文章编号: 1000-5862(2012)06-0608-03

分数布朗运动环境下多资产的最大值期权定价

马　玲, 胡　华*

(宁夏大学数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 利用拟条件数学期望理论研究分数布朗运动环境下的期权定价问题, 得到相同假设条件下的 n 维分数布朗运动环境下多种标的资产的最大值期权定价模型, 推广了最大值期权模型, 使应用更为广泛.

关键词: 最大值期权; 分数布朗运动; 风险中性测度; 拟条件数学期望

中图分类号: O 211.6, F 224.7　　文献标志码: A

0 引言

文献[1]中介绍了不同种衍生证券的定价模型; 文献[2]建立了欧式期权的抛物型模糊二叉树模型. 经金融实证研究表明, 风险资产(股票)的市场价格不能被理想化, 简单的看成是服从几何布朗运动的, 而是有长久依赖性和自相似性, 于是引入分数布朗运动作为随机来源, 应用 Black - Scholes 期权定价中一个有长期记忆的过程代替. 所以金融界在研究金融衍生产品定价时多考虑在分数布朗运动环境中的定价问题, 并给出了相关定价公式. 文献[3-7]分别利用保险精算法等推导并证明了在分数布朗运动环境下的几种期权的定价公式, 继而文献[8]又推导出了在分数跳-扩散环境下欧式双向期权定价的 Ornstein-Uhlenbeck 模型.

许多学者证明了分数 Black - Scholes 市场存在套利, 使得分数布朗运动不适合驱动期权定价模型. 而 Hu Yao-zhong 和 B. ∅ksendal(2003)在分数型 *Itô* 积分意义下证明了 Black - Scholes 市场是无套利且是完备的. C. Necula 等[9]通过随机积分的计算证明了分数 Black - Scholes 公式; 文献[10]证明了 2 种资产在 n 维分数布朗运动环境下的最值期权定价公式; 文献[11]证明了在分数布朗运动环境下多种资产的最大值期权定价公式. 在此基础上, 本文主要采用分数型风险中性测度下拟条件数学期望的多个标的资产在 n 维分数布朗运动环境下的最大值期权的定价模型并证明其结果, 使最大值期权的定价模型得以推广.

1 多资产的 n 维分数型股票价格

设金融市场中有 m 种风险资产, 其价格满足方程

$$\mathrm{d}S_i(t)=u_iS_i(t)\mathrm{d}t+S_i(t)\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}\mathrm{d}B_{H_i}(t),0\leqslant t\leqslant T$$

和一种无风险资产, 其价格满足方程

$$\mathrm{d}M(t)=rM(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $r,u,\sigma_{ij}(i,j=1,2,\cdots,m)$ 为常数, $\sum\limits_{j=1}^{m}\sigma_{ij}=(\sigma_{ij})_{m\times m}$ 为可逆矩阵, $B_{H_1}(t),B_{H_2}(t),B_{H_n}(t)$ 为概率空间 (Ω,F,P) 上的 *Hurst* 参数分别为 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ $(0<H_i<1,i=1,2,\cdots,m)$ 的分数布朗运动, 用 F_t 表示由分数布朗运动 $B_{H_1}(t),B_{H_2}(t),\cdots,B_{H_n}(t)$ 产生的自然 σ- 流.

文献[12]定义新的概率测度 Q, 若 $E_P\left(\exp\int_0^T\theta^2\mathrm{d}t\right)<\infty$, 其中令 $\theta=\sum^{-1}(u-r1_n)$, $\mathbf{1}_n=(1,1,\cdots,1)'$, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'$, 且 θ_i 满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\theta_j=u_i-r,i=1,2,\cdots,n$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\exp\left\{-\theta'\theta T/2-\theta'B_H(T)\right\},B_H^Q(T)=B_H(T)+\theta T.$$

所以在等价鞅测度 Q 下, 标的资产价格为

$$\mathrm{d}S_i(t)=rS_i(t)\mathrm{d}t+S_i(t)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\mathrm{d}B_{H_j}(t),$$
$$0\leqslant t\leqslant T,i=1,2,\cdots,m.$$

令 $\hat{B}_{H_i}(t)=\sigma_{i1}B_{H1}+\sigma_{i2}B_{H2}+\cdots+\sigma_{in}B_{Hn},i=1,2,\cdots,m,$

收稿日期: 2012-07-20
基金项目: 国家自然科学基金(61063020), 宁夏自然科学基金(NZ1050)和宁夏研究生教育创新计划(2010)资助项目.
作者简介: 胡　华(1962-), 男, 宁夏中宁人, 教授, 主要从事随机过程与金融数学的研究.

所以标的资产价格为

$$\mathrm{d}S_i(t) = rS_i(t)\mathrm{d}t + S_i(t)\mathrm{d}\hat{B}_{H_i}, i = 1, 2, \cdots, m.$$

利用 Wick 积计算得

$$S_i(t) = S_i(0)\exp\left\{rt + \hat{B}_{H_i}(t) - \sigma_{H_i}(t)^2/2\right\}, i = 1, 2, \cdots, m,$$

其中

$$\sigma_{H_i}(t)^2 = \sum_{l,m=1}^{n} \sigma_{il}\sigma_{im}\sin[\pi(H_l + H_m)/2]\Gamma(H_l + H_m + 1)t^{H_l + H_m} \Big/ [\Gamma(2H_l + 1)\sin(\pi H_l)\Gamma(2H_m + 1)\sin(\pi H_m)]^{1/2}.$$

引理 1　任意有界可测未定权益 $\xi \in L^2(P)$，其无套利价格为 $\upsilon = \mathrm{e}^{-rT}E_Q[\xi]$.

命题 1　在金融市场中，欧式未定权益 $g(S_1(T), S_2(T), \cdots, S_m(T))$ 的无套利价格为

$$\upsilon = \mathrm{e}^{-rT}E_Q[g(S_1(T), S_2(T), \cdots, S_m(T))].$$

2　多种资产的最大值期权定价

引理 2　关于股票 $S_i(T), S_j(T)$ 的最大值欧式看涨期权，$g(S(T)) = (\max\{S_i(T), S_j(T)\} - K)^+$，则其无套利价格为

$$C_{\max} = S_i(0)N_2(d^{(i,j)}, d_2^{(i)}; \rho_{ij,i}) + S_j(0)N_2(d^{(i,j)}, d_2^{(j)}; \rho_{ji,j}) - K\mathrm{e}^{-rT}[1 - N_2(-d_1^{(i)}, -d_1^{(j)}; \rho_{ij})],$$

其中 $d^{(i,j)}, d_2^{(i)}; \rho_{ij,i}, d_2^{(j)}; \rho_{ji,j}, d_1^{(i)}, d_1^{(j)}; \rho_{ij}, N_2(\cdot)$ 参见文献[9].

定理 1　多种资产 $S_1(T), S_2(T), \cdots, S_m(T)$ 的最大值欧式看涨期权，其未定权益为 $g(S(T)) = (\max\{S_1(T), S_2(T), \cdots, S_m(T)] - K)^+$，则其无套利价格为

$$C\max = \sum_{i=1}^{m} S_i(0)N_m(d^{(i,1)}, d^{(i,2)}, \cdots, d^{(i,i-1)}, d^{(i,i+1)}, \cdots, d^{(i,m)}, d_2^{(i)}; \rho_{ij,i}, j \ne i) - K\mathrm{e}^{-rT}[1 - N_m(-d_1^{(1)}, -d_1^{(2)}, \cdots, -d_1^{(m)}; \rho_{ij}, i \ne j)],$$

其中

$$b^{(i,j)} = \frac{\ln S_i(0) - \ln S_j(0) - (\sigma_{H_i}(T)^2 - \sigma_{H_j}(T)^2)/2}{\sqrt{\sigma_{H_i}(T)^2 + \sigma_{H_j}(T)^2 - 2\sigma_{H_iH_j}(T)}},$$

$$\sigma_{H_iH_j}(T) = \sum_{l,m=1}^{n} \sigma_{il}\sigma_{jm}\sin[\pi(H_l + H_m)/2]\Gamma(H_l + H_m + 1)\cdot T^{H_l + H_m} \Big/ [\Gamma(2H_l + 1)\sin(\pi H_l)\Gamma(2H_m + 1)\sin(\pi H_m)]^{1/2},$$

$$d_1^{(i)} = \frac{\ln S_i(0) - \ln K + rT - \sigma_{H_i}(T)^2/2}{\sigma_{H_i}(T)},$$

$$d_2^{(i)} = \frac{\ln S_i(0) - \ln K + rT + \sigma_{H_i}(T)^2/2}{\sigma_{H_i}(T)} = d_1^{(i)} + \sigma_{H_i}(T),$$

$$\varepsilon_i = \frac{\hat{B}_{H_i}(T)}{\sigma_{H_i}(T)}, \varepsilon_{ij} = \frac{\hat{B}_{H_i}(T) - \hat{B}_{H_j}(T)}{\sqrt{\sigma_{H_i}(T)^2 + \sigma_{H_j}(T)^2 - 2\sigma_{H_iH_j}(T)}},$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{H_iH_j}(T)}{\sigma_{H_i}(T)\sigma_{H_j}(T)},$$

$$\rho_{ij,i} = \frac{\sigma_{H_i}(T)^2 - \sigma_{H_iH_j}(T)}{\sigma_{H_i}(T)\sqrt{\sigma_{H_i}(T)^2 + \sigma_{H_j}(T)^2 - 2\sigma_{H_iH_j}(T)}},$$

$$d^{(i,j)} = \left[\ln S_i(0) - \ln S_j(0) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{H_i}(T)^2 + \sigma_{H_j}(T)^2 - 2\sigma_{H_iH_j}(T)\right)\right] \Big/ \sqrt{\sigma_{H_i}(T)^2 + \sigma_{H_j}(T)^2 - 2\sigma_{H_iH_j}(T)} = b^{(i,j)} + \rho_{ij,i}\sigma_{H_i}(T),$$

证　由命题 1 可知，欧式看涨期权的价格为

$$\begin{aligned}
&C_{\max} = \mathrm{e}^{-rT}E_Q(\max\{S_1(T), S_2(T), \cdots, S_m(T)\} - K)^+ = \\
&\mathrm{e}^{-rT}E_Q(S_1(T)I_{\{S_1(T)>S_i(T), i\ne 1, S_1(T)>K\}}) + \\
&\mathrm{e}^{-rT}E_Q(S_2(T)I_{\{S_2(T)>S_i(T), i\ne 2, S_2(T)>K\}}) + \cdots + \\
&\mathrm{e}^{-rT}E_Q(S_m(T)I_{\{S_m(T)>S_i(T), i\ne m, S_m(T)>K\}}) - \\
&K\,\mathrm{e}^{-rT}E_Q(I_{\{\max\{S_1(T), S_2(T), \cdots, S_m(T)\}>K\}}) = \\
&S_1(0)E_Q(\exp\{\hat{B}_{H_1}(t) - \sigma_{H_1}(t)^2/2\}I_{\{S_1(T)>S_i(T), i\ne 1, S_1(T)>K\}}) + \\
&S_m(0)E_Q(\exp\{\hat{B}_{H_m}(t) - \sigma_{H_m}(t)^2/2\}I_{\{S_m(T)>S_i(T), i\ne m, S_m(T)>K\}}) - \\
&K\,\mathrm{e}^{-rT}[1 - \hat{P}(S_i(T) < K, i = 1, 2, \cdots, m)] = \\
&S_1(0)E_Q(\exp\{\hat{B}_{H_1}(t) - \sigma_{H_1}(t)^2/2\}I_{\{-\varepsilon_{1i}<b^{(1,i)}, i\ne 1, -\varepsilon_1<d_1^{(1)}\}} + \\
&S_2(0)E_Q(\exp\{\hat{B}_{H_{21}}(t) - \sigma_{H_{21}}(t)^2/2\}I_{\{-\varepsilon_{2i}<b^{(2,i)}, i\ne 2, -\varepsilon_2<d_1^{(2)}\}} + \cdots + \\
&S_m(0)E_Q(\exp\{\hat{B}_{H_m}(t) - \sigma_{H_m}(t)^2/2\}I_{\{-\varepsilon_{mi}<b^{(m,i)}, i\ne m, -\varepsilon_2<d_1^{(m)}\}} - \\
&K\,\mathrm{e}^{-rT}[1 - \hat{P}(\varepsilon_1 < -d_1^{(1)}, \varepsilon_2 < -d_1^{(2)}), \cdots, \varepsilon_m < -d_1^{(m)}; \rho_{ij}] = \\
&S_1(0)\int_{-\infty}^{b^{(1,2)}}\int_{-\infty}^{b^{(1,3)}}\cdots\int_{-\infty}^{b^{(1,m)}}\int_{-\infty}^{d_1^{(1)}}\exp\{-\sigma_{H_1}(T)(x_2, x_3, \cdots, x_m) - \\
&\sigma_{H_1}(T)^2/2\bullet\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m, \rho_{1j,1},)\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m + \\
&S_2(0)\int_{-\infty}^{b^{(2,1)}}\int_{-\infty}^{b^{(2,3)}}\cdots\int_{-\infty}^{b^{(2,m)}}\int_{-\infty}^{d_1^{(2)}}\exp\{-\sigma_{H_2}(T)(x_1, x_3, \cdots, x_m) - \\
&\sigma_{H_2}(T)^2/2\bullet\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m, \rho_{2j,2},)\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m + \cdots + \\
&S_m(0)\int_{-\infty}^{b^{(m,1)}}\int_{-\infty}^{b^{(m,2)}}\cdots\int_{-\infty}^{b^{(m,m-1)}}\int_{-\infty}^{d_1^{(m)}}\exp\{-\sigma_{H_m}(T)(x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) - \\
&\sigma_{H_m}(T)^2/2\bullet\phi(x_1, x_2, \cdots, x_m, \rho_{mj,m},)\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m - \\
&K\,\mathrm{e}^{-rT}[1 - N_m(-d_1^{(1)}, -d_1^{(2)}, \cdots, -d_1^{(m)}; \rho_{ij})] = \\
&S_1(0)\int_{-\infty}^{b^{(1,2)}+\rho_{12,1}\sigma_{H_1}(T)}\int_{-\infty}^{b^{(1,3)}+\rho_{13,1}\sigma_{H_1}(T)}\cdots\int_{-\infty}^{b^{(1,m)}+\rho_{1m,1}\sigma_{H_1}(T)}\int_{-\infty}^{d_1^{(1)}+\sigma_{H_1}(T)} \\
&\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_m; \rho_{ij,i})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m + \\
&S_2(0)\int_{-\infty}^{b^{(2,1)}+\rho_{21,2}\sigma_{H_2}(T)}\int_{-\infty}^{b^{(2,3)}+\rho_{23,2}\sigma_{H_2}(T)}\cdots\int_{-\infty}^{b^{(2,m)}+\rho_{2m,2}\sigma_{H_2}(T)} \\
&\int_{-\infty}^{d_1^{(2)}+\sigma_{H_2}(T)}\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_m; \rho_{ij,i})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m + \cdots + \\
&S_2(0)\int_{-\infty}^{b^{(m,1)}+\rho_{m1,m}\sigma_{H_m}(T)}\int_{-\infty}^{b^{(m,2)}+\rho_{m2,m}\sigma_{H_m}(T)}\cdots\int_{-\infty}^{b^{(m,m-1)}+\rho_{mm-1,m}\sigma_{H_m}(T)}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{d_1^{(m)}+\sigma_{H_m}(T)}\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_m;\rho_{ij,i})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m -$$
$$K\,\mathrm{e}^{-rT}[1-N_m(-d_1^{(1)},-d_1^{(2)},\cdots,-d_1^{(m)};\rho_{ij})]=$$
$$\sum_{i=1}^{m}S_i(0)N_m(d^{(i,1)},d^{(i,2)},\cdots,d^{(i,i-1)},d^{(i,i+1)},\cdots,d^{(i,m)},d_2^{(i)};$$
$$\rho_{ij,i},j\neq i)-K\mathrm{e}^{-rT}[1-N_m(-d_1^{(1)},-d_1^{(2)},\cdots,-d_1^{(m)};\rho_{ij},i\neq j)].$$

其中

$$\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_m;\rho_{ij,i})=$$
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{ij}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{ij}^2)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{m}\{y_i^2-2\rho_{ij}^2y_i^2y_j^2+y_j^2\}\right\},$$
$$N_m(y_1,y_2,\cdots,y_m;\rho_{ij,i})=$$
$$\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}\cdots\int_{-\infty}^{y_{m-1}}\int_{-\infty}^{y_m}\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_m;\rho_{ij,i})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m,$$

从而定理 1 得证.

综上所述, 推导并证明了多种资产在 n 维分数布朗运动环境下的最大值期权定价模型, 使得最大值期权定价公式得以推广, 并在金融市场中广泛应用.

3 参考文献

[1] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 74-89.

[2] 胡华, 陈清风. 抛物型模糊二叉树欧式期权定价模型 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(2): 177-179, 188.

[3] 胡攀. 分数型几何平均压实期权的保险精算定价 [J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2010, 27(5): 435-439.

[4] 刘海媛, 周圣武, 索新丽. 标的资产价格服从分数布朗运动的几种新型期权定价 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(15): 54-59.

[5] 冯德育. 分数布朗运动条件下回望期权的定价研究 [J]. 北方工业大学学报, 2009, 21(1): 67-72.

[6] 张超, 张寄洲. 分数布朗运动下随机利率情形的欧式期权定价公式 [J]. 上海师范大学学报: 自然科学版, 2010, 39(6): 558-562.

[7] 何成洁, 杜雪樵. 分数布朗运动环境中期权定价模型 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2009.

[8] 马惠馨, 薛红, 杨珊. 分数跳-扩散环境下欧式双向期权定价的 Ornstein-Uhlenbeck 模型 [J]. 西安工程大学学报, 2011, 25(2): 261-265.

[9] Ciprian Necula. Option pricing in a fractional Brownian motion environment [J]. Academy of Economic Studies Bucharest, 2004, 6(3):259-273.

[10] 薛红, 王拉省. 分数布朗运动环境中最值期权定价 [J]. 工程数学学报, 2008, 25(5): 843-850.

[11] 赵巍. 股价遵循分数布朗运动的最大值期权定价模型 [J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(3): 16-21.

[12] 于艳娜, 孔繁亮. 分数布朗运动环境中应用鞅方法定价欧式期权 [J]. 哈尔滨商业大学学报: 自然科学版, 2010, 26(4): 433-435.

The Maximum Option Pricing for Assets in Fractional Brownian Motion Environment

MA Ling, HU Hua*

(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China)

Abstract: The pricing issues of options in the fractional Brownian motion environment are researched by quasi conditional mathematical expectation theory. The maximum option pricing model with kinds of underlying assets in n fractional Brownian motion environment under fractional risk neutral measure is obstained, which extend the pricing of maximum options and put into use widely.

Key words: the maximum option; fractional Brownian motion; risk neutral measure; quasi conditional mathematical expectation

(责任编辑: 曾剑锋)