文章编号: 1000-5862(2012)06-0603-05

聚合风险模型下的信度估计

方　婧[1], 章　溢[2], 温利民[1*]

(1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西　南昌　330022; 2. 江西师范大学计算机信息工程学院, 江西　南昌　330022)

摘要: 利用信度理论的方法, 建立了 Bayes 聚合风险的信度模型, 得到未来年总索赔的信度保费. 进一步地, 在多合同模型下, 提出了结构参数的无偏估计, 并证明了这些估计的统计性质.

关键词: 聚合风险模型; 信度保费; 估计; 相合性
中图分类号: O 211　　　　文献标志码: A

0　引言

在保险精算中, 往往利用往年的索赔记录来预测下一年的索赔情况, 由此来制定保费. 在个体风险模型中, 记风险 $X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)'$ 为前 n 年的索赔观测值. 假设风险 X 由参数 θ 来标识, 当 θ 给定时, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布于 $f_X\left(x,\theta\right)$. 精算师的目标是利用样本 $X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)'$ 估计 X_{n+1} 的值, 称为保费估计. 由于风险的非齐次性[1], 风险参数 θ 可假设为随机变量. 根据 Bayes 定理, 基于平方损失下的 Bayes 保费

$$\widetilde{X_{n+1}}^B=E\left[X_{n+1}\middle|X\right]$$

是 X_{n+1} 最优预测, 然而 Bayes 保费[2-3]依赖于样本分布 $f_X\left(x,\theta\right)$ 与先验分布 $\pi\left(\theta\right)$ 的全部信息. 在实际中, 往往很难确定先验分布 $\pi\left(\theta\right)$ 的具体形式. 解决这个问题就是将 X_{n+1} 的预测限定在 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性函数中, 使得平方损失函数

$$E\left[\left(X_{n+1}-a_0-\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)^2\right]$$

达到最小, 得到最优预测(估计)可表示为

$$\widehat{X_{n+1}}^C=Z\times\text{样本索赔均值}+\left(1-Z\right)\times\text{先验保费},$$

保费估计 $\widehat{X_{n+1}}^C$ 由于其具有加权的形式, 权重 $0\leqslant Z\leqslant 1$, 且当 n 越大, Z 越接近于1, 因此称 $\widehat{X_{n+1}}^C$ 为信度保费[4-5].

但是, 在非寿险保险中,单个风险在1年内可能导致多次索赔, 记 X_{ij} 为该风险在第 i 年内的第 j 次索赔, $j=1,2,\cdots,N_i$, 其中 N_i 为该风险在第 i 年的索赔次数. 记 $S_i=\sum_{j=1}^{N_i}X_{ij}$ 为风险在第 i 年的总索赔, 这种模型被称为聚合风险模型[6]. 在聚合风险模型中, 一般认为索赔次数 N_i 服从参数为 θ 的 Poisson 分布, 且参数 θ 为随机变量, 具有先验分布 $\pi\left(\theta\right)$. 因此, 对未来年的索赔 S_{n+1} 的预测就落入了 Bayes 框架. 类似于个体风险模型, 未来年的总索赔 S_{n+1} 的 Bayes 估计(预测) 涉及到先验分布的选取问题. 本文结合信度理论的方法, 研究聚合风险模型下保费的信度估计问题.

1　Bayes 聚合风险模型

考虑一份非寿险保单合同, 对该合同有 n 年的索赔记录. 假设该合同在每年有若干次索赔发生. 用 N_i 表示第 i 年的索赔次数, 设 X_{ij} 为第 i 年内第 j 次的索赔额. 因此, 第 i 年内的总索赔额为

$$S_i=\sum_{j=1}^{N_i}X_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

称该风险模型为聚合风险模型. 一般地, 在聚合风险模型中, 常假设索赔次数 N_i 服从 Poisson 分布, 参数为 θ. 由于风险的非齐次性, 认为 θ 为随机变

收稿日期: 2012-09-20
基金项目: 国家自然科学基金(71001046), 江西省自然科学基金(20114BAB211004)和江西师范大学青年成长基金(4498)资助项目.
作者简介: 温利民(1979-), 男, 江西石城人, 副教授, 博士, 主要从事精算学的研究.

量，服从某个先验分布 $\pi(\theta)$，称 θ 为风险参数. 因此，对未来年的保费定价落入了 Bayes 框架.

本文考虑 Bayes 框架下的聚合风险模型，模型的假设如下:

假设1 在聚合风险模型中，索赔额 $\{X_{ij}, i,j=1,2,\cdots\}$ 与索赔次数 $\{N_t, t=1,2,\cdots\}$ 相互独立;

假设2 给定风险参数 θ 下，每年的索赔次数 $N_1,N_2,\cdots$ 相互独立，并服从 $\mathrm{Poisson}(\theta)$ 分布;

假设3 索赔额 $\{X_{ij}, i,j=1,2,\cdots\}$ 的分布与风险参数 θ 无关，且具有相同的分布 $F_X(x)$;

假设4 θ 为随机变量，具有先验分布 $\pi(\theta)$.

根据假设1~4，引入下列记号:

$$E(X_{ij})=\mu,\quad \mathrm{Var}(X_{ij})=\sigma^2, E(\theta)=\theta_0, \mathrm{Var}(\theta)=\tau^2.$$

引理1 (i)聚合风险 S_i 的期望为

$$E(S_i)=\mu\theta_0; \tag{1}$$

(ii) 聚合风险 S_i 与 S_j 的方差协方差为

$$\mathrm{Cov}(S_i,S_j)=\begin{cases}\theta_0(\mu^2+\sigma^2)+\mu^2\tau^2, i=j,\\ \mu^2\tau^2, \quad i\neq j,\end{cases} \tag{2}$$

(iii) 若记 $S=(S_1,S_2,\cdots,S_n)'$，则有

$$\mathbf{Cov}(S_{n+1},S)=\mu^2\tau^2\mathbf{1}_n', \tag{3}$$

$$\mathbf{Cov}(S,S)=\theta_0(\mu^2+\sigma^2)\boldsymbol{I}_n+\mu^2\tau^2\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n', \tag{4}$$

$$\mathbf{Cov}(S,S)^{-1}=\frac{\boldsymbol{I}_n}{\theta_0(\mu^2+\sigma^2)}-\frac{\mu^2\tau^2\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'}{\theta_0(\mu^2+\sigma^2)\left(\theta_0(\mu^2+\sigma^2)+n\mu^2\tau^2\right)}, \tag{5}$$

其中 $\mathbf{1}_n$ 表示分量全为1的 n 维列向量，$\boldsymbol{I}_n$ 表示 $n\times n$ 维单位矩阵.

证 容易验证(1)式. 由条件期望公式有

$$\mathrm{Cov}(S_i,S_j)=E\left[\mathrm{Cov}(S_i,S_j|\theta)\right]+\mathrm{Cov}\left(E(S_i|\theta),E(S_j|\theta)\right)=E\left[\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N_i}X_{ik},\sum_{l=1}^{N_i}X_{jl}|\theta\right)\right]+\mathrm{Cov}(\mu\theta,\mu\theta)=\begin{cases}\theta_0(\mu^2+\sigma^2)+\mu^2\tau^2, i=j,\\ \mu^2\tau^2, \quad i\neq j,\end{cases}$$

则得(2)式. 因此，可得(3)式和(4)式. 由求逆公式[7]

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}$$

可得(5)式.

2 聚合风险模型的保费估计

在前面的假设下，本文的目标是基于前 n 年的索赔样本预测第 $n+1$ 年的聚合损失 S_{n+1}.

根据 Bayes 定理，预测均值 $E(S_{n+1}|S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 是 S_{n+1} 的最优预测，称为 Bayes 保费，记为 $\widehat{S_{n+1}}^B$.

注意到

$$\widehat{S_{n+1}}^B=E(S_{n+1}|S_1,S_2,\cdots,S_n)=\int E(S_{n+1}|\theta)\pi(\theta|S_1,S_2,\cdots,S_n)\mathrm{d}\theta=\mu\int\theta\pi(\theta)\prod_{i=1}^n\left(f(S_i|\theta)\right)\mathrm{d}\theta/\int\pi(\theta)\prod_{i=1}^n\left(f(S_i|\theta)\right)\mathrm{d}\theta,$$

显然，在聚合风险模型下，难以得到 Bayes 保费 $\widehat{S_{n+1}}^B$ 的显示表达式.

解决这个问题的一个可行办法就是将 S_{n+1} 的预测限定在某些特定的函数类中，得到的最优预测称为信度估计/预测[8].

本文将 S_{n+1} 的预测限定在 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的线性函数中，记

$$L(S,1)=\left\{a_0+\sum_{i=1}^n a_iS_i|a_i\in\mathbf{R}, i=0,1,2,\cdots,n\right\},$$

即求解

$$\min_{a_i\in\mathbf{R},i=0,1,\cdots,n}E\left[\left(S_{n+1}-a_0-\sum_{i=1}^n a_iS_i\right)^2\right]$$

得到的预测称为信度估计，记为 $\widehat{S_{n+1}}^C$.

根据文献[6]，S_{n+1} 的非齐次信度估计其实就是 S_{n+1} 在 $L(S,1)$ 上的正交投影，即 $\widehat{S_{n+1}}^*=pro(S_{n+1}|L(S,1))$，且有下面的结论.

引理2 随机变量 S_{n+1} 在基于样本 S 的线性函数下的非齐次信度估计实际上就是 Y 在 $L(S,1)$ 上的正交投影，并且有下面的投影公式

$$pro(S_{n+1}|L(S,1))=E(S_{n+1})+\mathbf{Cov}(S_{n+1},S)\mathbf{Cov}(S,S)^{-1}(S-ES).$$

由引理1和引理2，得到聚合风险模型的信度估计，叙述为下面的定理.

定理1 在假设1~4下，未来索赔 S_{n+1} 的信度估计为

$$\widehat{S_{n+1}}^C=Z\bar{S}+(1-Z)\mu\theta_0,$$

其中

$$Z=\frac{n\mu^2\tau^2}{n\mu^2\tau^2+\theta_0(\mu^2+\sigma^2)}$$

为信度因子.

证　由引理1以及引理2可得

$$\widehat{S_{n+1}}^C = ES_{n+1} + \mathbf{Cov}(S_{n+1}, S)\mathbf{Cov}(S,S)^{-1}(S - ES) =$$

$$\mu\theta_0 + \left(\mu^2\tau^2\mathbf{1}_n'\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)} - \frac{\mu^2\tau^2\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'}{\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)\left(\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)+n\mu^2\tau^2\right)}\right)(S-\mu\theta_0\mathbf{1}_n) =$$

$$\frac{n\mu^2\tau^2}{n\mu^2\tau^2+\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)}\overline{S} + \frac{\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)}{n\mu^2\tau^2+\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)}\mu\theta_0 =$$

$$Z\overline{S} + (1-Z)\mu\theta_0.$$

注**2**　由于信度因子 $Z = \dfrac{n\mu^2\tau^2}{n\mu^2\tau^2+\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)}$，则显然有$0 \leq Z \leq 1$，以及当 $n \to \infty$ 时有 $Z \to 1$；且当 $n \to 0$, 时，有 $Z \to 0$．这符合传统信度的解释，样本数据容量越大，样本均值越可靠.

3　多合同聚合风险模型以及结构参数估计

在实际问题中，风险参数的先验分布 $\pi(\theta)$ 是未知的，所以结构参数 $\mu, \tau^2, \theta_0, \sigma^2$ 都是未知的．因此，这时必须有相同类型的保单组合数据，从而建立多合同模型，利用这些数据估计结构参数[9].

3.1　多合同聚合风险模型

考虑 M 份保险合同，在精算学中也表示 M 个风险．每份合同有 n 年的索赔记录．对于第 i 个保险合同，用 N_{ij} 表示第 i 个合同在第 j 年的索赔次数，以 X_{ijk} 表示第 i 个风险在第 j 年中第 k 次的索赔额，这里 $i = 1,2,\cdots,M$, $j = 1,2,\cdots,n$, $k = 1,2,\cdots,N_{ij}$，则

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{ij}} X_{ijk}$$

表示第 i 个风险第 j 年的总索赔量.

类似于单合同模型，给出如下假设与符号约定，

假设**5**　索赔额 $\left\{X_{ijk}, i, j, k = 1,2,\cdots\right\}$ 与索赔次数 $\left\{N_{st}, s, t = 1,2,\cdots\right\}$ 相互独立.

假设**6**　对第 i 个风险，在给定风险参数 θ 下，每年的索赔次数 $N_{i1}, N_{i2}, \cdots$ 相互独立，并服从 $\mathrm{Poisson}(\theta_i)$ 分布.

假设**7**　索赔额 $\left\{X_{ijk}, i, j, k = 1,2,\cdots\right\}$ 的分布与风险参数 θ_i 无关，且具有相同的分布 $F_X(x)$.

假设**8**　θ_i 为相互独立的随机变量，具有共同的先验分布 $\pi(\theta)$.

假设**9**　不同的保险合同风险之间是相互独立的.

类似地，在聚合风险的多合同模型下，为了估计第 i 个风险的保费，求解下面的最小化问题

$$\min_{a_0, a_{ijk}\in R} E\left[\left(S_{i,n+1} - a_0 - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}} a_{ijk}X_{ijk}\right)^2\right].$$

定理**2**　在假设5~9下的多合同聚合风险模型，第 i 个风险的信度估计为

$$\widehat{S_{i,n+1}}^C = Z\overline{S_i} + (I - Z)\mu\theta_0,$$

其中 $\overline{S_i} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} S_{ij}$，$Z = \dfrac{n\mu^2\tau^2}{n\mu^2\tau^2+\theta_0\left(\mu^2+\sigma^2\right)}$.

证　类似于定理1的证明，故略.

3.2　结构参数的估计

在多合同模型中，对结构参数 $\mu, \tau^2, \theta_0, \sigma^2$，分别提出以下的估计.

命题**1**　风险参数的均值 θ_0 的无偏估计是 $\widehat{\theta_0} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M}\overline{N_i}$，且当 $M \to \infty$ 时，$\widehat{\theta_0}$ 是 θ_0 的相合估计.

证　记 $N_{i\bullet} = \sum\limits_{j=1}^{n} N_{ij}$，则

$$E\left(N_{i\bullet}\right) = E\left[E\left(N_{i\bullet}|\theta_i\right)\right] = E\left(n\theta_i\right) = n\theta_0,$$

因此有

$$E\left(\overline{N_i}\right) = E\left(\frac{1}{n}N_{i\bullet}\right) = \theta_0,$$

则 $E\left(\widehat{\theta_0}\right) = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M} E\left(\overline{N_i}\right) = \theta_0$.

下面证明 $\widehat{\theta_0}$ 的相合性．由条件方程公式，有

$$\mathrm{Var}\left(N_{i\bullet}\right) = \mathrm{Var}\left[E\left(N_{i\bullet}|\theta_i\right)\right] + E\left[\mathrm{Var}\left(N_{i\bullet}|\theta_i\right)\right] =$$

$$\mathrm{Var}\left(n\theta_i\right) + E\left(n\theta_i\right) = n^2\tau^2 + n\theta_0,$$

因此有

$$\mathrm{Var}\left(\overline{N_i}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}N_{i\bullet}\right) = \tau^2 + \frac{\theta_0}{n}, \tag{6}$$

则当给定的 n，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Var}\left(\overline{N_k}\right)/k^2 < \infty.$$

由科尔莫格罗夫大数定理知，$\widehat{\theta_0} \xrightarrow{a.s} \theta_0$.

命题**2**　当 θ_0 已知时，聚合均值 μ 的1个无偏估计为

$$\widehat{\mu}=\frac{1}{Mn\theta_0}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}S_{ij},$$

当 θ_0 用其估计 $\widehat{\theta_0}$ 替换，则当 $M\to\infty$ 时，$\widehat{\mu}=\frac{1}{Mn\widehat{\theta_0}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}$ 是 μ 的相合估计.

证　记 $N=(N_{11},\cdots,N_{1N},\cdots,N_{i1},\cdots,N_{in},\cdots,N_{M1},\cdots,N_{Mn})$. 因为

$$E\left(S_{ij}\right)=E\left[E\left(\sum_{k=1}^{N_{ij}}X_{ijk}\,|N\right)\right]=\mu E\left(N_{ij}\right)=$$
$$\mu E\left[E\left(N_{ij}|\theta_i\right)\right]=\mu\theta_0,$$

则有

$$E\left(\widehat{\mu}\right)=\frac{1}{Mn\theta_0}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}E\left(S_{ij}\right)=\mu .$$

因此当 θ_0 取真值时，$\widehat{\mu}$ 为 μ 的无偏估计，下面证明 $\widehat{\mu}$ 的相合性. 注意到 $\widehat{\mu}=\frac{1}{M\theta_0}\sum_{i=1}^{M}\overline{S_i}$ 可看成独立同分布随机变量的均值，其中 $\overline{S_i}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}$. 由于

$$E\left(\overline{S_i}|N\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}\,|N\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}X_{ijk}\,|N\right)=\mu N_{i\bullet}$$

以及

$$\mathrm{Var}\left(\overline{S_i}|N\right)=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{ij}\,|N\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}X_{ijk}\,|N\right)=\frac{\sigma^2}{n}N_{i\bullet},$$

则有

$$\mathrm{Var}\left(\overline{S_i}\right)=\mathrm{Var}\left(E\left(\overline{S_i}|N\right)\right)+E\left(\mathrm{Var}\left(\overline{S_i}|N\right)\right)=$$
$$\mathrm{Var}\left(\mu N_{i\bullet}\right)+E\left(\frac{\sigma^2}{n}N_{i\bullet}\right)=\mu^2\left(n^2\tau^2+n\theta_0\right)+$$
$$\frac{\sigma^2}{n}n\theta_0=\mu^2n^2\tau^2+n\theta_0\mu^2+\theta_0\sigma^2,$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Var}\left(\overline{S_k}\right)/k^2<\infty.$$

由科尔莫格罗夫强大数定律知,

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\overline{S_i}-E\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\overline{S_i}\right)\xrightarrow{a.s}0 .$$

又由命题1知 $\widehat{\theta_0}\xrightarrow{a.s}\theta_0$，再由Slutsky定理知 $\widehat{\mu}\xrightarrow{a.s}\mu$.

命题3　结构参数 τ^2 的1个无偏估计为

$$\widehat{\tau^2}=\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{N}-\overline{\overline{N}}\right)^2-\frac{\widehat{\theta_0}}{n},$$

其中 $\overline{N_i}=\frac{N_{i\bullet}}{n},\overline{\overline{N}}=\frac{1}{Mn}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}N_{ij}$ ，且当 $E\left({N_{11}}^4\right)<\infty$ 时，$\widehat{\tau^2}$ 是 $M\to\infty$ 的相合估计.

证　由(6)式知，$\mathrm{Var}\left(\overline{N_i}\right)=\tau^2+\theta_0/n$，且

$$\mathrm{Cov}\left(\overline{N_i},\overline{\overline{N}}\right)=\mathrm{Cov}\left(\overline{N_i},\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\overline{N_i}\right)=\frac{1}{M}\mathrm{Var}\left(\overline{N_i}\right)=\frac{1}{M}\left(\tau^2+\frac{\theta_0}{n}\right),$$

则有

$$E\left(\overline{N_i}-\overline{\overline{N}}\right)^2=\mathrm{Var}\left(\overline{N_i}\right)+\mathrm{Var}\left(\overline{\overline{N}}\right)-2\mathrm{Cov}\left(\overline{N_i},\overline{\overline{N}}\right)=$$
$$\tau^2+\frac{\theta_0}{n}+\frac{\tau^2}{M}+\frac{\theta_0}{Mn}-2\left(\frac{1}{M}\left(\tau^2+\frac{\theta_0}{n}\right)\right)=$$
$$\frac{M-1}{M}\left(\tau^2+\frac{\theta_0}{n}\right),$$

因此

$$E\left(\widehat{\tau^2}\right)=\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}E\left(\overline{N_i}-\overline{\overline{N}}\right)^2-\frac{1}{n}E\left(\widehat{\theta_0}\right)=\tau^2 .$$

由此证明了估计的无偏性，下面证明估计的相合性.注意到

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{N_i}-\overline{\overline{N}}\right)^2=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{N_i}-\theta_0+\theta_0-\overline{\overline{N}}\right)^2=$$
$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\overline{N_i}-\theta_0\right)^2-\left(\overline{\overline{N}}-\theta_0\right)^2,$$

则只须证明

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\left(\overline{N_i}-\theta_0\right)^2-E\left(\overline{N_i}-\theta_0\right)^2\right]\xrightarrow{a.s}0$$

即可. 由科尔莫格罗夫强大数定理，只须证 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Var}\left[\left(\overline{N_k}-\theta_0\right)^2\right]/k^2<\infty$，而

$$\mathrm{Var}\left[\left(\overline{N_k}-\theta_0\right)^2\right]\leqslant E\left(\overline{N_i}-\theta_0\right)^4=E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(N_{ij}-\theta_0\right)\right]^4\leqslant$$
$$\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(N_{ij}-\theta_0\right)\left(N_{it}-\theta_0\right)\left(N_{is}-\theta_0\right)\left(N_{ik}-\theta_0\right)\right]\leqslant$$
$$\frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(\left(N_{ij}-\theta_0\right)^4+\left(N_{it}-\theta_0\right)^4+\left(N_{is}-\theta_0\right)^4+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(N_{ik}-\theta_0\right)^4\right)/4\right]=E\left(N_{11}-\theta\right)^4<\infty.$$

所以有 $\widehat{\tau^2}\xrightarrow{a.s}\tau^2$.

命题 4　索赔额方差 σ^2 的1个无偏估计是

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\frac{\left(X_{ijk}-\overline{X_i}\right)}{N_{i\bullet}-1},$$

其中 $\overline{X_i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}X_{ijk}/N_{i\bullet}$.

证　记第 i 个合同的样本方差

$$Y_i^2=\frac{1}{N_{i\bullet}-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\left(X_{ijk}-\overline{X_i}\right)^2=$$

$$\frac{1}{N_{i\bullet}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\left(X_{ijk}-\mu\right)^2-\sum_{j=1}^{n}N_{ij}\left(\overline{X_i}-\mu\right)^2\right],$$

则有

$$E\left(Y_i^2\right)=E\left(\frac{1}{N_{i\bullet}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\left(X_{ijk}-\mu\right)^2-\sum_{j=1}^{n}N_{ij}\left(\overline{X_i}-\mu\right)^2\right]\right)=E\left(E\left(\frac{1}{N_{i\bullet}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_{ij}}\left(X_{ijk}-\mu\right)^2-\sum_{j=1}^{n}N_{ij}\left(\overline{X_i}-\mu\right)^2\right]\right)N\right)=\sigma^2.$$

因此有

$$E\left(\widehat{\sigma^2}\right)=E\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}Y_i^2\right)=\sigma^2\,.$$

故得到 $S_{i,n+1}$ 的经验 Bayes 信度估计为

$$\widetilde{S_{i,n+1}}=\hat{Z}\overline{S_i}+\left(1-\hat{Z}\right)\hat{\mu}\widehat{\theta_0},$$

其中 $\hat{Z}=\dfrac{n\widehat{\mu^2}\widehat{\tau^2}}{\widehat{\theta_0}\left(\widehat{\mu^2}+\widehat{\sigma^2}\right)+n\widehat{\mu^2}\widehat{\tau^2}}$．注意到 $\widetilde{S_{i,n+1}}$ 不再依赖未知参数，因此可以直接用于实际问题.

4　结束语

聚合风险模型是非寿险精算中用来刻画总索赔最普遍的模型．本文建立了Bayes框架下的聚合风险模型，利用信度理论的思想得到了聚合风险总索赔额的信度保费公式．结论表明，聚合风险的信度保费能表达为信度的加权的形式；同时提出了结构参数的估计，得到了经验信度估计，从而使得给出的保费估计能直接运用于实际.

5　参考文献

[1] 邓国华．风险非同质时索赔次数的统计研究 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2004, 28(3): 228-231.

[2] Hernandez A, Fernández-Sánchez M P, Gomez E. The net Bayes premium with dependence between the risk profiles [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45(2): 247-254.

[3] Gomez E, Hernandez A, Vazquez-Polo, et al. Robust Bayesian premium principles in actuarial science [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 2000, 49(2): 241-252.

[4] Wen Limin, Wu Xianyi, Zhou Xian. The credibility premiums for models with dependence induced by common effects [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(1): 19-25.

[5] 郑丹，章溢，温利民．具有时间变化效应的信度模型 [J]．江西师范大学学报：自然科学版, 2012, 36(3): 249-252;

[6] Bühlmann H, Gisler A. A course in credibility theory and its applications [M]. New York: Springer, 2005.

[7] Rao C R, Toutenburg H. Linear models [M]. New York: Springer, 1995.

[8] Wen Limin, Wang Wei, Yu Xueli. The credibility models with error uniform dependence [J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 2009(5): 118-126.

[9] 温利民，吴贤毅．指数保费原理下的经验厘定 [J]．中国科学：数学, 2011, 41(10): 861-876.

The Credibility Estimation for the Collective Models

FANG Jing[1], ZHANG Yi[2], WEN Li-min[1*]

(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. College of Computer Information and Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The credibility premium of aggregate claim in Bayes collective risk model are derived based on the credibility theory. Moreover, in the models of multitude contract data, the correspo nding unbiased estimators are suggested for the unknown structure parameters. And some statisti cal properties of those estimators are proved.

Key words: collective risk model; credibility premium; estimator; consistency

(责任编辑：曾剑锋)