第 37 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 37 No. 2
2013 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2013

文章编号:1000-5862(2013)02-0166-05

单位圆内非齐次线性微分方程的振荡解

肖丽鹏，李明星
(江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌　330022)

摘要: 研究了单位圆内高阶非齐次线性微分方程的振荡解，得到了方程 $f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F$($a_0$，$a_1$，$\cdots$，$a_{k-1}$ 和 F 是单位圆内的亚纯函数)具有 1 个振荡解空间，其空间中所有解的零点收敛指数为 ∞，至多除去 1 个例外值.

关键词: 单位圆; 线性微分方程; 亚纯函数; 零点收敛指数

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A

0　引言与结果

线性微分方程复振荡理论的研究始于 1982 年 S. Bank 和 I. Laine 对 2 阶线性微分方程的研究[1]，此后，国内外许多学者对复平面内线性微分方程的复振荡性质进行了深入研究，并取得了许多重要成果. 近些年，对单位圆内线性微分方程的复振荡性质的研究，也得到了一些重要结果[2-6]. 本文主要研究的是单位圆内高阶非齐次线性微分方程解的一些性质.

本文使用复平面和单位圆上亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论的标准符号[7-8]. 假设 $\Delta=\{z: |z|<1\}$ 表示复平面上的单位圆，f 是单位圆内的亚纯函数. 记 f 在 $\Delta=\{z: |z|\leqslant r<1\}$ 内的极点个数为 $n(r,f)$，重级极点按其重数计算. 相应地，$\forall a\in\mathbf{C}$，记 $f-a$ 在 $\Delta=\{z: |z|\leqslant r<1\}$ 内的零点数为 $n(r,1/(f-a))$，重级零点按其重数计算.

定义 1[9]　定义单位圆 Δ 内的均值函数 $m(r,f)$，计数函数 $N(r,f)$ 和特征函数 $T(r,f)$ 如下:

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log r,$$

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

$\forall a\in\mathbf{C}$，同样可以定义 $m(r,1/(f-a))$，$N(r,1/(f-a))$ 和 $T(r,1/(f-a))$.

定义 2　单位圆 Δ 内的亚纯函数 f 的级定义为

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+T(r,f)/\log\frac{1}{1-r},$$

f 的下级为

$$\mu(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log^+T(r,f)/\log\frac{1}{1-r}.$$

定义 3[10]　设单位圆 Δ 内的亚纯函数 f 的 a-值点($a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$)序列的收敛指数为

$$\lambda(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)/\log\frac{1}{1-r},$$

f 的判别 a-值点($a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$)序列的收敛指数为

$$\overline{\lambda}(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)/\log\frac{1}{1-r}.$$

定义 4　设单位圆 Δ 内的亚纯函数 f 是可允许的，当且仅当

$$\overline{\lim_{r\to1^-}}T(r,f)/\log\frac{1}{1-r}=\infty,$$

否则 f 是不可允许的.

定义 5　设 f 为单位圆 Δ 内的亚纯函数，b 为任一复数，定义 f 在点 b 的亏量为

$$\Delta_E(b,f)=\overline{\lim_{r\to1^-,r\notin E}}m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)/T(r,f),$$

其中 $E\in[0,1)$，满足 $\int_E\frac{dr}{1-r}<\infty$.

定义 6　设 f 为单位圆 Δ 内的亚纯函数，定义 f 在集合 I 上的级为

$$\rho_I(f)=\overline{\lim_{r\to1^-,r\in I}}\log^+T(r,f)/\log\frac{1}{1-r},$$

其中 $I\in[0,1)$，满足 $\int_I\frac{dr}{1-r}=\infty$.

收稿日期:2012-10-10
基金项目:国家自然科学基金(11126144，11171119)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ12207)资助项目.
作者简介:肖丽鹏(1979-)，女，江西吉安人，讲师，博士，主要从事复分析研究.

1997 年，王跃飞研究了方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F \qquad (1)$$

的解的级和零点收敛指数的性质，得到了以下结果.

定理 A[1]　设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 和 F 是整函数，$F\neq 0$，f_0 是方程(1)的解，$g_1,\cdots,g_k$ 是相应齐次方程的基础解系.

(ⅰ) 如果 $\mu(F)<\infty$，至少 1 个 $a_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是超越的，那么存在一函数 $g_j\in\{g_1,\cdots,g_k\}$，使得解空间 $\{cg_j+f_0,c\in\mathbf{C}\}$ 中所有解满足 $\rho(f)=\lambda(f)=\overline{\lambda}(f)=\infty$，至多除去 1 个例外值；

(ⅱ) 如果 $\mu(F)=\infty$ 和 $\Delta_E(0,F)<1$，E 为有限测度集，那么存在一函数 $g_j\in\{g_1,\cdots,g_k\}$，使得解空间 $\{cg_j+f_0,c\in\mathbf{C}\}$ 中所有解满足 $\rho(f)=\lambda(f)=\infty$，至多除去 1 个例外值.

注 1　此定理结果中的 $\rho(f)$，$\mu(F)$，$\lambda(f)$，$\overline{\lambda}(f)$ 是用复平面上亚纯函数的级，下级，零点收敛指数的定义方法[8]来定义的，不同于定义 2，定义 3.

一个自然的问题是：若方程(1)中的 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 和 F 是单位圆 Δ 内的亚纯函数，方程的解是否具有定理 A 的性质？本文将定理 A 中的条件进行了修改和限制，对这个问题进行了研究，得到了以下结果.

定理 1　设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 和 F 是单位圆 Δ 内的亚纯函数，其中 $a_0\neq 0$，$F\neq 0$，且 F 在单位圆 Δ 内有有限多个极点，$N(r,a_j)=O\{m(r,a_j)\}(j=0,1,\cdots,k-1)$. f_0 是方程(1)的解，$g_1,\cdots,g_k$ 是相应齐次方程的基础解系，进一步假设方程(1)的所有解为亚纯函数.

(ⅰ) 如果 $\mu(F)<\infty$，至少 1 个 $a_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是可允许的，那么存在一函数 $g_j\in\{g_1,\cdots,g_k\}$，使得解空间 $\{cg_j+f_0,c\in\mathbf{C}\}$ 中所有解满足 $\rho(f)=\lambda(f)=\overline{\lambda}(f)=\infty$，至多除去 1 个例外值；

(ⅱ) 如果 $\mu(F)=\infty$ 和 $\Delta_E(0,F)<1$，其中 $E\in[0,1)$，满足 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<\infty$，那么存在一函数 $g_j\in\{g_1,\cdots,g_k\}$，使得解空间 $\{cg_j+f_0,c\in\mathbf{C}\}$ 中所有解满足 $\rho(f)=\lambda(f)=\infty$，至多除去 1 个例外值.

1　引理

引理 1　设 $a_0(\neq 0)$，$a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是单位圆内的亚纯函数，$f_1,\cdots,f_n$ 是线性微分方程

$$f^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_1f'+a_0f=0 \qquad (2)$$

在单位圆内的线性无关亚纯解，则方程(2)的系数 $a_j(j=0,1,\cdots,n-1)$ 满足

$$m(r,a_j)=O\{\log\frac{1}{1-r}+\log\max_{1\leqslant i\leqslant n}T(r,f_i)\}\ (r\notin E),$$

其中例外集 $E\in[0,1)$，满足 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<\infty$.

引理 2　设 $\varphi(r)\geqslant 0$ 是 $[0,1)$ 内的非减函数，其级为 ρ，下级为 μ，且 $0\leqslant\mu\leqslant\rho\leqslant\infty$. 假设 r_n，r'_n 是 2 个趋于 1 的递增数列，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log^+\varphi(r_n)}{\log\frac{1}{1-r_n}}=\rho,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log^+\varphi(r'_n)}{\log\frac{1}{1-r'_n}}=\mu$$

成立，那么 $\forall k(0<k<1)$，有

$$\lim_{r\to1^-,r\in I_0}\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}}=\rho,\ \lim_{r\to1^-,r\in I_1}\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}}=\mu$$

成立，其中 $I_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}[r_n,1-k(1-r_n)]$ 和 $I_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}[1-\frac{1}{k}(1-r'_n),r'_n]$ 均满足 $\int_{I_i}\frac{\mathrm{d}r}{1-r}=\infty(i=0,1)$.

证　设 $r\in[r_n,1-k(1-r_n)]$，则有

$$\frac{\log^+\varphi(r_n)}{\log\frac{1}{1-[1-k(1-r_n)]}}\leqslant\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

而

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\log^+\varphi(r_n)}{\log\frac{1}{1-[1-k(1-r_n)]}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log^+\varphi(r_n)}{\log\frac{1}{k}+\log\frac{1}{1-r_n}}\leqslant\lim_{r\to1^-,r\in I_0}\inf\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

并且

$$\lim_{r\to1^-,r\in I_0}\sup\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}}\leqslant\rho,$$

所以 $\rho=\lim\limits_{r\to1^-,r\in I_0}\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}}$，其中 $\int_{I_0}\frac{\mathrm{d}r}{1-r}=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{r_n}^{1-k(1-r_n)}\frac{\mathrm{d}r}{1-r}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\ln k)=\infty.$$

类似地可证明 $\lim\limits_{r\to1^-,r\in I_1}\frac{\log^+\varphi(r)}{\log\frac{1}{1-r}}=\mu$.

引理 3　设 f 为单位圆 Δ 内的亚纯函数且 $k\in\mathbf{N}$，则有

$$m(r,f^{(k)}/f)=S(r,f)=O\{\log^+T(r,f)\}+O\{\log\frac{1}{1-r}\},$$

至多除去1个例外集 $E\in[0,1)$,满足 $\int_E \frac{dr}{1-r}<\infty$.

如果 f 为有限级,则有

$$m(r,f^{(k)}/f)=O\{\log\frac{1}{1-r}\}.$$

引理4 设 f 为单位圆 Δ 内的亚纯函数,对 $a\in\mathbf{C}$ 和 $f\not\equiv a$ 有

$$T(r,1/(f-a))=T(r,f)+O(1).$$

引理5 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 和 F 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,$F\not\equiv 0,k\geqslant 1,N(r,a_j)=O\{m(r,a_j)\}$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$,如果 f 为方程(1)的解,则有

$$T(r,F)\leqslant m(r,f)+m(r)+N(r,F)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E;\quad(3)$$

$$T(r,f)\leqslant N(r,1/f)+m(r,1/F)+m(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E;\quad(4)$$

$$T(r,f)\leqslant k\overline{N}(r,1/f)+T(r,F)+T(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E,\quad(5)$$

其中 $m(r)=\sum_{j=0}^{k-1}m(r,a_j),T(r)=\sum_{j=0}^{k-1}T(r,a_j),E\in[0,1)$,满足 $\int_E\frac{dr}{1-r}<\infty$.

证 根据引理3和(1)式,有

$$F=f\left(\frac{f^{(k)}}{f}+a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_0\right),\quad(6)$$

$$m(r,F)\leqslant m(r,f)+m(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E,$$

因此

$$T(r,F)\leqslant m(r,f)+m(r)+N(r,F)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E,$$

所以(3)式成立.

由(6)式得

$$m(r,\frac{1}{f})=m(r,\frac{F}{f}\cdot\frac{1}{F})\leqslant m(r,\frac{F}{f})+m(r,\frac{1}{F})\leqslant m(r,\frac{1}{F})+m(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E,\quad(7)$$

再由(7)式,$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$ 和引理4得

$$T(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+m(r,\frac{1}{F})+m(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E,$$

所以(4)式成立.

如果 z_0 为 f 的 $\alpha(>k)$ 阶零点,不是 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 的极点,那么 z_0 为方程(1)中 F 的 $\alpha-k$ 阶零点,因此

$$n(r,\frac{1}{f})\leqslant k\overline{N}(r,\frac{1}{f})+n(r,\frac{1}{F})+\sum_{j=0}^{k-1}n(r,a_j),$$

$$N(r,\frac{1}{f})\leqslant k\overline{N}(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{F})+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,a_j).\quad(8)$$

由(4)式和(8)式得

$$T(r,f)\leqslant k\overline{N}(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{F})+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,a_j)+m(r,\frac{1}{F})+m(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\}\leqslant k\overline{N}(r,\frac{1}{f})+T(r,F)+T(r)+O\{\log^+T(r,f)+\log\frac{1}{1-r}\},r\notin E,$$

所以(5)式成立.

2 定理的证明

定理1的证明 (i)设 f_0 是方程(1)的1个解,$g_1,\cdots,g_k$ 是相应齐次线性方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0$$

的线性无关解.由于(1)式所有解为亚纯函数,所以 $g_1,\cdots,g_k$ 都为亚纯函数,由引理1知,

$$m(r,a_j)=O\{\log\frac{1}{1-r}+\log[\max_{1\leqslant v\leqslant k}T(r,g_i)]\},r\notin E;$$

$$m(r)=O\{\log\frac{1}{1-r}+\log[\max_{1\leqslant v\leqslant k}T(r,g_i)]\},r\notin E,\quad(9)$$

其中 $m(r)=\sum_{j=0}^{k-1}m(r,a_j)$.另一方面,由引理2知,存在1个集合 I_1,满足 $\int_{I_1}\frac{dr}{1-r}=\infty$,使得

$$\lim_{r\to1^-,r\in I_1}\log^+T(r,F)/\log\frac{1}{1-r}=\mu(F)<\infty.\quad(10)$$

由(9)式知,存在一函数,不失一般性,设为 g_1,$g_1\in\{g_v\}_{v=1}^k$ 和 I_1 的子集 I_2,I_2 仍满足 $\int_{I_2}\frac{dr}{1-r}=\infty$,使得

$$m(r)=O\{\log T(r,g_1)+\log\frac{1}{1-r}\},r\in I_2.\quad(11)$$

定义集合 $G=\{f_c\mid f_c=cg_1+f_0,c\in\mathbf{C}\}$,显然 G 中每个 f_c 都满足方程(1).现证明对任意2个函数

$f_\alpha, f_\beta \in G(\alpha \neq \beta)$，$f_\alpha$ 或 f_β 具有性质 $\rho(f) = \lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = \infty$.

因为 $f_\alpha = (\alpha - \beta) g_1 + f_\beta$，所以

$$T(r, g_1) = T\left(r, \frac{f_\alpha - f_\beta}{\alpha - \beta}\right) \leqslant T(r, f_\alpha) + T(r, f_\beta) + O(1). \tag{12}$$

假设存在 I_2 的子集 I_3，I_3 满足 $\int_{I_3} \frac{\mathrm{d}r}{1-r} = \infty$，使得

$$T(r, f_\beta) \leqslant T(r, f_\alpha), r \in I_3 \tag{13}$$

成立，否则考虑 f_β. 由(12)式和(13)式得

$$T(r, g_1) \leqslant 2T(r, f_\alpha) + O(1), r \in I_3. \tag{14}$$

如果 $\rho_{I_3}(f_\alpha) < \infty$，由(11)式和(14)式知

$$m(r) = O\{\log T(r, g_1) + \log \frac{1}{1-r}\} = O\{\log [2T(r, f_\alpha)] + \log \frac{1}{1-r} + O(1)\} = O\{\log \frac{1}{1-r}\}, r \in I_3.$$

又因为 $N(r, a_j) = O\{m(r, a_j)\}(j = 0, 1, \cdots, k-1)$，所以有

$$T(r, a_j) = N(r, a_j) + m(r, a_j) = O\{m(r, a_j)\}.$$

从而

$$T(r) = O\{\log \frac{1}{1-r}\}, r \in I_3, \tag{15}$$

其中 $T(r) = \sum_{j=0}^{k-1} T(r, a_j)$，所以 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 肯定都为不可允许的，与 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 中至少有 1 个 a_j 为可允许的函数矛盾. 因此

$$\rho_{I_3}(f_\alpha) = \infty. \tag{16}$$

现对 f_α 应用引理 5 得

$$T(r, f_\alpha) \leqslant k\overline{N}(r, 1/f_\alpha) + T(r, F) + T(r) + O\{\log^+ T(r, f_\alpha) + \log \frac{1}{1-r}\}, r \notin E, \tag{17}$$

其中 $E \in [0, 1)$，满足 $\int_E \frac{\mathrm{d}r}{1-r} < \infty$.

令 $I_4 = I_3 \backslash E$，则 $\int_{I_4} \frac{\mathrm{d}r}{1-r} = \infty$，从(10)式，(15)式和(17)式知，当 $r \in I_4$ 且 $r \to 1^-$ 时，有

$$T(r, f_\alpha) \leqslant k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_\alpha}\right) + \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\mu(F)+1} + T(r) + O\{\log^+ T(r, f_\alpha) + \log \frac{1}{1-r}\} \leqslant k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_\alpha}\right) + \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\mu(F)+1} + O\{\log^+ T(r, f_\alpha) + \log \frac{1}{1-r}\}. \tag{18}$$

因此由(16)式和(18)式得

$$\lambda(f_\alpha) = \overline{\lambda}(f_\alpha) = \infty.$$

定理 1 的(i)得证.

(ii) 由(9)式知，存在一函数，不失一般性，设为 g_1，$g_1 \in \{g_v\}_{v=1}^{k}$ 和 J_0，满足 $\int_{J_0} \frac{\mathrm{d}r}{1-r} = \infty$，使得

$$m(r) = O\{\log T(r, g_1) + \log \frac{1}{1-r}\}, r \in J_0.$$

对任意 2 个函数 $f_\alpha, f_\beta \in G(\alpha \neq \beta)$ (G 如(i)中所定义)，可以假设存在 J_0 的子集 J_1，J_1 满足 $\int_{J_1} \frac{\mathrm{d}r}{1-r} = \infty$，使得

$$T(r, f_\beta) \leqslant T(r, f_\alpha), r \in J_1$$

成立，否则考虑 f_β，类似于(i)的证明可得

$$m(r) = O\{\log [2T(r, f_\alpha)] + \log \frac{1}{1-r} + O(1)\}, r \in J_1. \tag{19}$$

另一方面，由于 $\Delta_E(0, F) < 1$，取 $\varepsilon > 0$，使得 $\Delta_E(0, F) < (1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)/(1+\varepsilon)$，令 $\delta_0 = (1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)/(1+\varepsilon) - \Delta_E(0, F) > 0$，由 $\Delta_E(0, F)$ 的定义可知，当 $r \to 1^-$ 时，有

$$\frac{m(r, 1/F)}{T(r, F)} \leqslant \Delta_E(0, F) + \varepsilon, r \notin E,$$

即

$$m(r, 1/F) \leqslant (\Delta_E(0, F) + \varepsilon) T(r, F), r \to 1^-, r \notin E. \tag{20}$$

由引理 5 中的(3)式和(19)式得

$$T(r, F) \leqslant m(r, f_\alpha) + m(r) + N(r, F) + O\{\log^+ T(r, f_\alpha) + \log \frac{1}{1-r}\} \leqslant m(r, f_\alpha) + N(r, F) + O\{\log^+ T(r, f_\alpha) + \log \frac{1}{1-r}\} \leqslant (1+\varepsilon) T(r, f_\alpha) + N(r, F) + O\{\log \frac{1}{1-r}\}, r \to 1^-. \tag{21}$$

由引理 5 中的(4)式和(19)式得

$$T(r, f_\alpha) \leqslant N(r, 1/f_\alpha) + m(r, 1/F) + O\{\log^+ T(r, f_\alpha) + \log \frac{1}{1-r}\}, r \in J_1 \backslash E_1,$$

其中 $E_1 \in [0, 1)$，满足 $\int_{E_1} \frac{\mathrm{d}r}{1-r} < \infty$.

即

$$(1-\varepsilon) T(r, f_\alpha) \leqslant N(r, 1/f_\alpha) + m(r, 1/F) + O\{\log \frac{1}{1-r}\}, r \in J_1 \backslash E_1, r \to 1^-. \tag{22}$$

令 $E_0 = E \cup E_1$，则 $\int_{E_0} \frac{\mathrm{d}r}{1-r} < \infty$. 由(21)式和(22)式可得

$$T(r, F) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(N(r, 1/f_\alpha) + m(r, 1/F) +$$

$$O\{\log\frac{1}{1-r}\})+N(r,F)+O\{\log\frac{1}{1-r}\}. \qquad (23)$$

因为 F 有有限多个极点,所以

$$N(r,F)=O(1). \qquad (24)$$

由(20)式,(23)式和(24)式得

$$\left(\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)-\Delta_E(0,F)-\varepsilon\right)T(r,F)\leqslant$$

$$N(r,\frac{1}{f_\alpha})+O\{\log\frac{1}{1-r}\},$$

即

$$\delta_0 T(r,F)\leqslant N(r,\frac{1}{f_\alpha})+O\{\log\frac{1}{1-r}\},$$

$$r\in J_1\backslash E_0, r\to 1^-.$$

因为 $\mu(F)=\infty$,得 $\lambda(f_\alpha)=\infty$. 从而 $\lambda(f_\alpha)=\rho(f_\alpha)=\infty$. 所以定理 1 的(ii)得证.

3 参考文献

[1] 高仕安,陈宗煊,陈特为. 线性微分方程的复振荡理论[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1998.

[2] Pommerenke C. On the mean growth of the solutions of complex linear differential equations in the disk [J]. Complex Variables,1982,1(1):23-38.

[3] 何育赞,肖治经. 单位圆内微分方程 $f'^2=a_0(z)(f-a_1(z))^2f$ 的解[J]. 中国学术期刊文摘:科技快报,1999(5):164-166.

[4] 陈宗煊. 一类单位圆内微分方程解的性质[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2002,26(3):189-190.

[5] 王锦熙,易才凤,徐洪焱. 关于单位圆内高阶线性微分方程的复振荡[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2009,33(2):194-200.

[6] 王丽,陈宗煊. 单位圆内高阶微分方程解的一些结果[J]. 华南师范大学学报:自然科学版,2007(3):8-13.

[7] Hayman W. Meromorphic functions [M]. Oxford: Claredon Press,1964.

[8] Yang Le. Value distribution theory [M]. Berlin: Spring-Verlag,1993.

[9] Heittokangas J. On complex differential equations in the unit disc [J]. Ann Acad Sci Fenn Math: Dissertations,2000,122:1-54.

[10] 郑秀敏,陈宗煊. 单位圆内线性齐次微分方程解与系数的关系及应用[J]. 华南师范大学学报:自然科学版,2009(2):12-15.

[11] Wang Yuefei. Oscillatory solutions of nonhomogeneous linear differential equations [J]. Arch Math,1997,68(4):300-310.

Oscillatory Solutions of Nonhomogeneous Linear Differential Equation in the Unit Disc

XIAO Li-peng,LI Ming-xing

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The oscillatory solutions of higher-order nonhomogeneous linear differential equation in the unit disc are discussed. Results concerning the equation $f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F$ (where $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ and F are meromorphic functions in the unit disc),and possessing an oscillatory solution subspace in which all solutions (which at most one exception) have infinite exponent of convergence of zeros are obtained.

Key words: unit disc; linear differential equations; meromorphic function; exponent of convergence of zero-sequence

(责任编辑:王金莲)