文章编号:1000-5862(2013)02-0171-04

关于 2 阶线性微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性

刘旭强,易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:运用 Nevanlinna 值分布的理论和方法,研究了 2 阶亚纯系数线性微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性,在假设 A 或 B 具有有限或无穷亏值的不同条件下,证明了方程的每一非零解的增长级均为无穷.

关键词:微分方程;亚纯函数;亏值;无穷级

中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言与结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号[1-2],用 $T(r,f)$ 表示亚纯函数 f 的特征函数,$\rho(f)$,$\mu(f)$ 分别表示亚纯函数 f 的增长级和下级,$\delta(a,A)$ 表示函数 A 在亏值点 a 处的亏量,$\deg P$ 则表示多项式 $P(z)$ 的次数.

关于 2 阶线性微分方程

$$f''+Af'+Bf=0, \tag{1}$$

当 $A(z)$,$B(z)$ 为整函数,且 $B(z)$ 为超越时,文献[3]证明了方程(1)的任意 2 个线性无关解 f_1,f_2 至少有 1 个解的增长级为无穷. 然而,方程(1)也的确存在有限级非零解. 例如,$f(z)=e^{-z}$ 满足方程 $f''+e^zf'+(e^z-1)f=0$.

自然会问:当 $A(z)$,$B(z)$ 满足什么条件时才能保证方程(1)的每一非零解都具有无穷级呢?在这方面,前人已经做了大量工作,并得到了一些重要的结果. 例如,文献[4-5]证明了:若 $A(z)$,$B(z)$ 为整函数且满足 $\rho(A)<\rho(B)$;或 $A(z)$ 为多项式,$B(z)$ 是超越的;或 $\rho(B)<\rho(A)\leqslant 1/2$,则方程(1)的每一非零解的级均为无穷;文献[6]也对某些具有特殊形式系数的方程进行了研究,证明了方程的每 1 个非零解的级均为无穷. 但是就一般情况而言,比如当 $\rho(A)=\rho(B)$,或 $\rho(B)<\rho(A)$ 且 $\rho(A)>1/2$ 时,方程(1)的非零解的增长级不一定都是无穷. 例如,$f(z)=e^{P(z)}$ 满足方程

$$f''+A(z)f'+(-P''-(-P')^2-A(z)P')f=0,$$

其中 $A(z)$ 为整函数,$P(z)$ 为非零多项式.

研究表明,亏值理论在值分布理论中起着重要作用. 2011 年伍鹏程、朱军等从系数函数具有亏值的情形出发,研究了方程(1)解的增长性,在文献[7]中证明了几类方程的非零解均具有无穷级,其主要结果叙述如下.

定理 A 假设 $A(z)$ 为有限级整函数且具有有限亏值,$B(z)$ 是超越整函数,并满足 $\mu(B)<1/2$,那么方程(1)的每 1 个非零解均为无穷级.

定理 B 假设 $A(z)$ 为有限级整函数且具有有限亏值,$B(z)$ 为不恒为 0 的整函数. 若存在 2 个实数 $\alpha>0$,$\beta>0$,$\forall\varepsilon>0$,存在 2 组数 $\{\phi_k\}$,$\{\theta_k\}$ 满足

$$\phi_1<\theta_1<\phi_2<\theta_2<\cdots<\phi_m<\theta_m<\phi_{m+1}(\phi_{m+1}=\phi_1+2\pi),且\sum_{k=1}^{m}(\phi_{k+1}-\theta_k)<\varepsilon,$$

当 $z\to\infty$,$\phi_k\leqslant\arg z\leqslant\theta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 时,有

$$|B(z)|\geqslant\exp\{(1+o(1))\alpha|z|^\beta\},$$

则方程(1)的每 1 个非零解的级均为无穷.

定理 C 假设 $A(z)$ 为有限级整函数且存在有限亏值,$B(z)$ 为不恒为 0 的整函数,$\forall k>0$,在除去一对数测度为有限的 r 值集外,有

$$\lim_{|z|=r\to\infty}|B(z)|/r^k=\infty$$

成立,那么方程(1)的每 1 个非零解的级均为无穷.

石磊在文献[8]中将上述结果推广到了高阶方程的情形,本文将继续从亏值的角度来限制亚纯系数 $A(z)$,$B(z)$,讨论方程(1)解的增长性,得到以下结果.

定理 1 假设 $A(z)$,$B(z)$ 均为有限正级亚纯函数,$B(z)$ 为超越的且以无穷远点为亏值,若 $\forall\varepsilon>$

收稿日期:2012-09-10

基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.

通信作者:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

0,存在2个实数$\alpha>0$,$\beta>0$及2组数$\{\phi_k\}$,$\{\theta_k\}$满足

$$\phi_1<\theta_1<\phi_2<\theta_2<\cdots<\phi_m<\theta_m<\phi_{m+1}(\phi_{m+1}=\phi_1+2\pi)$$ 且 $\sum_{k=1}^{m}(\phi_{k+1}-\theta_k)<\varepsilon$,

当$z\to\infty$,$\phi_k\leqslant\arg z\leqslant\theta_k(k=1,2,\cdots,m)$时,有

$$|A(z)|\leqslant(1+o(1))\alpha|z|^{\beta},$$

那么方程(1)的每1个非零解的级均为无穷.

定理2 假设$A(z)$为有限正级亚纯函数且存在有限亏值,$P(z)$为n次多项式$(n\geqslant1)$,$h(z)$亚纯,且$\rho(h)<n$. 令$B_1(z)=h(z)e^{P(z)}$,$B_2(z)=h(z)e^{-P(z)}$,则下面2个方程

$$f''+Af'+B_if=0(i=1,2) \tag{2}$$

中至少有1个方程,它的每一非零解的级均为无穷.

定理3 假设$B(z)$是以无穷远点为亏值的有限级亚纯函数,$P(z)$为n次多项式$(n\geqslant1)$,$h(z)$亚纯,且$\rho(h)<n$. 令$A_1(z)=h(z)e^{P(z)}$,$A_2(z)=h(z)e^{-P(z)}$,则下面2个方程

$$f''+A_if'+Bf=0(i=1,2) \tag{3}$$

中至少有1个方程,它的每一非零解的级均为无穷.

1 引理

定理的证明需要用到下面的引理和相关记号.

设$P(z)=(\alpha+\beta i)z^n+\cdots(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$为非常数多项式,$z=re^{i\theta}$. 记$\delta(P,\theta)=\alpha\cos n\theta-\beta\sin n\theta$,$\theta\in[0,2\pi)$.

引理1[9] 设$w(z)$是开平面上有限ρ级超越亚纯函数,$\Gamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_m,j_m)\}$是由不同整数对组成的有限集,满足$k_i>j_i\geqslant0$,$i=1,2,\cdots,m$,又设$\varepsilon>0$是给定的常数,则

(i)存在零测度集$E_1\subset[0,2\pi)$,使得如果$\varphi_0\in[0,2\pi)/E_1$,则存在常数$R_0=R_0(\varphi_0)>0$,对满足$|z|\geqslant R_0$的所有$z=re^{i\varphi_0}$及对所有$(k,j)\in\Gamma$,都有

$$|w^{(k)}(z)/w^{(j)}(z)|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}; \tag{4}$$

(ii)存在对数测度为有限的集合$E_2\subset(1,\infty)$,使得对满足$|z|\notin E_2\cup[0,1]$的所有z及对所有$(k,j)\in\Gamma$,(4)式成立;

(iii)存在测度为有限的集合$E_3\subset[0,\infty)$,使得对满足$|z|\notin E_3$的所有z及对所有$(k,j)\in\Gamma$,都有

$$|w^{(k)}(z)/w^{(j)}(z)|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}.$$

引理2[10] 设$A(z)$为具有有限亏值a的亚纯函数,$0<\rho(A)<\infty$,$B(z)$是以∞为亏值的有限级亚纯函数,假设$\beta(\beta>1)$和$\eta(0<\eta<\rho(A))$是2个常数,那么存在趋于无穷的序列$\{t_n\}$,满足

$$\lim_{n\to\infty}t_n^{\eta}/T(t_n,A)=0.$$

进一步,对每1个充分大的n,存在子集$F_n\subset[t_n,(\beta+1)t_n]$,其测度$m(F_n)\leqslant(\beta-1)t_n/4$,使得对所有$R\in[t_n,\beta t_n]\backslash F_n$,有

$$\begin{cases} m(E_a(R))=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\,\middle|\,\log\dfrac{1}{|A(Re^{i\theta})-a|}\geqslant\dfrac{\delta}{4}T(R,A)\right\}\right)\geqslant M_1>0,\\ m(E_\infty(R))=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\,\middle|\,\log|B(Re^{i\theta})|\geqslant\dfrac{\delta_1}{4}T(R,B)\right\}\right)\geqslant M_2>0 \end{cases}$$

成立,其中M_1,M_2是仅依赖于$A(z)$,$B(z)$,β,η,$\delta=\delta(a,A)$和$\delta_1=\delta(\infty,B)$的正常数.

由文献[11]的引理1.20容易得出

引理3 设$P(z)$为n次多项式,$h(z)$亚纯且$\rho(h)<n$,$g_1(z)=h(z)e^{P(z)}$,$g_2(z)=h(z)e^{-P(z)}$. 令

$$E_1=\{\theta:\delta(P,\theta)>0\},E_2=\{\theta:\delta(P,\theta)<0\},$$
$$m(E_1)=m(E_2)=\pi,$$

则存在零测度集$H\subseteq[0,2\pi)$,当$\theta\in E_1/H$,$r>r_0(\theta)$时,有

$$|g_1(re^{i\theta})|>\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\theta)r^n\right\},$$

$$|g_2(re^{i\theta})|<\exp\left\{-\frac{1}{2}\delta(P,\theta)r^n\right\}.$$

当$\theta\in E_2/H$,$r>r_0(\theta)$时,有

$$|g_2(re^{i\theta})|>\exp\left\{-\frac{1}{2}\delta(P,\theta)r^n\right\},$$

$$|g_1(re^{i\theta})|<\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\theta)r^n\right\}.$$

2 定理的证明

定理1的证明 设f为方程(1)的非零解,且$\rho(f)<+\infty$,记$B(z)$在无穷远的亏量为$\delta_1=\delta(\infty,B)$,由方程(1)可得

$$|B(z)|\leqslant\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right|+\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right||A(z)|. \tag{5}$$

由引理1(iii),$\exists E\subset(0,\infty)$,其测度$m(E)<+\infty$,当$|z|=r\notin E\cup[0,r_0](r_0>1)$时,有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\leqslant|z|^{2(\rho(f)+1)}(j=1,2). \tag{6}$$

由引理2知,在$(r_0,\infty)/E$上存在趋于无穷的序列$\{R_n\}$,当n充分大时,有

$$m(E_\infty(R_n)) = m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi) \,\middle|\, \log|B(R_n e^{i\theta})| \geqslant \frac{\delta_1}{4}T(R_n,B)\right\}\right) \geqslant M_2 > 0.$$

取 $\varepsilon < M_2/2$，则 $\exists\varphi_n \in E_\infty(R_n)\cap(\bigcup_{k=1}^{m}[\phi_k,\theta_k])$，使得

$$|B(R_n e^{i\varphi_n})| \geqslant \exp\left\{\frac{\delta_1}{4}T(R_n,B)\right\}. \quad (7)$$

将(6)～(7)式及关于 $|A(z)|$ 的限制条件代入(5)式得

$$\exp\left\{\frac{\delta_1}{4}T(R_n,B)\right\} \leqslant |z|^{2(\rho(f)+\varepsilon)}[1+(1+o(1))\alpha|z|^\beta] \leqslant M|z|^N, \quad (8)$$

其中 $M>0$，$N=\beta+2(\rho(f)+1)$. 对(8)式两边取对数，便有 $T(R_n,B)=O(\log R_n)$. 这显然与 $B(z)$ 是超越函数矛盾.

所以 $\rho(f)=+\infty$. 定理 1 得证.

定理 2 的证明　设 $f_i(i=1,2)$ 分别为方程(2)中对应于 $i=1,2$ 时的非零解，且 $\rho(f_i)<+\infty(i=1,2)$，a 为 $A(z)$ 的亏值，$\delta=\delta(a,A)>0$ 为 $A(z)$ 在 a 点处的亏量. 由方程(2)，有

$$|B_i(z)| \leqslant \left|\frac{f''_i(z)}{f_i(z)}\right| + \left|\frac{f'_i(z)}{f_i(z)}\right|(|A(z)-a|+|a|)\ (i=1,2). \quad (9)$$

由引理 1(iii)，$\exists E\subset(0,\infty)$ 满足 $m(E)<+\infty$，当 $|z|=r\notin E\cup[0,r_0]\ (r_0>1)$ 时，有

$$\left|\frac{f_i^{(j)}(z)}{f_i(z)}\right| \leqslant |z|^{2(\rho(f)+1)}\ (i,j=1,2). \quad (10)$$

由引理 2，在 $(r_0,\infty)/E$ 上存在趋于无穷序列 $\{R_k\}$，当 k 充分大时，有

$$m(E_a(R_k)) = m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi) \,\middle|\, \log\frac{1}{|A(R_k e^{i\theta})-a|} \geqslant \frac{\delta}{4}T(R_k,A)\right\}\right) \geqslant M_1 > 0.$$

所以，当 $\theta\in E_a(R_k)$ 时，有

$$|A(R_k e^{i\theta})-a| \leqslant \exp\left\{-\frac{\delta}{4}T(R_k,A)\right\}. \quad (11)$$

由引理 3，取 $E_1^*=E_1/H$，$E_2^*=E_2/H$，显然有 $m(E_1^*)=m(E_2^*)=\pi$，$E_1^*\cap E_2^*=\varnothing$. 从而当 k 充分大时，$E_a(R_k)\cap E_1^*$，$E_a(R_k)\cap E_2^*$ 中至少有 1 个为非空集合. 不妨设 $E_a(R_k)\cap E_1^*\neq\varnothing$，则取 $\phi_k^{(1)}\in E_a(R_k)\cap E_1^*$. 随着 $k\to\infty$，可取到 1 列含有无穷多元素的序列 $\{\phi_k^{(1)}\}$，再取 $z_k=R_k e^{i\phi_k^{(1)}}$，由引理 3，当 R_k 充分大时，有

$$|B_1(z_k)| > \exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\phi_k^{(1)})R_k^n\right\}. \quad (12)$$

将(10)～(12)式代入(9)式，有

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\delta(P,\phi_k^{(1)})R_k^n\right\} < |B_1(z_k)| \leqslant R_k^N(1+o(1)),$$

其中 $N=2(\rho(f)+1)$，由于在 E_1^* 中 $\delta(P,\phi_k^{(1)})>0$，所以上式当 $k\to\infty$ 时导出矛盾!

故方程(2)中当 $i=1$ 时的每一非零解的级均为无穷.

同理，当 $E_a(R_k)\cap E_2^*\neq\varnothing$ 时，可证方程(2)中当 $i=2$ 时的每 1 个非零解的级均为无穷.

定理 2 得证.

定理 3 的证明　设 $f_i(i=1,2)$ 分别为方程(2)中对应于 $i=1,2$ 时的非零解，且 $\rho(f_i)<+\infty(i=1,2)$，$\delta_1=\delta(\infty,B)$ 为 $B(z)$ 在无穷远点的亏量. 由方程(3)可得

$$|B(z)| \leqslant \left|\frac{f''_i(z)}{f_i(z)}\right| + |A_i(z)|\left|\frac{f'_i(z)}{f_i(z)}\right|\ (i=1,2). \quad (13)$$

类似于定理 1 前半部分的证明，在 $(r_0,\infty)/E$ 上存在趋于无穷的序列 $\{R_k\}$，当 k 充分大时，满足

$$m(E_\infty(R_k)) = m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi) \,\middle|\, \log|B(R_k e^{i\theta})| \geqslant \frac{\delta_1}{4}T(R_k,B)\right\}\right) \geqslant M_2 > 0.$$

当 $\theta\in E_\infty(R_k)$ 时，有

$$|B(R_k e^{i\theta})| \geqslant \exp\left\{\frac{\delta_1}{4}T(R_k,B)\right\}. \quad (14)$$

类似于定理 2 的证明，可取出 2 组集合 $\{\phi_k^{(1)}\}$，$\{\phi_k^{(2)}\}$，其中

$$\phi_k^{(1)}\in E_\infty(R_n)\cap E_1^*,\ \phi_k^{(2)}\in E_\infty(R_n)\cap E_2^*,$$

两者中至少有 1 个有无穷个元素.

若 $\{\phi_k^{(1)}\}$ 中有无穷项，取 $z_k=R_k e^{i\phi_k^{(1)}}$，由引理 3，有

$$|A_2(z_k)| < \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta(P,\phi_k^{(1)})R_k^n\right\}. \quad (15)$$

将(10)、(14)～(15)式代入(13)式，当 $k\to\infty$ 时，导出矛盾!

所以方程(3)中当 $i=2$ 时的每一非零解的级均为无穷.

同理，若 $\{\phi_k^{(2)}\}$ 中有无穷项，则方程(3)中当 $i=1$ 时的每 1 个非零解的级均为无穷.

定理 3 得证.

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain [M]. New York: Wiley, 1976.

[4] Gundersen G G. Finite order solution of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc, 1988, 305(1): 415-429.

[5] Hellenstein S, Miles J, Rossi J. On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 324(2): 693-706.

[6] 毛志强. 某类二阶微分方程解的增长级与零点 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2001, 25(4): 334-338.

[7] Wu Pengcheng, Zhu Jun. On the growth of solutions of the complex differential equation $f''+Af'+Bf=0$ [J]. Science China: Mathematics, 2011, 54(5): 939-947.

[8] 石磊, 易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(3): 230-233.

[9] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37(1): 88-104.

[10] Wu Pengcheng, Wu Shengjian, Zhu Jun. On the growth of solutions of second order complex differential equation with meromorphic coefficients [J]. Joumal of Inequalities and Applications, 2012, 117: 1-13.

[11] 高仕安, 陈宗煊, 陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998.

On the Growth of Solutions of the Second Order Linear Differential Equation $f''+Af'+Bf=0$

LIU Xu-qiang, YI Cai-feng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: By using the fundamental theory and method of value distribution of Nevanlinna, the growth of solutions of the second order linear differential equations $f''+Af'+Bf=0$ is considered where $A(z)$ and $B(z)$ are meromorphic function. Assuming $A(z)$ or $B(z)$ have a finite or infinite deficient value, it was proved that every solution $f\not\equiv 0$ of the complex differential equation has infinite order.

Key words: differential equations; meromorphic function; deficient value; infinite order

(责任编辑: 王金莲)