

文章编号: 1000-5862(2013) 02-0116-04

双温非热尘埃等离子体中的孤波

王红艳, 张开彪

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘要: 使用约化摄动方法得到了高阶横向扰动下的含有双温非热离子的无磁化尘埃等离子体中的 MKP 方程. 经数值模拟分析可知, 在该尘埃等离子体中, 孤波的振幅和宽度均会随系统参数变化.

关键词: 尘埃声孤波; MKP 方程; 双温非热离子

中图分类号: O 534

文献标志码: A

0 引言

在尘埃等离子体中有着异常丰富的波动模式, 如尘埃声波、尘埃离子声波、尘埃电子波等. 在对其波动的相关研究中, 多采用约化摄动的方法, 利用该方法, 可以推导出描述 1 维波动的 KdV 方程或者是 MKdV 方程^[1-2]. 2 维波动的 KP、MKP 或 Coupled KP 方程^[3-4]. 近来, 文献 [1] 研究了仅含有一种非热离子的冷尘埃等离子体中尘埃声孤波. 文献 [5] 对 2 种不同温度的非热离子组成的尘埃等离子体中的尘埃声孤波进行了研究, 得到了描述 1 维波动的 KdV 方程. 文献 [6] 考虑了尘埃流体的温度, 对该系统中的 1 维尘埃声孤波进行了理论分析与研究. 然而, 1 维波动仅是一种简单理想的情况, 在 2 维或 3 维的尘埃等离子体系统中, 至少会存在一些横向扰动来影响其波动^[7]. 文献 [8] 研究了包括双温离子的尘埃等离子体中的孤波, 得到了 2 维波动的 KP 方程和 MKP 方程, 但其模型中低温离子和高温离子均满足玻耳兹曼分布. 有研究表明^[9], 玻耳兹曼分布仅是非热离子分布的一种特殊情况, 在空间等离子体和实验室等离子体中, 非热离子分布是一种更为广泛的离子分布. 因而, 本文将横向扰动的因素考虑在内, 对由带负电的尘埃流体、满足玻耳兹曼分布的电子和 2 种不同温度的非热离子组成的尘埃等离子体中传播的 2 维尘埃声孤波进行研究, 利用约化摄动

法得到描述非线性尘埃声孤波的 Modified Kadomtsev-Petviashvili (MKP) 方程, 结合数值模拟方法讨论了尘埃等离子体各物理量是如何影响和改变孤波结构.

1 控制方程

本文研究的无磁化尘埃等离子体由大质量、带负电的尘埃流体、满足玻耳兹曼分布的电子、低温非热离子和高温非热离子组成. 假定波的传播方向沿 x 轴, 但在 y 轴方向存在着弱高阶横向扰动. 无量纲后的连续性方程、动量守恒方程和泊松方程为

$$\begin{cases} \partial n_d / \partial t + \partial (n_d u_d) / \partial x + \partial (n_d v_d) / \partial y = 0, \\ \partial u_d / \partial t + u_d \partial u_d / \partial x + v_d \partial u_d / \partial y = \partial \phi / \partial x, \\ \partial v_d / \partial t + u_d \partial v_d / \partial x + v_d \partial v_d / \partial y = \partial \phi / \partial y, \\ \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = n_d + n_e - n_{il} - n_{ih}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 n_d 和 ϕ 为尘粒的数密度与静电势, u_d 和 v_d 为在 x 和 y 方向的速度分量, n_e 为电子的数密度, n_{il} 为低温非热离子数密度, n_{ih} 为高温非热离子数密度. 无量纲化的过程为: n_d , n_e , n_{il} 与 n_{ih} 均由 n_{d0} 无量纲化; ϕ 由 T_{eff}/e 无量纲化; u_d , v_d 由 $C_d = (Z_d T_{eff}/m_d)^{1/2}$ 无量纲化; x , y 由 $\lambda_{Dd} = (T_{eff}/4\pi Z_d n_{d0} e^2)^{1/2}$ 无量纲化; t 由 $\omega^{-1} = (m_d/4\pi Z_d^2 n_{d0} e^2)^{1/2}$ 无量纲化; Z_d 为尘粒的带电量, T_{eff} 为等效温度且满足 $1/T_{eff} = 1/Z_d n_{d0} (n_{eo}/T_e + n_{i0}/T_{il} + n_{ih0}/T_{ih})$, T_{il} , T_{ih} 和 T_e 分别

收稿日期: 2012-09-23

基金项目: 四川省教育厅青年基金(10ZB129, 12ZB084) 资助项目.

作者简介: 王红艳(1975-), 女, 河南陕县人, 讲师, 硕士, 主要从事非线性物理方面研究.

为低温非热离子、高温非热离子和电子的温度 m_d 为尘粒质量 n_{d0} 为无扰动时尘粒的数密度 n_{i0} 、 n_{ih0} 分别为无扰动时低温离子和高温离子的数密度.

无量纲化后的电子数密度 n_e 与双温非热离子数密度 n_{il} 与 n_{ih} 分别为^[5-6]

$$\begin{cases} n_e = \delta e^{s\beta_1\varphi}, \\ n_{il} = \mu_l [1 + \lambda(\varphi + \varphi^2)] e^{-s\varphi}, \\ n_{ih} = \mu_h [1 + \lambda(\varphi + \varphi^2)] e^{-s\beta_2\varphi}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\delta = n_{e0}/Z_d n_{d0}$ $\mu_l = n_{i0}/Z_d n_{d0}$ $\mu_h = n_{ih0}/Z_d n_{d0}$, $\beta_1 = T_{il}/T_e$ $\beta_2 = T_{ih}/T_e$. 由电中性条件可知 $\mu_l + \mu_h - \delta = 1$. 另外 $s = T_{eff}/T_{il} = 1/(\delta\beta_1 + \mu_l + \mu_h\beta_2)$, $\lambda = 4\alpha/(1+3\alpha)$ α 为快离子数 若 $\alpha = 0$ 满足非热分布的离子数密度退化为玻耳兹曼分布^[10].

2 推导 MKP 方程

采用以下形式的坐标伸展变换 $\xi = \varepsilon(x - vt)$, $\tau = \varepsilon^3 t$ $\eta = \varepsilon^2 y$ 其中 ε 为表示非线性强度的小参数 ν 为由 C_d 无量纲化的尘埃声波的速度. 与文献[11-12]的展开方式不同,为得到描述该系统中传播的尘埃声波的 MKP 方程,各物理量展开形式为

$$\begin{cases} n_d = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \varepsilon^3 n_3 + \dots \\ u_d = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots \\ v_d = \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^3 v_2 + \dots \\ \varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \dots \end{cases} \quad (3)$$

将(2)式和(3)式代入(1)式,并按 ε 的不同幂次展开,比较 ε^2 前的系数,可得

$$\begin{cases} -v \partial n_1 / \partial \xi + \partial u_1 / \partial \xi = 0, \\ -v \partial u_1 / \partial \xi = \partial \varphi_1 / \partial \xi, \\ -v \partial v_1 / \partial \xi = \partial \varphi_1 / \partial \eta, \\ n_1 + \varphi_1 [1 - \lambda(\mu_l + \mu_h)] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

比较 ε^3 前的系数,可得

$$\begin{cases} -v \partial n_2 / \partial \xi + \partial u_2 / \partial \xi + \partial(n_1 u_1) / \partial \xi = 0, \\ -v \partial u_2 / \partial \xi + u_1 \partial u_1 / \partial \xi = \partial \varphi_2 / \partial \xi, \\ -v \partial v_2 / \partial \xi + u_1 \partial v_1 / \partial \xi = \partial \varphi_2 / \partial \eta, \\ n_2 + \delta s \beta_1 (\varphi_2 + s \beta_1 \varphi_1^2 / 2) - \mu_l [\varphi_2 (\lambda - s) + \varphi_1^2 (s^2 / 2 - s \lambda + \lambda)] - \\ - \mu_h [\varphi_2 (\lambda - s \beta_2) + \varphi_1^2 (s^2 \beta_2^2 / 2 - s \beta_2 \lambda + \lambda)] = 0. \end{cases} \quad (5)$$

在 ε^4 下,可得

$$\begin{cases} -v \partial n_3 / \partial \xi + \partial n_1 / \partial \tau + \partial u_3 / \partial \xi + \partial(n_1 u_2) / \partial \xi + \\ \partial(n_2 u_1) / \partial \xi + \partial v_1 / \partial \eta = 0, \\ -v \partial u_3 / \partial \xi + \partial u_1 / \partial \tau + u_1 \partial u_2 / \partial \xi + u_2 \partial u_1 / \partial \xi = \partial \varphi_3 / \partial \xi, \\ -v \partial v_3 / \partial \xi + \partial v_1 / \partial \tau + u_1 \partial v_2 / \partial \xi + u_2 \partial v_1 / \partial \xi = \partial \varphi_3 / \partial \eta, \\ \partial^2 \varphi_1 / \partial \xi^2 = n_3 + \varphi_3 (\delta s \beta_1 + \mu_l s - \mu_l \lambda + \mu_h s \beta_2 - \mu_h \lambda) + \\ \varphi_1 \varphi_2 (\delta s^2 \beta_1 - \mu_l s^2 + 2 \mu_l s \lambda - 2 \mu_l \lambda - \mu_h s^2 \beta_2^2 + 2 \mu_h s \beta_2 \lambda - \\ 2 \mu_h \lambda) + \varphi_1^3 \left(\frac{1}{6} \delta s^3 \beta_1^3 + \frac{1}{6} \mu_l s^3 - \frac{1}{2} \mu_l s^2 \lambda + \mu_l s \lambda + \right. \\ \left. \frac{1}{6} \mu_h s^3 \beta_2^3 - \frac{1}{2} \mu_h s^2 \beta_2^3 \lambda + \mu_h s \beta_2 \lambda \right). \end{cases} \quad (6)$$

经过整理,最终得 MKP 方程为

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + A \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \xi^3} \right) + C \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} = 0, \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} A = -v^3 \left[-15/2 v^6 + s^3 (\delta \beta_1^3 + \mu_l + \mu_h \beta_2^3) / 2 - \right. \\ \left. 3 s^2 \lambda (\mu_l + \mu_h \beta_2) / 2 + 3 s \lambda (\mu_l + \mu_h \beta_2) \right] / 2, \\ B = v^3 / 2, \\ C = v / 2, \\ v^2 = 1 / (1 - \lambda(\mu_l + \mu_h)) = 1 / (1 - \lambda(1 + \nu)). \end{cases} \quad (8)$$

3 讨论

由(7)式描述的 MKP 方程有如下形式的孤波解

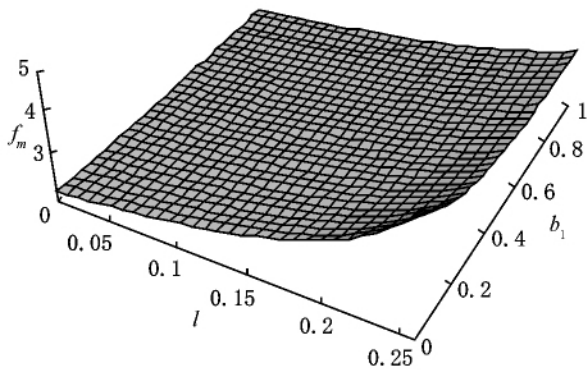
$$\varphi_1 = \pm \varphi_m \text{Sech} \left(\frac{\xi + \eta - U_0 \tau}{\omega} \right), \quad (9)$$

其中孤立波的振幅 $\varphi_m = \sqrt{6(U_0 - C)/A}$, 孤立波的宽度 $\omega = \sqrt{B/(U_0 - C)}$ U_0 由 C_d 无量纲化.

由(9)式可知,系数 A 和 C 决定孤波的振幅,而孤波的宽度则取决于系数 B 和 C . 由(8)式知尘埃声孤波的速度 $v > 0$ 很显然,系数 B 和 C 均大于 0,而系数 A 也总是为正(孤波振幅为正).借助于 Mathematic 数学软件对孤波的振幅和宽度进行分析.

图 1 描述了孤波振幅 φ_m 随快离子数 λ 和低温非热离子与电子温度之比 β_1 的变化关系. 从图 1 可以看出,当低温非热离子与电子温度之比 β_1 取定值时,孤波振幅 φ_m 随快离子数 λ 的增大而增大,而当快离子数 λ 取定值时,振幅却随 β_1 的增大而减小. 这意味着快离子数的增加导致尘埃声孤波振幅的增加,而低温非热离子和电子温度比值的增大却会使

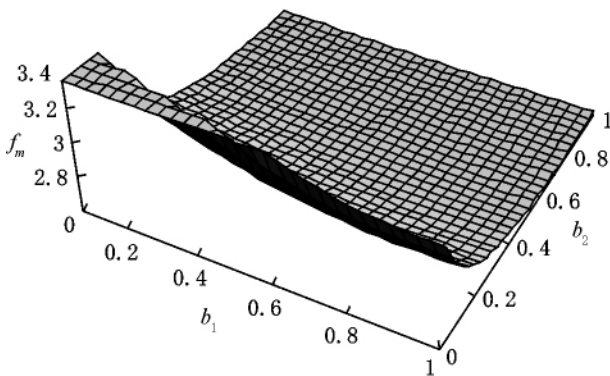
尘埃声孤波的振幅减小.



$$\mu_l = 0.4 \quad \mu_h = 0.8 \quad \nu = 0.2 \quad \beta_2 = 0.1 \quad U_0 = 3.$$

图1 孤波振幅 φ_m 随快离子数 λ 和低温非热离子与电子温度之比 β_1 的变化关系

图2展示了孤波振幅 φ_m 随低温非热离子与电子温度之比 β_1 和低温与高温非热离子温度之比 β_2 的变化关系. 由图2可以看出, 当低温非热离子与高温非热离子温度之比 β_2 取定值时, 随着低温非热离子与电子温度比值 β_1 的增大, 孤波振幅 φ_m 却随之减小, 这与图1结论相同. 而当 β_1 取定值时, 孤波振幅随 β_2 的增大而迅速减小. 这说明在所研究的尘埃等离子体中, 低温非热离子、高温非热离子和电子的温度的变化均会影响和改变孤波结构, 使孤波的振幅发生变化.

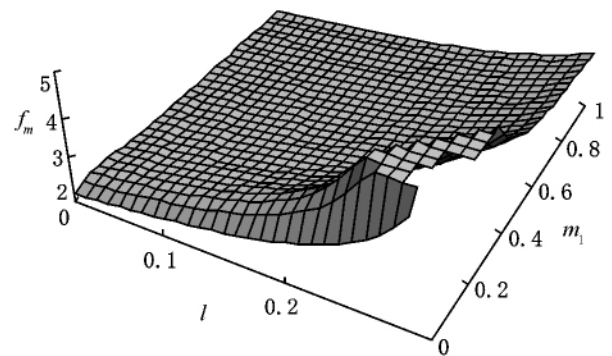


$$\mu_l = 0.4 \quad \mu_h = 0.8 \quad \nu = 0.2 \quad \lambda = 0.2 \quad U_0 = 3.$$

图2 孤波振幅 φ_m 随低温非热离子与电子温度之比 β_1 和低温与高温非热离子温度之比 β_2 的变化关系

图3给出了孤波振幅 φ_m 随快离子数 λ 和低温离子数 μ_l 的变化关系. 从图3可以看出, 当低温离子数 μ_l 数值较小时, 随着快离子数 λ 的增大, 孤波振幅 φ_m 先增大再减小, 而当 μ_l 数值较大时, 振幅 φ_m 随快离子数 λ 的增大而增大, 另外, 当快离子数 λ 数值较小时, 随着低温离子数 μ_l 的增大, 振幅 φ_m 变化不大,

而当 λ 数值较大时, 振幅随 μ_l 变化明显, 且随 μ_l 的增大呈现出先增大再减小的趋势. 这说明当尘埃等离子体中快离子数目较少时, 低温离子数密度的变

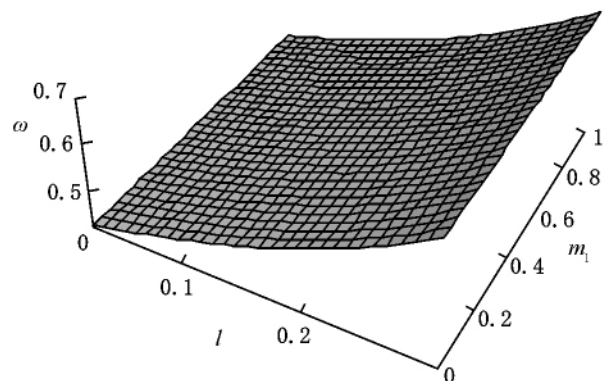


$$\nu = 0.2 \quad \beta_1 = 0.5 \quad \beta_2 = 0.1 \quad U_0 = 3.$$

图3 孤波振幅 φ_m 随快离子数 λ 和低温非热离子数 μ_l 的变化关系

化对孤波振幅影响不大, 而当体系中快离子数较多时, 孤波振幅会随着低温离子数的增加呈现出先增加再减小的趋势. 通过以上作图分析, 可知孤波振幅作为各参量的复合函数, 与各参量之间有着复杂的变化关系. 从而可以得到结论, 各参量的改变均可显著影响孤立波的结构, 改变孤波的振幅.

图4给出了孤波宽度 ω 随快离子数 λ 和低温离子数 μ_l 的变化关系. 由图4可以看出, 快离子数 λ 和低温非热离子数 μ_l 也对孤波的宽度有着重要作用. 当低温离子数 μ_l 取定值时, 孤波宽度随 λ 的增大而增大, 而当 λ 为常数时, μ_l 增大, 孤波宽度也随之增大. 这意味着在该系统中, 快离子数和低温非热离子数密度的增加, 均会使孤波宽度变宽.



$$\mu_h = 0.8 \quad \nu = 0.2 \quad \beta_1 = 0.5 \quad \beta_2 = 0.1 \quad U_0 = 3.$$

图4 孤波宽度 ω 随快离子数 λ 和低温非热离子数 μ_l 的变化关系

4 结论

本文研究了由带负电的尘埃流体,低温非热离子,高温非热离子和满足玻耳兹曼分布的电子组成的尘埃等离子体中传播的2维有限小振幅的非线性尘埃声孤波,利用约化摄动法得到了描述孤波的MKP方程.通过数值模拟方法,讨论了各系统参数诸如 α , β_1 , β_2 , μ_i 与孤波的振幅和宽度间的变化关系.结果表明这些参量均会影响孤波结构.

5 参考文献

- [1] Lin Maimai, Duan Wenshan S. Dust acoustic solitary waves in a dusty plasmas with nonthermal ions [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2007, 33(4): 1189-1196.
- [2] Khan S A, Mahmood S, Mirza A M. Cylindrical and spherical dust ion-acoustic solitary waves in quantum plasmas [J]. *Physics Letters A* 2008 372(1): 148-153.
- [3] Lin Maimai, Duan Wenshan. The Kadomtsev-Petviashvili (KP), MKP, and coupled KP equations for two-temperature dusty plasmas [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* 2005 23: 929-937.
- [4] Wang Yueyue, Zhang Jiefang. Cylindrical dust acoustic waves in quantum dusty plasmas [J]. *Physics Letters A*, 2008 372: 3707-3713.
- [5] 周志坚, 王红艳, 张开彪. 含有双温非热离子的尘埃等离子体中的非线性尘埃声孤波 [J]. *安徽大学学报: 自然科学版* 2009, 33(4): 62-64.
- [6] 张开彪, 王红艳, 周志坚, 等. 含有双温非热离子的热尘埃等离子体中的尘埃声孤波 [J]. *安徽大学学报: 自然科学版* 2010, 34(3): 62-65.
- [7] Xue J K. Kadomtsev-petviashvili (KP) burgers equation in a dusty plasmas with non-adiabatic dust charge fluctuation [J]. *The European Physical Journal D*, 2003, 26: 211-2144.
- [8] Hamid Reza Pakzad, Kurosh Javidan. Solitary waves in dusty plasmas with variable dust charge and two temperature ions [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 42: 2904-2913.
- [9] Schamel H. Electron holes, ion holes and double layers [J]. *Phys Rep* 1986, 140: 161-191.
- [10] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y. Dust-acoustic waves in dusty plasmas [J]. *Planetary and Space Science*, 1990, 38: 543-546.
- [11] 张开彪, 王红艳, 周志坚, 等. 双温非热尘埃等离子体中的二维尘埃声孤波 [J]. *信阳师范学院学报: 自然科学版* 2010, 23(2): 204-207.
- [12] 赵长海. 离子声波方程的显式行波解 [J]. *江西师范大学学报: 自然科学版* 2010, 34(3): 319-324.

Solitary Waves in a Dusty Plasma with Two-Temperature Nonthermal Ions

WANG Hong-yan ZHANG Kai-biao

(School of Science, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong, Sichuan 643000, China)

Abstract: An unmagnetized dusty plasma with two-temperature nonthermal distributed ions under the higher order transverse perturbations has been studied. With the reductive perturbation method, a modified Kadomtsev-Petviashvili (MKP) equation is derived. Numerical simulation results have shown that the amplitude and width of solitons can be influenced by the parameters of the dusty plasmas.

Key words: dust-acoustic solitons; MKP equation; two-temperature nonthermal ions

(责任编辑: 冉小晓)