第 37 卷 第 1 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 37 No. 1
2013 年 1 月　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　Jan. 2013

文章编号:1000-5862(2013)01-0020-03

复合瑞利分布模型参数的 Bayes 可靠性分析

王　琪[1],兰海英[2],徐　刚[3]

(1. 电子科技大学中山学院,广东 中山 528402;2. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330027;
3. 南昌大学理学院,江西 南昌 330031)

摘要: 在完全样本下导出了两参数复合瑞利分布参数的最大似然估计,利用构造枢轴量得到了形状参数和尺度参数的逆矩估计,通过 Monte Carlo 数值算例给出了相应的估计方法的应用.

关键词: 最大似然估计;逆矩估计;次序统计量

中图分类号: O 212.8　　**文献标志码:** A

0　引言

复合瑞利分布作为可靠性寿命试验、临床医学以及生存分析等领域中的一个重要分布,近年来,关于其应用和统计推断研究吸引了很多学者的关注. 基于复合瑞利分布,文献[1]在研究临床试验中癌症病人的生存时间时利用该分布进行研究并取得较好的拟合效果;文献[2]讨论了该分布的样本预测问题;文献[3]讨论了逐步递增的I型截尾寿命试验下该分布参数的最大似然估计以及 Bayes 估计问题. 分布参数的逆矩估计方法首先由文献[4]提出,并给出了两参数 Weibull 分布参数的逆矩估计量;文献[5-7]利用逆矩估计法分别给出了逐次定数截尾样本下的 Weibull 分布、Burr Type XII 分布以及 Pareto 分布参数的逆矩估计;文献[8]研究了 Weibull 分布步进应力加速寿命试验损伤失效率模型参数的近似极大似然估计和逆矩估计问题;文献[9]讨论了1个两参数有浴盆形状失效率的寿命分布基于定数截尾样本的参数逆矩估计和置信区间估计问题. 本文将在完全样本情形下研究两参数复合瑞利分布[10]参数的最大似然估计以及逆矩估计问题.

设随机变量 X 服从两参数复合瑞利分布 $CRD(\alpha,\beta)$,相应的概率密度函数和分布函数分别为

$$f(x;\alpha,\beta) = 2\alpha\beta^{\alpha}x(\beta+x^2)^{-(\alpha+1)},\quad x>0,\alpha,\beta>0 \tag{1}$$

和

$$F(x;\alpha,\beta) = 1-\beta^{\alpha}(\beta+x^2)^{-\alpha},\quad x>0,\alpha,\beta>0,$$

其中 α 为尺度参数,β 为形状参数.

1　估计

1.1　最大似然估计

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自两参数 $CRD(\alpha,\beta)$ 分布(1)的容量为 n 的1个样本,其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的样本观测值. 给定$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$下参数 α 和 β 的似然函数为

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} 2\alpha\beta^{\alpha}x_i(\beta+x_i^2)^{-(\alpha+1)} = 2^n\alpha^n\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\prod_{i=1}^{n}(\beta+x_i^2)^{-(\alpha+1)},$$

对数似然函数为

$$L \cong \ln L(\alpha,\beta) = n\ln 2+n\ln\alpha+n\alpha\ln\beta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\beta+x_i^2),$$

从而似然方程为

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha}+n\ln\beta-\sum_{i=1}^{n}\ln(\beta+x_i^2) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta} = \frac{n\alpha}{\beta}-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}(\beta+x_i^2)^{-1} = 0.$$

由于此方程组没有解析解,故只能采用数值方法(如 Newton Raphson 等迭代算法)求解.

1.2　逆矩估计

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自两参数 $CRD(\alpha,\beta)$ 分布

收稿日期:2012-11-20

基金项目:国家自然科学基金(61175127)资助项目.

作者简介:王　琪(1965-),男,湖北黄冈人,讲师,硕士,主要从事 Bayes 统计分析的研究.

(1) 的容量为 n 的 1 个样本,$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ 为相应的次序统计量. 进一步地,令

$$Y_{(i)} = \alpha\ln(1 + X_{(i)}^2/\beta),i = 1,2,\cdots,n,$$

则易证 $Y_{(1)} \leqslant Y_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant Y_{(n)}$ 为来自标准指数分布 $Exp(1)$ 的次序统计量.

若令

$$\begin{cases} Z_1 = nY_{(1)}, \\ Z_2 = (n-1)(Y_{(2)} - Y_{(1)}), \\ Z_3 = (n-2)(Y_{(n-3)} - Y_{(n-2)}), \\ \cdots \\ Z_n = Y_{(n)} - Y_{(n-1)}, \end{cases}$$

则由文献[1]知,$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 独立同服从标准指数分布.

引理 1　设 $Z_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 独立同分布且服从标准指数分布,令 $S_i = \sum_{j=1}^{i} Z_i,i = 1,2,\cdots,n$,则

(ⅰ) $U_i = (S_i/S_{i+1})^i (i = 1,2,\cdots,n-1)$,$U_n = S_n$ 相互独立,$U_i(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 服从(0,1) 区间上的均匀分布,U_n 服从伽玛分布 $\Gamma(n,1)$;

(ⅱ) 令 $W(\beta) = \sum_{i=1}^{n-1}(-2\ln U_i) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i\ln\frac{S_{i+1}}{S_i}$,有 $W(\beta) \sim \chi^2(2n-2)$.

引理 2　设 $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ 为来自 $CRD(\alpha,\beta)$ 分布的 1 组次序统计量,且

$$W(\beta) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i\ln\frac{S_{i+1}}{S_i} = 2\sum_{i=1}^{n-1} i\ln\left(1 + \frac{P(\beta)}{Q(\beta)}\right),$$

其中 $P(\beta) = (n-i)\dfrac{\ln(1 + X_{(i+1)}^2/\beta)}{\ln(1 + X_{(i)}^2/\beta)} - (n-i)$,

$Q(\beta) = \sum_{j=1}^{i}\dfrac{\ln(1 + X_{(j)}^2/\beta)}{\ln(1 + X_{(i)}^2/\beta)} + (n+i)$,则有

(ⅰ) 对于任何正数 β,$W(\beta)$ 关于 β 是严格单调递增的;

(ⅱ) 当

$$0 < t < 2\sum_{i=1}^{n-1} i\ln\frac{\sum_{j=1}^{i+1} X_{(j)}^2 + (n-i-1)X_{(i+1)}^2}{\sum_{j=1}^{i} X_{(j)}^2 + (n-i)X_{(i)}^2}$$

时,$W(\beta) = t$ 关于 β 有唯一解.

证　令 $g(\beta) = \dfrac{\ln(1 + X_{(j)}^2/\beta)}{\ln(1 + X_{(i)}^2/\beta)}$,有

$$\frac{\mathrm{d}\ln g(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \frac{1}{\ln(1 + X_{(j)}^2/\beta)}\frac{1}{1 + X_{(j)}^2/\beta}\left(-\frac{X_{(j)}^2}{\beta^2}\right) - \frac{1}{\ln(1 + X_{(i)}^2/\beta)}\frac{1}{1 + X_{(i)}^2/\beta}\left(-\frac{X_{(i)}^2}{\beta^2}\right).$$

令 $h(t) = \dfrac{t}{(1+t)\ln(1+t)}$,$t_k = \dfrac{X_{(k)}^2}{\beta}$ 且由于对任何正数 t,

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\ln(1+t) - t}{(1+t)\ln(1+t)} < 0,$$

则 $h(t)$ 为关于 t 的严格单调递减函数,且

$$\frac{\mathrm{d}\ln g(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \frac{1}{\beta}[h(t_i) - h(t_j)] > 0.$$

从而 $\ln g(\beta)$ 为关于参数 β 的严格单调递增函数,即 $g(\beta)$ 为关于参数 β 的严格单调递增函数.

进一步,由于

$$\lim_{\beta\to 0} W(\beta) = 0,$$

$$\lim_{\beta\to\infty} W(\beta) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i\ln\frac{\sum_{j=1}^{i+1} X_{(j)}^2 + (n-i-1)X_{(i+1)}^2}{\sum_{j=1}^{i} X_{(j)}^2 + (n-i)X_{(i)}^2},$$

从而对于

$$0 < t < 2\sum_{i=1}^{n-1} i\ln\frac{\sum_{j=1}^{i+1} X_{(j)}^2 + (n-i-1)X_{(i+1)}^2}{\sum_{j=1}^{i} X_{(j)}^2 + (n-i)X_{(i)}^2},$$

$W(\beta) = t$ 关于 β 有唯一解.

由引理 1、引理 2 及 $E(\chi^2(n)) = n$ 有下列定理.

定理 1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自两参数 $CRD(\alpha,\beta)$ 分布(1) 的容量为 n 的 1 个样本,$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ 为相应的次序统计量,则参数 α 和 β 的逆矩估计量由下式确定

$$\begin{cases} W(\beta) = 2n-2, \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha\ln(1 + X_{(i)}^2/\beta) = n. \end{cases}$$

2　数值模拟

利用 Monte Carlo 数值模拟 1 组来自参数 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 1$ 的复合瑞利分布(1) 容量为 $n = 19$ 的样本:

0.776 0	2.892 4	0.158 3	2.697 4	0.348 3
1.542 9	0.853 8	0.603 1	0.158 3	0.601 1
1.111 8	0.431 6	0.900 6	0.402 4	0.931 3
0.944 0	0.967 7	0.791 9	2.983 5.	

利用 Newton Raphson 算法计算得到参数 α 和 β 的最大似然估计为 $\hat{\alpha}_{ML} = 1.341\ 4$ 和 $\hat{\beta}_{ML} = 0.954\ 7$. 由定理 1 知参数 α 和 β 的逆矩估计为 $\hat{\alpha} = 1.236\ 0$,$\hat{\beta} = 0.826\ 1$.

3　参考文献

[1] Bekker A,Roux J J J,Mostert P. A generalization of the

compound Rayleigh distribution: using a Bayesian methods on cancer survival times [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2000, 29(7): 1419-1433.

[2] Al-Hussaini E K. Predicting observables from a general class of distributions [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1999, 79(1): 79-91.

[3] Abushal T A. Estimation of the unknown parameters for the compound Rayleigh distribution based on progressive first-failure-censored sampling [J]. Open Journal of Statistics, 2011, 3(1): 161-171.

[4] 王炳兴. Weibull 分布的统计推断 [J]. 应用概率统计, 1992, 8(4): 357-364.

[5] 王炳兴. Weibull 分布基于定数逐次截尾寿命数据的统计分析 [J]. 科技通报, 2004, 20(6): 488-490, 496.

[6] 王炳兴. Burr Type XII 分布的统计推断 [J]. 数学物理学报, 2008, 28A(6): 1103-1108.

[7] 李凤, 师义民. 逐次定数截尾下 Pareto 分布参数的逆矩估计 [J]. 统计与决策, 2010(24): 21-25.

[8] 徐晓岭, 费鹤良. Weibull 分布步进应力加速寿命试验损伤失效率模型参数的近似极大似然估计和逆矩估计 [J]. 数学研究, 2003, 36(4): 320-323.

[9] 王炳兴. 一个两参数有浴盆形状失效率的寿命分布的参数估计 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2008, 23(4): 408-414.

[10] 匡能晖. 关于两参数瑞利分布顺序统计量的分布性质 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(6): 648-651.

[11] 韦博成. 参数统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

The Bayesian Reliability Analysis for Parameters of Two-Parameter Compound Rayleigh Distribution

WANG Qi[1], LAN Hai-ying[2], XU Gang[3]

(1. Zhongshan Institute, University of Electronic Science and Technology of China, Zhongshan Guangdong 528402, China;
2. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
3. School of Sciences, Nanchang University, Nanchang Jiangxi 330031, China)

Abstract: The maximum likelihood estimator of the parameters of two parameter compound Rayleigh distribution has been obtained based on complete samples. Inverse moment estimators of shape and scale parameters are also obtained by constructing pivotal quantity. Finally, a Monte Carlo simulation example is illustrated to the results.

Key words: maximum likelihood estimator; inverse moment estimator; order statistics

(责任编辑: 曾剑锋)