第 37 卷 第 1 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 1
2013 年 1 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jan. 2013

文章编号:1000-5862(2013)01-0009-03

循环群偏序集上的拓扑

罗淑珍[1],曾丽华[2],赖新兴[1]

(1. 江西理工大学理学院,江西 赣州 341000;2. 江西理工大学南昌校区,江西 南昌 330013)

摘要: 利用循环群的特殊代数结构,引入了 Scott 子群拓扑 $\sigma_P(G)$,讨论了循环群偏序集上 3 种不同拓扑之间的关系,即循环群拓扑 $O(G)$、Scott 拓扑 $\sigma(G)$ 和 Scott 子群拓扑 $\sigma_P(G)$,并得出若 $(G,O(G))$ 是 T_0 的紧空间且 sub(G) 分离 G 中的点,则 $C_{O(G)}=\sigma(G)=\sigma_P(G)$.

关键词: 循环群偏序集; 循环群拓扑; Scott 拓扑; Scott 子群拓扑

中图分类号: O 189.1 **文献标志码**: A

0 引言

1971 年 D. Scott 由于理论计算机的语义问题而提出了 Domain 的概念,在人们不断深入研究下,取得了许多深刻且有影响的结果. 随着时间的推移,Domain 理论在其它领域都有一定的应用,特别是与代数中的一些对象相结合[1-3]. 文献[4]在群上构造 Domain,定义了循环群偏序集和循环群拓扑,将数学中的序结构、拓扑结构、代数结构很好地结合在一起,并得出一些较好的结论; 文献[5-6]分别在半群和环上建立了偏序、拓扑和相关的 Domain 结构. 本文进一步讨论循环群偏序集上的拓扑,分别赋予循环群拓扑 $O(G)$、Scott 拓扑 $\sigma(G)$ 和 Scott 子群拓扑 $\sigma_P(G)$,得到如下结论:

(i) 若 G 是强连续群,则 $\sigma(G)=\sigma_P(G)$;

(ii) 若 $(G,O(G))$ 是紧的且 sub(G) 分离 G 中的点,则 $C_{O(G)}\subseteq\sigma(G)$;

(iii) 若 $(G,O(G))$ 是 T_0 空间,则 $C_{O(G)}=\sigma_P(G)$; 因 $\sigma(G)\subseteq\sigma_P(G)$,所以,若 $(G,O(G))$ 是 T_0 的紧空间且 sub(G) 分离 G 中的点,则 $C_{O(G)}=\sigma(G)=\sigma_P(G)$.

众所周知,对于偏序集 P,常用的一种关系"$<<$"称为 way-below 关系,其定义为 $\forall x,y\in P$,$x<<y\Leftrightarrow$ 对定向集 $D\subseteq P$,若 $y\leqslant\vee D$,则 $\exists d\in D$ 使得 $x\leqslant d$.

称偏序集 P 是连续的,若 $\forall x\in P$,$\{y\in P\mid y<<x\}$ 是定向集且 $x=\vee\{y\in P\mid y<<x\}$.

设 P 是偏序集,$U\subseteq P$,称 U 为 Scott 开集,若满足

(i) $U=\uparrow U$;

(ii) 对定向集 D,若 $\vee D\in U$,则 $U\cap D\neq\varnothing$.

称由 Scott 开集构成的拓扑为 Scott 拓扑,记为 $\sigma(P)$.

定义 1 设 G 是群,$\langle A\rangle$ 表示由 G 的子集 A 生成的子群,定义 G 上的关系 $\leqslant_G$: $x\leqslant_G y\Leftrightarrow x=y$ 或 $\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$,其中 $\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$ 表示 $\langle x\rangle$ 是 $\langle y\rangle$ 的真循环子群. 显然,$\leqslant_G$ 是一种偏序关系,称 $\leqslant_G$ 是群 G 上的循环群偏序,群 G 带上这个偏序关系称为 G 的循环群偏序集. 在不引起混淆的情况下,$\leqslant_G$ 简记为 $\leqslant$.

设 G 是群,记 sub$(G)=\{A_i\mid A_i$ 是 G 的子群$\}$,$O(G)=\{\bigcup\limits_{i\in J_i}A_i\mid J_i$ 是指标集,$A_i\in$ sub$(G)\}$,易证 $O(G)$ 是 G 上的拓扑.

定义 2 设 G 是群,称 $O(G)$ 为群 G 的循环群拓扑. 此时,$\beta=\{\langle a\rangle\mid a\in G\}$ 是 $O(G)$ 的 1 个基,记由 $(G,O(G))$ 中所有闭集构成的集合为 $C_{O(G)}$.

引理 1 设 G 是群,$S\subset G$,$\vee S$ 存在当且仅当 $\exists s_0\in S$ 满足 $\forall g\in S$,有 $g\leqslant s_0$,即 $\vee S$ 存在当且仅当 $\vee S\in S$.

本文中未说明的概念和记号请参见文献[7-10].

1 循环群偏序集上的拓扑

下文中未特殊说明的序和拓扑均为群 G 的循环

收稿日期: 2012-08-25

基金项目: 江西省教育厅 2010 年度青年科学基金(GJJ10155)和江西理工大学校级科研基金(jxxj11068,jxxj12065)资助项目.

作者简介: 罗淑珍(1984-),女,江西上饶人,讲师,主要从事格上拓扑学的研究.

群偏序和循环群拓扑.

引理 2 设 G 是群,$x,y\in G$,则 $x\in\overline{\{y\}}\Leftrightarrow y\in\langle x\rangle\Leftrightarrow\langle y\rangle\subseteq\langle x\rangle$,其中 $\overline{\{y\}}$ 表示 y 的闭包.

引理 3 设 G 是群,$x,y\in G$,

(ⅰ) $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}\Leftrightarrow\langle x\rangle=\langle y\rangle$;

(ⅱ) $\uparrow x\subseteq\overline{\{x\}}$;

(ⅲ) 若 G 是 T_0 空间,则 $\uparrow x=\overline{\{x\}}$.

证 (ⅰ) $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}\Leftrightarrow y\in\overline{\{x\}},x\in\overline{\{y\}}\Leftrightarrow\langle y\rangle\subseteq\langle x\rangle,\langle x\rangle\subseteq\langle y\rangle\Leftrightarrow\langle x\rangle=\langle y\rangle$.

(ⅱ) 设 $x\leqslant y$,若 $x=y$,则显然 $y=x\in\overline{\{x\}}$,若 $x<y$,由循环群偏序的定义知,$\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$,从而对任意含有 y 的开集 U,$x\in\langle y\rangle\subseteq U$,所以 $y\in\overline{\{x\}}$,即 $\uparrow x\subseteq\overline{\{x\}}$.

(ⅲ) $\forall y\in\overline{\{x\}}$,有 $\langle x\rangle\subseteq\langle y\rangle$,若 $\langle x\rangle=\langle y\rangle$ 时,由(ⅰ)知 $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$,因 G 是 T_0 的,所以 $x=y$,若 $\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$ 时,则有 $x<y$,故 $\overline{\{x\}}\subset\uparrow x$,又由(ⅱ)知 $\uparrow x=\overline{\{x\}}$.

定理 1 设 G 是群,则 G 中的开集是下集,闭集是上集.

证 设 F 是 G 任一闭集,则 $\forall x\in F$,$\uparrow x\subseteq\overline{\{x\}}\subseteq F$,从而 $\uparrow F=\bigcup_{x\in F}\uparrow x\subseteq F$,所以 $\uparrow F=F$,即 F 是上集,由此可知,G 中的开集是下集.

引理 4 设 G 是群,$P\in\mathrm{sub}(G)$,则 P 是下集;若 $\vee P$ 存在,则 P 还是定向的.

证 设 $P\in\mathrm{sub}(G)$,$y\in\downarrow P$,则 $\exists x\in P$ 使得 $y\leqslant x$,若 $y=x$,显然有 $y=x\in P$,若 $y<x$,由循环群偏序的定义知 $\langle y\rangle\subset\langle x\rangle$. 又 $\langle x\rangle\subseteq P$,则 $y\in\langle y\rangle\subseteq\langle x\rangle\subseteq P$,所以 $P=\downarrow P$;若 $\vee P$ 存在,由引理 1 知 $\vee P\in P$,即 $\vee P$ 是 P 的最大元,故 P 是定向的.

定义 3 定义群 G 上的关系 $\prec$:$x\prec y\Leftrightarrow$ 对子群 P,当 $\vee P$ 存在且 $y\leqslant\vee P$ 时,$\exists p\in P$ 使得 $x\leqslant p$;称 G 为强连续群,若 $\forall x\in G$,$x=\vee\Downarrow x$,其中 $\Downarrow x=\{y\in G\mid y\prec x\}$;

设 $U\subseteq G$,称 U 是 Scott 子群开集,若满足(ⅰ) $U=\uparrow U$;(ⅱ) 对子群 P,当 $\vee P$ 存在且 $\vee P\in U$ 时,$U\cap P\neq\varnothing$. 称由 Scott 子群开集构成的拓扑为 Scott 子群拓扑,记为 $\sigma_P(G)$.

注 1 由引理 4 知 $x\ll y\Rightarrow x\prec y$,又 Scott 子群开集定义中的条件(ⅱ)自然满足,从而 $U\in\sigma_P(G)\Leftrightarrow U=\uparrow U$.

命题 1 设 G 是群,则有

(ⅰ) $\Downarrow x=\{y\in G\mid y\prec x\}\in\mathrm{sub}(G)$;

(ⅱ) G 是强连续群 $\Leftrightarrow G$ 是连续群且 $\prec=\ll$.

证 (ⅰ) 显然 $\Downarrow x=\cap\{P\in\mathrm{sub}(G)\mid x\leqslant\vee P\}$,且子群的任意交仍为子群,故 $\Downarrow x$ 是 G 子群.

(ⅱ) 必要性 显然成立.

充分性 若 G 是强连续群,只需证 $x\prec y$ 可推出 $x\ll y$. 设 $x\prec y$,若 $y\leqslant\vee D$,其中 D 是定向集,则 $y\leqslant\vee(\bigvee_{d\in D}\Downarrow d)=\vee(\bigcup_{d\in D}\Downarrow d)$,此时 $\bigcup_{d\in D}\Downarrow d$ 是 G 的子群. 事实上,$\forall x,y\in\bigcup_{d\in D}\Downarrow d$,$\exists d_1,d_2\in D$ 使得 $x\in\Downarrow d_1$,$y\in\Downarrow d_2$,因 D 定向,则 $\exists d_0\in D$ 使得 $d_1,d_2\leqslant d_0$,从而 $x,y\in\Downarrow d_0\Rightarrow xy\in\Downarrow d_0\subseteq\bigcup_{d\in D}\Downarrow d$,故 $\bigcup_{d\in D}\Downarrow d$ 是 G 的子群,由 $x\prec y$ 和 $y\leqslant\vee(\bigvee_{d\in D}\Downarrow d)=\vee(\bigcup_{d\in D}\Downarrow d)$ 知,$\exists d\in D$ 使得 $x\in\Downarrow d$,由 G 是强连续群知 $x\leqslant d$,所以 $x\prec y$ 可推出 $x\ll y$,从而 $\prec=\ll$,所以群 G 是连续的且 $\prec=\ll$.

定理 2 若 G 是强连续群,则 $\sigma(G)=\sigma_P(G)$.

证 显然 $\sigma(G)\subseteq\sigma_P(G)$,只需证 $\sigma_P(G)\subseteq\sigma(G)$. $\forall U\in\sigma_P(G)$,$\forall x\in U$,由 G 是强连续群知 $x=\vee\Downarrow x\in U$,且 $\Downarrow x$ 是 G 的子群,从而 $\exists u\in U$ 使得 $u\prec x$,所以,$x\in\Uparrow u$,其中 $\Uparrow u=\{y\in G\mid u\prec y\}$. 因 G 是强连续群,由命题 1(ⅱ) 知 $\Uparrow u\subseteq\uparrow u\subseteq U$ 且 $\Uparrow u\in\sigma(G)$,故 $U\in\sigma(G)$,所以 $\sigma(G)=\sigma_P(G)$.

定义 4 设 G 是群,E 是 G 的子集族,称 E 分离 G 中的点,若 $\forall a,b\in G$,$a\nleqslant b$,则 $\exists A\in E$ 使得 $\langle a\rangle\subseteq A$,$\langle b\rangle\subseteq G/A$.

定理 3 设 G 是群,若 $\mathrm{sub}(G)$ 分离 G 中的点,则 $\forall a\in G$,$G/\langle a\rangle\in\sigma(G)$;进而若 $(G,O(G))$ 还是紧的,则 $C_{O(G)}\subseteq\sigma(G)$.

证 令 $B=G/\langle a\rangle$,则 B 是循环群拓扑 $O(G)$ 的闭集,从而是上集,即 $B=\uparrow B$.

对于定向集 D,若 $\vee D\in B=G/\langle a\rangle$,即 $\vee D\notin\langle a\rangle$,则 $\vee D\nleqslant a$,从而 $\exists d\in D$ 使得 $d\nleqslant a$,由条件存在子群 $P\in\mathrm{sub}(G)$,使得 $\langle d\rangle\subseteq P$,$\langle a\rangle\subseteq G/P$,所以 $d\in P\subseteq G/\langle a\rangle=B$,故 $D\cap B\neq\varnothing$,所以 $G/\langle a\rangle\in\sigma(G)$. $\forall F\in C_{O(G)}$,令 $U=G/F\in O(G)$,若 G 是紧的,则 $\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in U$,使得 $U=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i\rangle$,从而 $F=\bigcap_{i=1}^{n}G/\langle a_i\rangle\in\sigma(G)$,所以 $C_{O(G)}\subseteq\sigma(G)$.

定理 4 若 $(G,O(G))$ 是 T_0 空间,则 $C_{O(G)}=\sigma_P(G)$.

证 由定理 1 知 $C_{O(G)}\subseteq\sigma_P(G)$. 设 $F\in\sigma_P(G)$,则 $F=\uparrow F$,若 $F\notin C_{O(G)}$,则 $\exists g\in\overline{F}$ 且 $g\notin F$,从而 $\langle g\rangle\cap F\neq\varnothing$,即 $\exists x\in\langle g\rangle\cap F$,所以有 $\langle x\rangle\subseteq\langle g\rangle$,$x\in F$;又 $g\notin F=\uparrow F$,则有 $\langle x\rangle=\langle g\rangle$,

否则，若 $\langle x\rangle \subset \langle g\rangle$，即 $x < g$，由 $x \in F$ 可知 $g \in \uparrow F = F$，矛盾. 由 $\langle x\rangle = \langle g\rangle$ 及引理 3(ⅰ) 知，$\overline{\{x\}} = \overline{\{g\}}$，因 $(G,O(G))$ 是 T_0 空间知 $x = g$，矛盾，所以 $F \in C_{O(G)}$，故 $C_{O(G)} = \sigma_P(G)$.

由定理 3 和定理 4 可得如下推论.

推论 1 设 G 是群，若 $(G,O(G))$ 是 T_0 的紧空间且 $\mathrm{sub}(G)$ 分离 G 中的点，则 $C_{O(G)} = \sigma(G) = \sigma_P(G)$.

2 参考文献

[1] Blanck J. Domain representations of topological spaces [J]. Theoretical Computer Science，2000，247(1/2)：229-255.

[2] 刑志勇. 拓扑空间上的一个群拓扑收敛性问题 [J]. 江汉大学学报：自然科学版，2011，39(4)：5-6.

[3] 李娇，徐晓泉. 相容连续 Domain 的序同态扩张 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2011，35(4)：373-378.

[4] 黄梦娇，李庆国. 群的一个 Domain 结构 [J]. 模糊系统与数学，2008，22(1)：18-25.

[5] 周纯阳，徐罗山. 半群上的拓扑、偏序和相关 Domain [J]. 模糊系统与数学，2010，24(4)：89-95.

[6] 罗淑珍，赖新兴，偶世坤. 环上的拓扑与偏序 [J]. 模糊系统与数学，2012，26(4)：149-154.

[7] Gierz G，Hofmann K，Keimel K，et al. Continuous lattices and Domains [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2003.

[8] 熊金城. 点集拓扑学 [M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[9] 朱平天，李伯，邹园. 近似代数 [M]. 北京：科学出版社，2003.

[10] Zhao Dongsheng. Semicontinuous lattices [J]. Algebra Univeras，1997，37(4)：458-476.

The Topologies on Cyclic Posets of Groups

LUO Shu-zhen[1]，ZENG Li-hua[2]，LAI Xin-xing[1]

(1. Faculty of Science，Jiangxi University of Science and Technology，Ganzhou Jiangxi 341000，China；
2. Nanchang Campus，Jiangxi University of Science and Technology，Nanchang Jiangxi 330013，China)

Abstract: Based on the special structures of cyclic groups，the scott-subgroup topology $\sigma_P(G)$ is introduced，and the relationshipes between the three differences topologies on cyclic groups are discussed，that is the cyclic topology $O(G)$，the scott topology $\sigma(G)$，the scott-subgroup topology $\sigma_P(G)$. It is proved that if $(G,O(G))$ is T_0，compace space and sub (G) separate the points of groups G，then $C_{O(G)} = \sigma(G) = \sigma_P(G)$.

Key words: cyclic posets of group；cyclic topology；Scott topology；Scott-subgroup topology

(责任编辑：曾剑锋)