第 37 卷 第 1 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 1
2013 年 1 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jan. 2013

文章编号: 1000-5862(2013)01-0001-05

方程 $f''+Af'+Bf=0$ 的解在角域内的增长性及 Borel 方向

易才凤,刘旭强

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 运用角域内值分布的理论和方法,研究了整系数 2 阶线性微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 的解在角域内的增长性和 Borel 方向. 在给定条件下,证明了方程的每一非零解在含有 B 的 $\lambda(\lambda>0)$ 级 Borel 方向的任意角域内的增长级均为无穷,且 B 的 λ 级 Borel 方向与解的无穷级 Borel 方向一致.

关键词: 微分方程; 解; 角域; Borel 方向; 无穷级

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

0 引言与主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布及角域上值分布的标准记号[1-2],讨论了 2 阶线性微分方程

$$f''+Af'+Bf=0 \tag{1}$$

的非零解在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的增长性与 Borel 方向,这里 A,B 都是整函数.

在叙述本文的主要结果之前,先引入有关概念和符号.

设 $f(z)$ 是复平面上的整函数,$\sigma(f)$,$\mu(f)$ 分别表示 $f(z)$ 在全平面上的增长级和下级,即

$$\sigma(f)=\limsup_{r\to\infty}\log\log M(r,f)/\log r,$$

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\log\log M(r,f)/\log r,$$

其中 $M(r,f)=\sup\{|f(z)|:|z|\leqslant r\}$.

定义 1[3-4] 设 $0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$,复平面上的角域定义为

$$\Omega(\alpha,\beta)=\{z\,|\,\alpha<\arg z<\beta\};$$

$$\overline{\Omega}(\alpha,\beta,r)=\{z\,|\,\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta,|z|\leqslant r\}.$$

若 f 为整函数,记

$$M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f)=\sup\{|f(te^{i\theta})|:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0<t\leqslant r\},$$

则 f 在角域上、径向上的增长级分别定义为

$$\sigma_{\theta,\varepsilon}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f)}{\log r};$$

$$\sigma_{\theta}(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_{\theta,\varepsilon}(f).$$

定义 2[5] 设 $f(z)$ 是开平面 $|z|<\infty$ 上的一个 $\sigma(\sigma\geqslant0)$ 级亚纯函数,如果对任意小的 $\varepsilon>0$ 和任意复数 a,都有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=a)}{\log r}=\sigma,$$

但可能至多除去 2 个值 a 例外,则称从原点发出的半直线 $\arg z=\theta$ 是整函数 $f(z)$ 的 1 条 $\sigma(\sigma>0)$ 级 Borel 方向.

众所周知,在全平面里研究方程(1)的非零解的性质已经有很多重要的结果,例如,1988 年 G. Gundersen[6],1991 年 S. Hellerstein 等[7] 证明了: 若 $A(z)$,$B(z)$ 为整函数且满足 $\sigma(A)<\sigma(B)$; 或 $A(z)$ 为多项式,$B(z)$ 是超越的; 或 $\sigma(B)<\sigma(A)<1/2$,则方程(1)的每一非零解的级均为无穷. 2012 年,文献[8-9]在假设方程的某个系数具有亏值、并假设系数的增长级满足一定条件时,证明了高阶线性微分方程的非零解具有无穷增长级. 随着角域概念的引入,以及函数在角域里相关性质的深入研究,自然会问 A,B 满足什么条件时方程(1)的任意非零解在角域里的增长级能达到无穷? 1994 年,伍胜健在文献[10]中首次研究了 2 阶线性微分方程(1)的非零解在角域上的增长性,得到了如下结果.

定理 A 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant2\pi)$ 内解析,如果 $\forall K>0$ 及满足 $\alpha<\theta<\beta$ 和

收稿日期: 2012-10-10

基金项目: 国家自然科学基金(11171170)资助项目.

作者简介: 易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

$$\liminf_{r\to\infty}(A(re^{i\theta})+1)r^K/B(re^{i\theta})=0$$

的 θ 具有一正测度,则方程(1)的任一非零解都有 $\sigma_{\alpha,\beta}(f)=\infty$,其中

$$\sigma_{\alpha,\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\Omega(\alpha,\beta),f)}{\log r}.$$

早在 1928 年,G. Valiron 在文献[1]中提出任意 $\sigma>0$ 级亚纯函数至少存在 1 条 σ 级 Borel 方向. 研究表明,若函数的增长级为 σ,则它在 σ 级 Borel 方向附近的增长速度可以达到它在全平面上的增长速度. 自然就会考虑:假如 B 在某个角域内含有 1 条 λ 级 Borel 方向,而 A 在该角域内的增长级小于 λ,那么方程(1)的非零解在该角域内的增长性如何?再则,若非零解在该角域内的增长级为无穷,那么解的无穷级 Borel 方向和 B 的 $\sigma(B)$ 级 Borel 方向是否一致呢?

本文在系数函数含有 Borel 方向的角域内,讨论了 2 阶线性微分方程(1)解的增长性及 Borel 方向的分布,并得到以下结果.

定理 1 设 A,B 为有限级整函数,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为某一角域;若 A,B 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内满足条件:$\exists\theta\in(\alpha,\beta)$,使得 $\arg z=\theta$ 为 B 的 1 条 $\lambda(0<\lambda\leqslant\sigma(B))$ 级 Borel 方向,且 $\sigma_{\alpha\beta}(A)<\lambda$,则对方程(1)的任一非平凡解 f,有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$ 且 $\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向.

例如:考虑 2 阶线性微分方程 $f''-f'-e^{2z}f=0$,$\arg z=\pi/2$ 为 $B=-e^{2z}$ 的 1 条 Borel 方向,在以 $\arg z=\pi/2$ 为角平分线的任意角域内,上述方程满足定理 1 的条件. 易知,上述方程有 2 个线性无关的解 $f_1=\exp\{\exp z\}$,$f_2=\exp\{-\exp z\}$,均以 $\arg z=\pi/2$ 为其 1 条无穷级 Borel 方向.

由定理 1 不难得到以下结论.

推论 1 设 A,B 为有限级整函数,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为某一角域,设 $\sigma_{\alpha\beta}(A)<\sigma(B)$,$f$ 为方程(1)的任一非平凡解,则 f 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的 ∞ 级 Borel 方向的总数不少于 B 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的 $\lambda(\sigma_{\alpha\beta}(A)<\lambda\leqslant\sigma(B))$ 级 Borel 方向的总数.

定理 2 设 A,B 为有限级整函数,B 的下级满足 $0<\mu(B)<1/2$,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为一角域;若 A 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内满足 $\sigma_{\alpha\beta}(A)<\mu(B)$,则方程(1)的任一非平凡解 f,都有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$ 且 $\forall\theta\in(\alpha,\beta)$,$\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向.

注 1 从定理 2 容易看出,若 $\sigma(A)<\mu(B)<1/2$,则复平面内从原点出发的任意方向都是方程(1)的非平凡解 f 的 ∞ 级 Borel 方向.

1 预备知识

定理的证明需要用到角域上特征函数的性质[12-13]. 假设 $f(z)$ 是角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的亚纯函数,其中 $0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi$,$k=\pi/(\beta-\alpha)$. 记

$$A_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+|f(te^{i\alpha})|+\log^+|f(te^{i\beta})|\right\}\frac{dt}{t},$$

$$B_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta\log^+|f(re^{i\theta})|\sin k(\theta-\alpha)d\theta,$$

$$C_{\alpha\beta}(r,f)=2\sum_{1<|b_v|<r}\left(\frac{1}{|b_v|^k}-\frac{|b_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_v-\alpha),$$

$$D_{\alpha\beta}(r,f)=A_{\alpha\beta}(r,f)+B_{\alpha\beta}(r,f),$$

$$S_{\alpha\beta}(r,f)=A_{\alpha\beta}(r,f)+B_{\alpha\beta}(r,f)+C_{\alpha\beta}(r,f),$$

其中 $b_v=|b_v|e^{i\beta_v}(v=1,2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的所有极点,重级极点按重数计算.

亚纯函数 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的级和下级分别定义为

$$\sigma_{\alpha\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\log^+S_{\alpha\beta}(r,f)/\log r,$$

$$\mu_{\alpha\beta}(f)=\liminf_{r\to\infty}\log^+S_{\alpha\beta}(r,f)/\log r.$$

还定义了角域上的 Ahlfors-Shimizu 特征函数[14]. 令

$$\Omega(r)=\{z:\alpha<\arg z<\beta,0<|z|<r\}.$$

定义

$$S(r,\Omega,f)=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega(r)}\left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)^2d\sigma,$$

$$T_0(r,\Omega,f)=\int_1^r\frac{S(t,\Omega,f)}{t}dt,$$

并运用 Ahlfors-Shimizu 特征函数定义了 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的级和下级

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+T_0(r,\Omega,f)}{\log r},$$

$$\bar{\mu}_{\alpha\beta}(f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log^+T_0(r,\Omega,f)}{\log r}.$$

然而,这两种不同定义的增长级存在一定的联系,郑建华在文献[15]中证明了不等式:

$$S_{\alpha\beta}(r,f)\leqslant 2k^2\frac{T_0(r,\Omega,f)}{r^k}+k^3\int_1^r\frac{T_0(t,\Omega,f)}{t^{k+1}}dt+O(1),\qquad(2)$$

其中 $\Omega=\Omega(\alpha,\beta)$,$k=\pi/(\beta-\alpha)$. 从上述不等式容易知道,若 $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(f)<\infty$,则 $\sigma_{\alpha\beta}(f)<\infty$.

2　引理

引理1[16]　设 $f(z)$ 是一个在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 内具有有限级 σ 的亚纯函数,令 $\Gamma=\{(n_1,m_1),(n_2,m_2),\cdots,(n_j,m_j)\}$ 表示满足 $n_i>m_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,j)$ 的不同整数对的有限集. 设 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$ 为给定的正常数,则存在只与 f,ε 和 δ 有关的常数 $K>0$,使得

$$\left|f^{(n)}(z)\Big/f^{(m)}(z)\right|<K|z|^{(n-m)(k_\delta+2\sigma+1+\varepsilon)}(\sin k_\delta(\varphi-\alpha-\delta))^{-2(n-m)}$$

成立,其中 $(n,m)\in\Gamma$, $z=re^{i\varphi}\in\Omega(\alpha+\delta,\beta-\delta)$, $z\notin D$, D 为由可数个半径之和为有限的圆盘并构成的一个 R-值集, $k_\delta=\pi/(\beta-\alpha-2\delta)$.

引理2　设 $f(z)$ 是级 $0<\sigma\leqslant\infty$ 的亚纯函数,假定 B: $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0\leqslant 2\pi)$ 为 $f(z)$ 的1条 σ 级 Borel 方向,则在以原点为顶点,以 $\arg z=\theta_0$ 为角平分线的任意小角域 $\Omega(\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)$ 内,存在1列 σ 级充满圆

$$\Gamma_m:\ |z-z_m|<\varepsilon_m|z_m|,\ \arg z_m=\theta_0,$$
$$\lim_{m\to\infty}|z_m|=\infty,\ \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=0(m=1,2,\cdots).$$

使得在每个 Γ_m 内, $f(z)$ 可取任意复数至少 n_m 次,至多可能除去一些复数含于球面半径为 e^{-n_m} 的2个圆内,其中 $n_m\geqslant|z_m|^{\rho_m}$, $\rho_m\to\sigma$.

引理3　设 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内亚纯,则对任意小的 $\varepsilon>0$,在全平面内对任意3个相互判别的复数 $a_v(v=1,2,3)$,当 $r>1$ 时,有

$$T_0(r,\Omega(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon),f)\leqslant 3\sum_{v=1}^{3}\overline{N}(2r,\Omega(\alpha,\beta),f=a_v)+O(\log^2 r).$$

引理4　设 $f(z)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 内解析, $0<\alpha<\beta<2\pi$,则有

$$\log M(r,\Omega,f)\leqslant Kr^k\{S_{\alpha\beta}(2r,f)+1\},$$
$$S_{\alpha\beta}(r,f)\leqslant\frac{2k}{\pi}\int_1^r\log^+\frac{M(r,\Omega,f)}{t^{k+1}}dt+\frac{4}{\pi}\frac{M(r,\Omega,f)}{t^k},$$

其中 $M(r,\Omega,f)=\sup\left\{|f(te^{i\theta})|:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,1\leqslant t\leqslant r\right\}$, $k=\pi/(\beta-\alpha)$, K 为一正常数.

引理5[17]　设 $f(z)$ 是整函数,满足 $0<\mu(f)<1$,则 $\forall\zeta\in(\mu(f),1)$,存在集合 $E\subset[0,\infty)$,满足 $\overline{\log\mathrm{dens}}E\geqslant 1-\mu(f)/\zeta$,其中 $E=\{r\in[0,\infty):m(r)>M(r)\cos\pi\zeta\}$, $m(r)=\inf_{|z|=r}\log|f(z)|$, $M(r)=\sup_{|z|=r}\log|f(z)|$.

3　定理的证明

定理1的证明　设 f 为方程(1)的任一非零解,由方程(1)得

$$|B(z)|\leqslant|f''(z)/f(z)|+|A(z)||f'(z)/f(z)|.\qquad(3)$$

假设 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\rho<\infty$, $\arg z=\theta_0(\theta_0\in(\alpha,\beta))$ 为 B 的1条 λ 级 Borel 方向,由引理1,取 $\delta_0>0$,使得 $\theta_0\in(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)$. 对所有 $z=re^{i\varphi}\in\Omega(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)$ 且 $z=re^{i\varphi}\notin D$,有

$$|f^{(l)}(z)/f(z)|<K|z|^{l(k_{\delta_0}+2\rho+1+\varepsilon)}(\sin k_{\delta_0}(\varphi-\alpha-\delta_0))^{-2l}(l=1,2),\qquad(4)$$

其中 D 为由引理1给出的 R-值集.

因为 $\arg z=\theta_0$ 为 B 的1条 λ 级 Borel 方向,选取适当的 η,使得 $\Omega(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta)\subset\Omega(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)$. 由引理2,存在1组 λ 级 Borel 充满圆: Γ_m: $|z-z_m|<\varepsilon_m|z_m|$,其中 $\arg z_m=\theta_0$, $\lim_{m\to\infty}|z_m|=\infty$, $\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=0$, $\Gamma_m\subset\Omega(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta)$. 由于 B 是整函数, ∞ 为其一个 Picard 例外值,故由充满圆的性质知,在充满圆定义中的2个除外球面小圆中必有1个包含 ∞. 定义 z_1,z_2 的球面距离为 $|z_1,z_2|$,从而当 m 充分大时,存在复数 $a_m\in\Gamma_m$,使得下式成立

$$|B(a_m),\infty|=1/(1+|B(a_m)|^2)^{1/2}=2e^{-n_m}.$$

这样就可以找到与 m 无关的正常数 C,使得对充分大的 m,有

$$|B(a_m)|>Ce^{n_m}\geqslant Ce^{|z_m|^{\rho_m}},\ \rho_m\to\lambda.$$

注意到 $|a_m|=(1+o(1))|z_m|$. 由简单的计算可以证明

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\overline{\Omega}(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta),B)}{\log r}\geqslant\lambda>0.$$

由 Phragmen-Lindelöf 定理,容易知道存在区间 $[\theta_1,\theta_2]\subset(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta)$,使得 $\forall\theta\in[\theta_1,\theta_2]$,有

$$\limsup_{r\to\infty}\log\log|B(re^{i\theta})|/\log r\geqslant\lambda.\qquad(5)$$

因为 D 是由半径之和为有限的可数个圆盘并构成的1个 R-值集,所以满足条件"射线 $\arg z=\theta$ 与 D 中无穷个圆盘相交"的 θ 的测度为0. 故由(4)式,可取 $\theta^*\in[\theta_1,\theta_2]$,使得 $\exists R_0>0$,当 $r>R_0$ 时,有

$$|f^{(l)}(re^{i\theta^*})/f(re^{i\theta^*})|<Kr^{l(k_{\delta_0}+2\rho+1+\varepsilon)}(\sin k_{\delta_0}(\theta^*-\alpha-\delta_0))^{-2l}\leqslant Mr^N,\ l=1,2\qquad(6)$$

成立,其中

$$M = K(\sin k_{\delta_0}(\theta^* - \alpha - \delta_0))^{-4},$$
$$N = 2(k_{\delta_0} + 2\rho + 2).$$

由(5)式,取 $0 < \varepsilon^* < (\lambda - \lambda_0)/2$,其中 $\lambda_0 = \sigma_{\alpha\beta}(A) < \lambda$. 当 n 充分大时,有

$$|B(r_n e^{i\theta^*})| > e^{r_n^{\lambda-\varepsilon^*}} \tag{7}$$

成立.

又因为 $\sigma_{\alpha\beta}(A) < \lambda$,由整函数在角域内的增长级的定义,有

$$|A(r_n e^{i\theta^*})| < \exp\{r_n^{\lambda_0+\varepsilon}\}. \tag{8}$$

取 $z_n = r_n e^{i\theta^*}$,将(6)~(8)式分别代入(3)式,当 $n \to \infty$ 时,便导出矛盾!

所以 $\sigma_{\alpha\beta}(f) = \rho < \infty$ 的假定不成立. 故

$$\sigma_{\alpha\beta}(f) = \infty.$$

由于在上述证明过程中,只用到了 $\Omega(\alpha,\beta)$ 是包含 $\arg z = \theta_0$ 的任意角域,故 $\forall \varepsilon > 0$,当 $\alpha = \theta_0 - \varepsilon, \beta = \theta_0 + \varepsilon$ 时,同样有

$$\sigma_{\alpha\beta}(f) = \sigma_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(f) = \infty. \tag{9}$$

下证 $\arg z = \theta_0$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向. 若不然,由 Borel 方向的定义知,存在适当小的任意 ε_0,$\tau < \infty$ 以及 3 个相互判别的有穷复数 $a_v (v = 1,2,3)$,其中有 1 个 a_v 为 ∞,使得

$$\sum_{v=1}^{3} n(\Omega(\theta_0 - 2\varepsilon_0, \theta_0 + 2\varepsilon_0, r), f = a_v) < r^\tau$$

成立,其中 $\Omega(\theta_0 - 2\varepsilon_0, \theta_0 + 2\varepsilon_0, r) \subset \Omega(\alpha,\beta,r)$.

从而

$$N(r,\Omega(\theta_0 - 2\varepsilon_0,\theta_0 + 2\varepsilon_0), f = a_v) = \int_0^r \frac{n(\Omega(\theta_0 - 2\varepsilon_0,\theta_0 + 2\varepsilon_0,t), f = a_v) - n(0, f = a_v)}{t}\mathrm{d}t + n(0, f = a_v)\log r \leqslant r^{\tau+c_1},$$

其中 c_1 为一正常数.

由引理 3,知

$$T_0(r,\Omega(\theta_0 - \varepsilon_0,\theta_0 + \varepsilon_0), f) \leqslant 3\sum_{v=1}^{3}\overline{N}(2r,\Omega(\theta_0 - 2\varepsilon_0,\theta_0 + 2\varepsilon_0), f = a_v) + O(\log^2 r) \leqslant 3\sum_{v=1}^{3} N(2r,\Omega(\theta_0 - 2\varepsilon_0,\theta_0 + 2\varepsilon_0), f = a_v) + O(\log^2 r) \leqslant r^{\tau+c_2},$$

其中 c_2 为一正常数.

由不等式(2)得

$$S_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(r,f) \leqslant 2k^2\frac{T_0(r,\Omega(\theta_0 - \varepsilon_0,\theta_0 + \varepsilon_0), f)}{r^k} + k^3\int_1^r \frac{T_0(t,\Omega(\theta_0 - \varepsilon_0,\theta_0 + \varepsilon_0), f)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t + O(1),$$

其中 $k = \pi/2\varepsilon_0$,易知,$\exists M' > 0, N' > 0$,使得

$$S_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(r,f) \leqslant M' r^{N'}$$

成立.

再由引理 4,知

$$\log M(r,\Omega(\theta_0 - \varepsilon_0,\theta_0 + \varepsilon_0), f) \leqslant Kr^{\pi/(2\varepsilon_0)}\{S_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(2r,f) + 1\} \leqslant M'' r^{N''}. \tag{10}$$

由(10)式,根据整函数在角域内增长级的定义,容易知道 $\sigma_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(f) < \infty$,这便与(9)式导出矛盾! 所以 $\arg z = \theta_0$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向.

定理 2 的证明 设 f 为方程(1)的任一非零解,若 $\sigma_{\alpha\beta}(f) = \rho < \infty$,下面将导出矛盾.

任取 $\theta \in (\alpha,\beta)$,取 $0 < \eta < \delta_0 = \frac{1}{2}\min\{\theta - \alpha, \beta - \theta\}$,则

$$\Omega(\theta - \eta, \theta + \eta) \subset \Omega(\alpha + \delta_0, \beta - \delta_0) \subset \Omega(\alpha,\beta).$$

对 $f(z)$ 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上应用引理 1 可知

$$|f^{(l)}(z)/f(z)| < K|z|^{l(k_{\delta_0}+2\rho+1+\varepsilon)}(\sin k_{\delta_0}(\varphi - \alpha - \delta_0))^{-2l} \leqslant Mr^N (l = 1,2)$$

对所有的 $z = re^{i\varphi} \in \Omega(\alpha + \delta_0, \beta - \delta_0)$ 且 $z \notin D$ 均成立. 特别地,$\exists M > 0, N > 0$,有

$$\left|\frac{f^{(l)}(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| \leqslant Mr^N (l = 1,2) \tag{11}$$

成立,其中 D 为引理 1 给出的 R-值集.

对 B 应用引理 5,取 $\zeta = (\mu(B) + 1/2)/2$,记 $M(r) = \sup\limits_{|z|=r}\log|B(z)|$,$m(r) = \inf\limits_{|z|=r}\log|B(z)|$ 及 $E = \{r \in [0,\infty): m(r) > M(r)\cos\pi\zeta\}$,则 $\forall \varepsilon > 0$ 及 z,满足当 $|z| = r \in E$ 时,有

$$|B(z)| > \exp\{r^{\mu(B)-\varepsilon}\}.$$

由于 $\overline{\log\mathrm{dens}}E \geqslant 1 - \mu(B)/\zeta = (1/2 - \mu(B))/(\mu(B) + 1/2) > 0$,而 D 是 R-值集. 从而可取 $r_n \in E$,使得 $z_n = r_n e^{i\theta} \notin D$. 当 $n \to \infty$ 时,有

$$|B(z_n)| > \exp\{r_n^{\mu(B)-\varepsilon}\}. \tag{12}$$

令 $\lambda = \sigma_{\alpha\beta}(A) = \limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),A)}{\log r}$,由于 $\lambda < \mu(B)$,对上述的 $\varepsilon > 0$ 和 z_n,当 n 充分大时,有

$$|A(z_n)| < \exp\{r_n^{\lambda+\varepsilon}\}. \tag{13}$$

现取 $\varepsilon < (\mu(B) - \lambda)/2$,将(11)~(13)式代入(3)式便导出矛盾! 所以 $\sigma_{\alpha\beta}(f) = \infty$. 由证明过程进一步可知 $\sigma_{\alpha-\eta,\beta+\eta}(f) = \infty$.

类似定理 1 的证明,容易知道 $\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向.

4 参考文献

[1] Hayman W. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京:科学出版社,1982.

[3] Wu Shengjian. On the location of zeros of solution of $f''+Af=0$ where $A(z)$ is entire [J]. Math Scand,1994,74(2):293-312.

[4] Laine I,Wu Shengjian. Removable sets in the oscillation theroy of complex differential equations [J]. Math Anal Appl,1997,214(1):233-244.

[5] 张广厚. 整函数和亚纯函数理论 [M]. 北京:科学出版社,1986.

[6] Gundersen G G. Finite order solutions of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc,1988,305(1):415-429.

[7] Hellenstein S,Miles J,Rossi J. On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$ [J]. Trans Amer Math Soc,1991,324(2):693-706.

[8] 石磊,易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(3):230-233.

[9] 杨碧珑,易才凤. 一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(5):477-481.

[10] Wu Shengjian. On the growth of solution of second order linear differential equation in an angle [J]. Complex Variables,Theory and Application,1994,24(3/4):241-248.

[11] Valiron G. Recherches sur le theoreme de M. Borel dans la theorie des fonctions meromorphes [J]. Aca Math,1929,52(1):67-92.

[12] Goldberg A A,Ostrovskii I V. The distribution of values of meromorphic functions [M]. Moscow: Izdat Nauk,1970.

[13] Nevannlinna R H. Uber die eigenschaften meromorpher funktionen in einem winkelraum [J]. Acta Soc Sci Fenn,1925,50(12):1-45.

[14] Tsuji M. Potential theory in modern function [M]. Tokyo: Maruzen Co LTD,1959.

[15] Zheng Jianghua. Value distribution of meromorphic functions [M]. Berlin: Springer-Verlag,2010.

[16] Wu Shengjian. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function in an angle and their application [C]. Tianjin: Proceeding of International Conference on Complex Analysis at the Nankai Institute of Mathematics,1992:235-241.

[17] Barry P D. Some theorems related to the $\cos\pi\rho$ theorem [J]. Proc London Math Soc,1970,21(3):334-360.

The Growth and Borel Direction of Solutions for Differential Equation $f''+Af'+Bf=0$ in Angular Domains

YI Cai-feng,LIU Xu-qiang

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The growth and Borel direction of solutions in angular domains for differential equation $f''+Af'+Bf=0$ is investigated where $A(z)$ and $B(z)$ are entire functions,by using the fundamental theory and method of value distribution in angular domain. Under some conditions,it is proved that every solution $f\not\equiv 0$ of the equation is of infinite order in any angular domain which has λ order Borel direction of $B(z)$,and the ∞ order Borel direction of the solution is unanimous with the λ order Borel direction of $B(z)$.

Key words: differential equations; solutions; angular domain; Borel direction; infinite order

(责任编辑:王金莲)