第 37 卷 第 1 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 1
2013 年 1 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jan. 2013

文章编号:1000-5862(2013)01-0012-04

负相依索赔下更新风险模型的精细大偏差

肖鸿民,马秀芬,崔艳君,王 英

(西北师范大学数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘要:研究了基于客户到来的更新风险模型,该风险模型中假设索赔额序列是负相依不同分布的重尾随机变量序列,则在索赔额服从 $D\cap L$ 族的条件下,得到了损失过程的精细大偏差.

关键词:负相依;更新过程;$D\cap L$ 族;精细大偏差

中图分类号:O 211.4 **文献标志码**:A

0 引言

自从 C. C. Heyde 等[1] 研究建立大偏差理论以来,国内外许多学者对大偏差的研究产生了浓厚的兴趣. 文献[2]在 $R_{-\alpha}$ 族给出了精细大偏差的结果. 文献[3]首先将大偏差结果推广到了 ERV 族,然后文献[4]推广到了随机和的结果. 更一般化的随机和的精细大偏差结果可以参见文献[5-7]. 相依条件下的部分和及随机和大偏差也取得了一些进展[8].

在现实生活中,索赔之间存在着某种相依关系,特别是呈现负相依关系的比较常见. 于是,本文将文献[9]的研究对象进行了两方面的推广:取消索赔额独立的条件和扩大了分布族的范围. 为了将实际赔付额精确地表达出来,将文献[9]的模型进行了改进:

(i) 客户的到达过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$为更新计数过程,第 k 个客户购买保单的时间为 σ_k. 显然,$N(t)=\max\{k;\sigma_k\leqslant t\}$是时间 t 之前售出的保单数;

(ii) 假设第 k 个客户在时刻 σ_k 购买了 1 份保单,则保险公司在该时期内承担了该保单的风险. 设第 k 个客户的潜在索赔额为 B_k,均值为 μ_k,随机变量 $I_k(k\geqslant 1)$ 表示第 k 个保单是否真正发生索赔($I_k=1$ 表示发生索赔). 第 k 张保单的价格为$(1+\delta)\mu_k$,其中常数 δ 可解释为安全负载系数,则保险公司对第 k 份保单的净索赔额为 $B_kI_k-(1+\delta)\mu_k$.

从而时刻 t 之前保险公司的损失过程为

$$S(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}B_kI_k-\sum_{k=1}^{N(t)}(1+\delta)\mu_k,t\geqslant 0. \quad (1)$$

显然,文献[10]是在$\{N(t)\}$为复合二项过程、索赔额相互独立且共同分布 $F\in$ ERV 的条件下,讨论了损失过程的精细大偏差及相应的破产概率. 文献[11]是在索赔额为负相依随机变量且共同分布 F 服从 C 族条件下得到了大偏差的部分和及随机和的结果.

$\{B_k,k\geqslant 1\}$为负相依且具有不同分布的随机变量序列,其分布分别为$F_k(x)=P(B_k\leqslant x)$,满足$\overline{F}_k(x)=1-F_k(x)$和$F(x)$. 随机变量$\{I_k,k\geqslant 1\}$为负相依的,具有共同的期望 $q\in(0,1]$,$\{N(t)\}$为更新过程,$EN(t)=\lambda(t)<\infty$. 假设$\{B_k,k\geqslant 1\}$,$\{N(t)\}$,$\{I_k,k\geqslant 1\}$相互独立. 记索赔额的部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}B_kI_k-\sum_{k=1}^{n}(1+\delta)\mu_k$.

定义 1 称分布 $F(x)$ 属于 L 族,如果对任意固定的 y(或等价地 $y=1$),F 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}=1.$$

称分布 $F(x)$ 属于 D 族,如果对任意固定的 $0<y<1$(或等价地 $y=1/2$),F 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty.$$

定义 2 如果对所有 $n=1,2,\cdots$ 和 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n$,满足

(i) $P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n)\leqslant\prod_{k=1}^{n}P(X_k\leqslant x_k)$,则称随机变量序列$\{X_k\}(k=1,2,\cdots)$下负相依;

(ii) $P(X_1\geqslant x_1,\cdots,X_n\geqslant x_n)\leqslant\prod_{k=1}^{n}P(X_k\geqslant x_k)$,则称随机变量序列$\{X_k\}(k=1,2,\cdots)$上负相依.

收稿日期:2012-11-20

基金项目:国家自然科学基金(71171103)和甘肃省教育厅科研(1001-10)资助项目.

作者简介:肖鸿民(1967-),女,甘肃临洮人,教授,博士,主要从事概率极限理论与保险数学的研究.

如果上述2个条件均成立,则称随机变量序列$\{X_k\}(k=1,2,\cdots)$是负相依的.

定义3　设X是随机变量序列,具有分布函数$F(x)$,$\forall y>0$,

$$\overline{F}_*(y)=\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)},$$

$$J_F^*=\inf\left\{-\frac{\log\overline{F}_*(y)}{\log(y)}:y>1\right\}=-\lim_{y\to\infty}\frac{\log\overline{F}_*(y)}{\log(y)},$$

称L_F^+为分布函数$F(x)$ Matuszewska指标数.

1　主要结果与相关引理

首先给出本文用到的一些记号:

$$X_k=B_kI_k,Y_k=\sum_{k=1}^{n}B_kI_k,$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}B_kI_k-\sum_{k=1}^{n}(1+\delta)\mu_k,$$

X_k的分布为$qF_k(x)$.

下面给出本文的假设条件:

(K_1) $\exists T>0$,对$x\geqslant T$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k(x)}{\overline{F}(x)}=1$$

一致成立.

(K_2) 存在1个正函数$\varepsilon(t)$,当$t\to\infty$时,

$$\varepsilon(t)\to\infty,$$

$$P(|N(t)-\lambda(t)|>\varepsilon(t)\lambda(t))=o(1).$$

定理1　对于模型(1),在假设(K_1)下,若$F_k\in D\cap L,k\geqslant 1$,则对于任意给定的常数$\gamma$,当$x\geqslant\gamma n$时,一致地有

$$P(S_n-ES_n>x)=P(Y_n-EY_n>x)\sim qn\overline{F}(x).\qquad(2)$$

定理2　对于模型(1),在假设(K_1)和(K_2)下,如果$F_k\in D\cap L(k\geqslant 1)$,对$x\geqslant\gamma\lambda(t)$,其中$\gamma$是任意常数,则有

$$P(S(t)-ES(t)>x)\sim\lambda(t)q\overline{F}(x).$$

需要如下一些引理来证明定理1和定理2.

引理1[12]　如果$F\in D$,那么

(i) $\forall\rho>J_F^*$,存在正数x_0和B_0,使得对所有的$\theta\in(0,1]$及$x\geqslant\theta^{-1}x_0$,有$\overline{F}(\theta x)/\overline{F}(x)\leqslant B_0\theta^{-\rho}$;

(ii) $\forall\gamma>J_F^*$,有$x^{-\gamma}=o(\overline{F}(x))$.

引理2　假设对某些$p\geqslant 1$,有$E(X_i)^p<\infty$,$i\geqslant 1$,$E(X)^p<\infty$.如果假设(K_1)成立,则存在一些有限常量$\hat{\mu}_p$.对所有$n\geqslant 1$有$\sum_{i=1}^{n}E(X_i)^p\leqslant n\hat{\mu}_p$.

引理3[13]　对于随机变量序列$\{X_k:k\geqslant 1\}$和实函数$\{f_k(\cdot):k\geqslant 1\}$,有

(i) 若$\{X_k:k\geqslant 1\}$是负相依随机变量序列,并且$\{f_k(\cdot):k\geqslant 1\}$为单调的,则$\{f_k(X_k):k\geqslant 1\}$仍为负相依随机变量序列;

(ii) 若$\{X_k:k\geqslant 1\}$是非负的负相依随机变量序列,则$\forall k\geqslant 1$,有$E(\prod_{k=1}^{n}X_k)\leqslant\prod_{k=1}^{n}EX_k$.

引理4　设$\{B_k:k\geqslant 1\}$为负相依随机变量序列,分布为F_k,$\{I_k:k\geqslant 1\}$为另一随机变量序列,且与$\{B_k:k\geqslant 1\}$相互独立,则$\{B_kI_k:k\geqslant 1\}$也为负相依的.

类似于文献[14]的方法可以证明引理4.

引理5　设$\{B_k:k\geqslant 1\}$为负相依不同分布随机变量序列,其分布为F_k,均值$\mu_k=EB_k<\infty$;$\{I_k:k\geqslant 1\}$是负相依随机变量序列,那么$\forall v>0,x>0$和$n\geqslant 1$,有

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}B_kI_k>x,\bigcap_{i=1}^{n}\{B_iI_i\leqslant x/v\}\Big)\leqslant(\mathrm{e}n\hat{\mu}_1q/x)^v,\qquad(3)$$

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}B_kI_k>x\Big)\leqslant nq\overline{F}(x/v)+(\mathrm{e}n\hat{\mu}_1q/x)^v.\qquad(4)$$

证　令$X_k=B_kI_k$,其分布函数为$qF_k(x)$,$\forall x>0,v>0$,记$\widetilde{X}_k=X_kI_{\{X_k\leqslant x/v\}}+(x/v)I_{\{X_k>x/v\}}(k\geqslant 1)$,$\widetilde{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k(n\geqslant 1)$,则$\{\widetilde{X}_k\}$仍为负相依随机变量序列.

$$\forall h>0,P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k>x,\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leqslant x/v)\Big)\leqslant P(\widetilde{S}_n>x)\leqslant\mathrm{e}^{-hx}E(\mathrm{e}^{h\widetilde{S}_n})\leqslant\mathrm{e}^{-hx}\prod_{i=1}^{n}E(\mathrm{e}^{h\widetilde{X}_i}),$$

其中最后不等式由引理3得到.

当$y>0$时,函数$(\mathrm{e}^{hy}-1)/y$单调递增,且当$u>0$时,有$1+u\leqslant\mathrm{e}^u$,从而

$$\prod_{i=1}^{n}E(\mathrm{e}^{h\widetilde{X}_i})\leqslant\prod_{i=1}^{n}\Big(1+\int_0^{x/v}(\mathrm{e}^{hy}-1)\,\mathrm{d}qF_i(y)+\int_{x/v}^{\infty}(\mathrm{e}^{hx/v}-1)\,\mathrm{d}qF_i(y)\Big)\leqslant\prod_{i=1}^{n}\big(1+(\mathrm{e}^{hx/v}-1)vq\mu_i/x+(\mathrm{e}^{hx/v}-1)q\overline{F}_i(x/v)\big)\leqslant\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{hx/v}-1)vq\mu_i/x+\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{hx/v}-1)q\overline{F}_i(x/v)\Big\}\leqslant\exp\{(\mathrm{e}^{hx/v}-1)vqn\hat{\mu}_1/x+(\mathrm{e}^{hx/v}-1)qn\overline{F}(x/v)\}\leqslant\exp\{(\mathrm{e}^{hx/v}-1)vqn\hat{\mu}_1/x\},$$

其中倒数第2个不等式由假设(K_1)以及引理2得到.

令$h=h(x)=(x/v)\ln[x/(qn\hat{\mu}_1)+1]>0$,有

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}B_kI_k>x,\bigcap_{i=1}^{n}\{B_iI_i\leqslant x/v\}\Big)\leqslant\exp\{v-v\ln[1+x/(qn\hat{\mu}_1)]\}\leqslant(\mathrm{e}n\hat{\mu}_1q/x)^v.$$

下证(4)式成立.

$\forall v>0, x>0, n\geqslant 1$ 及 $h>0$,由(3)式及假设(K_1)知

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > x\right) \leqslant P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i > x/v\}\right) + P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > x, \bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant x/v\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\overline{F}(x/v) + P\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i > x\right) \leqslant nq\overline{F}(x/v) + \mathrm{e}^{-hx}\prod_{i=1}^{n}E(\mathrm{e}^{h\tilde{X}_i}) \leqslant nq\overline{F}(x/v) + (\mathrm{e}n\hat{\mu}_1 q/x)^{v}.$$

2 主要结果的证明

定理1的证明 首先证明

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant\gamma n}\frac{P(Y_n - EY_n > x)}{n\overline{F}(x)} \geqslant q.$$

对固定的 $v>1$,有

$$P(Y_n - EY_n > x) \geqslant P(Y_n - EY_n > x, \max_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k - EX_k) > x) \geqslant \sum_{k=1}^{n}P(Y_n - EY_n > x, X_k - EX_k > x) - \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}P(Y_n - EY_n > x, X_k - EX_k > x, X_l - EX_l > x) \geqslant \sum_{k=1}^{n}P(X_k - EX_k > x) - \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}P(X_k - EX_k > x, X_l - EX_l > x) := J_1 - J_2. \quad (5)$$

首先,处理 J_1,由假设(K_1)知

$$J_1 = \sum_{k=1}^{n} q\overline{F}_k(x) \sim nq\overline{F}(x). \quad (6)$$

对于 J_2,有

$$J_2 \leqslant \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}P(X_k - EX_k > x)P(X_l - EX_l > x) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} q\overline{F}_k(x)\right)^2 \leqslant \left(nq\overline{F}(x)\right)^2, \quad (7)$$

因此由(5)~(7)式可知

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant\gamma n}\frac{P(Y_n - EY_n > x)}{n\overline{F}(x)} \geqslant \liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant\gamma n}\frac{nq\overline{F}(x)}{n\overline{F}(x)} - \liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant\gamma n}nq^2\overline{F}(x) \geqslant q.$$

其次,估计(2)式的上界,$\forall a(x)>0$,

$$P(Y_n - EY_n > x) \leqslant P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}X_k > x - a(x)) + P(Y_n - EY_n > x, \max_{1\leqslant l\leqslant n}X_l \leqslant x/v) + P(Y_n - EY_n > x, \max_{1\leqslant k\leqslant n}X_k \leqslant x - a(x), \max_{1\leqslant l\leqslant n}X_l > x/v) \leqslant \sum_{k=1}^{n}P(X_k > x - a(x)) + \sum_{l=1}^{n}P(Y_n - EY_n > x, X_l > x/v) + P(Y_n > x, \bigcap_{l=1}^{n}X_l \leqslant x/v) := M_1 + M_2 + M_3. \quad (8)$$

再次,利用 L 族的定义以及假设(K_1),则有

$$M_1 = \sum_{k=1}^{n} q\overline{F}_k(x - a(x)) \leqslant nq\overline{F}(x), \quad (9)$$

由$\{X_k; k\geqslant 1\}$的负相依性以及 $F\in D$ 知

$$\frac{M_2}{n\overline{F}(x)} \leqslant \frac{n\overline{F}\left(\frac{x}{v}\right)}{n\overline{F}(x)}P(Y_n - X_k > a(x)) \to 0, x\to\infty, \quad (10)$$

由引理5以及引理2知

$$M_3 \leqslant (\mathrm{e}n\hat{\mu}_1 q/x)^{v} = o(nq\overline{F}(x)). \quad (11)$$

由(8)~(11)式得

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma n}\frac{P(Y_n - EY_n > x)}{n\overline{F}(x)} \leqslant q.$$

故定理1得证.

定理2的证明 注意到

$$P(S(t) - ES(t) > x) = \sum_{n=1}^{\infty}P(N(t) = n)P(S_n - ES(t) > x) = \left(\sum_{n<(1-\varepsilon(t))\lambda(t)} + \sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)} + \sum_{n>(1+\varepsilon(t))\lambda(t)}\right)P(N(t) = n)P(S_n - ES(t) > x) := L_1 + L_2 + L_3.$$

首先,处理 L_1,利用假设(K_1)和(K_2)、L 族的定义以及定理1得

$$L_1 \leqslant \sum_{n<(1-\varepsilon(t))\lambda(t)}P(N(t) = n)P(S_n - ES(t) > x) \leqslant \sum_{n<(1-\varepsilon(t))\lambda(t)}P(N(t) = n)P(S_n - ES_n > x - ES_n) \leqslant \sum_{n<(1-\varepsilon(t))\lambda(t)}nq\overline{F}(x)P(N(t) = n) \leqslant \lambda(t)q\overline{F}(x)\cdot P(N(t) < (1 - \varepsilon(t))\lambda(t)) = o(\lambda(t)q\overline{F}(x)).$$

再考虑 L_2,再次利用定理1和 L 族定义得

$$L_2 = \sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)}P(N(t) = n)P(S_n - ES_n > x - ES_n + ES(t)) = \sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)}P(N(t) = n)\cdot P(S_n - ES_n > x - (n - \lambda(t))(q\hat{\mu}_1 - (1+\delta)\hat{\mu}_1)) = \sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)}nq\overline{F}(x - (n - \lambda(t))(q\hat{\mu}_1 - (1+\delta)\hat{\mu}_1))P(N(t) = n) \sim \lambda(t)q\overline{F}(x)P(|N(t) - \lambda(t)| \leqslant \varepsilon(t)\lambda(t)) \sim \lambda(t)q\overline{F}(x).$$

最后估计 L_3,由引理1和引理4有

$$L_3 \leqslant \sum_{n>(1+\varepsilon(t))\lambda(t)}P(N(t) = n)P(S_n > x) \leqslant \sum_{n>(1+\varepsilon(t))\lambda(t)}P(N(t) = n)(nq\overline{F}(x/v) + (\mathrm{e}n\hat{\mu}_1 q/x)^{v}) \sim \sum_{n>(1+\varepsilon(t))\lambda(t)}P(N(t) = n)(nq\overline{F}(x/v) + o(\overline{F}(x))) \leqslant P(N(t) > \lambda(t)(1 + \varepsilon(t))\lambda(t)q\overline{F}(x/v) = o(\lambda(t)q\overline{F}(x)).$$

定理 2 得证.

3 参考文献

[1] Heyde C C. On large deviation problems for sums of random variables which are not attracted to the normal law [J]. Ann Math Statist, 1967, 38(5): 1575-1578.

[2] Heyde C C. A contribution to the theory of large deviations for sums of independent random variables [J]. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 1967, 7(5): 303-308.

[3] Cline D B H, Hsing T. Large deviation probabilities for sums and maxima of random variables with heavy or subexponential tails [D]. Corpus Christi: Texas A and M University, 1991.

[4] Klüppelberg C, Mikosch T. Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance [J]. J Appl Prob, 1997, 34(2): 293-308.

[5] Su Chun, Tang Qihe, Jiang Tao. A contribution to large deviations for heavy-tailed random sums [J]. Science in China: A, 2001, 44(4): 438-444.

[6] 黄丽, 明瑞星, 周少南. 随机和的局部精细大偏差 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(1): 30-36.

[7] 明瑞星, 黄丽, 周少南. 随机和局部精细大编差的应用 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(5): 471-477.

[8] Liu Li. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails [J]. Stat Prob Lett, 2009, 79(9): 1290-1298.

[9] Ng K W, Tang Qihe, Yan Jia'an, et al. Precise large deviations for the prospective-loss process [J]. J Appl Probab, 2003, 40(2): 391-400.

[10] 马学敏, 胡亦均. 复合二项过程风险模型的精细大偏差及有限时间破产概率 [J]. 数学学报, 2008, 51(6): 1119-1130.

[11] 肖鸿民, 马慧娟. 负相依重尾索赔条件下损失过程的精细大偏差 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2011, 47(3): 101-107.

[12] Block H W, Savits T H, Shaked M. Some concepts of negative dependence [J]. Ann Probab, 1982, 10(3): 765-772.

[13] Tang Qihe. Insensitivity to negative dependence of the asymptotic behavior of precise large deviations [J]. Electron Prob, 2006, 11(4): 107-120.

[14] 肖鸿民, 刘建霞. 带负相依重尾潜在索赔额的风险模型的有限时间破产概率 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2011, 46(9): 117-121

The Precise Large Deviations for a Renewal Risk Model with Negatively Dependent Claims

XIAO Hong-min, MA Xiu-fen, CUI Yan-jun, WANG Ying

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu 730070, China)

Abstract: A renewal process risk model based on the customer was proposed. In this model, customers' claims are described as negatively dependent heavy-tailed random variables with non-identical distribution. Under the assumption that the claims belong to class $D \cap L$, the precise large deviations of the loss process is obtained.

Key words: negatively dependence; renewal process; class $D \cap L$; precise large deviations

(责任编辑: 曾剑锋)