页)

Infinitely Many Periodic Solutions for a Class of Superquadratic Second Order Hamiltonian Systems

LI Fang, ZHANG Qing-ye*

(College of Mathematics and Infomatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: By means of fountain theorem in critical point theory, the multiple periodic solution problem for a class of second order Hamiltonian systems is studied, and infinitely many large energy solutions are obtained, which enriches and generalizes the existing results.

Key words: superquadratic; second order Hamiltonian system; periodic solution; Cerami's condition; fountain theorem

(责任编辑：曾剑锋)