第 37 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 2
2013 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2013

文章编号: 1000-5862(2013)02-0175-04

Clifford 分析中无界域上 k-正则函数带 Haseman 位移的边值条件

房彦兵,韩惠丽*,张 岩

(宁夏大学数学与计算机学院,宁夏 银川 750021)

摘要: 利用积分方程方法及压缩不动点定理研究了 Clifford 分析中无界域上 k-正则函数 Haseman 位移的边值问题,证明了该问题解的存在唯一性.

关键词: Clifford 分析; k-正则函数; 无界域

中图分类号: O 175.4 **文献标志码**: A

0 引言

边值问题解的存在唯一性问题已有很多研究成果[1-2]. Clifford 分析是 20 世纪初创立的一个新兴的数学分支,它主要研究从实变量到实 Clifford 代数的函数性质. 自 1970 年以来,许多学者对 Clifford 分析中有界域上各种函数的性质和边值问题做了大量研究[3-11]. 而在实际应用中,在无界域上提出的问题愈来愈多,因此研究无界域上函数的性质和边值问题变得很有必要. 文献[12-13]中研究了无界域上正则函数的边值问题,本文在此基础上讨论无界域上k-正则函数的带 Haseman 边值问题.

1 预备知识

设 $A_n(\mathbf{R})$ 为实 Clifford 代数,其基由所有 $e_A = e_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_h}$ 和 e_φ 构成,这里 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_h\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$, $1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h\leqslant n$, $e_\varphi=e_0$ 是 $A_n(\mathbf{R})$ 中的单位元. $A_n(\mathbf{R})$ 中元素为 $u=\sum\limits_A u_A e_A$ $(u_A\in\mathbf{R})$, 其乘法满足可结合不可交换的法则,

$$e_i^2=-1,\ e_ie_j=-e_je_i,\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

$\forall u\in\mathbf{R}^n$, 规定从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的 3 种运算:

对合运算 $u'=\sum\limits_A(-1)^{|A|}u_Ae_A$;

反演运算 $u^*=\sum\limits_A(-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}}u_Ae_A$;

共轭运算 $\bar{u}=(u^*)'=(u')^*$,

这里 $|A|$ 为指标集 A 中元素的个数,空集的指标为 0.

定义 $A_n(\mathbf{R})$ 中的模为 $|u|^2=\sum\limits_A|u_A|^2$, 所以易知有下列式子成立:

$|\bar{u}|=|u|$, $|u+v|\leqslant|u|+|v|$, $|uv|\leqslant J_0|u||v|$,

其中 J_0 是一个正常数. $H(\partial\Omega,\beta)$ 表示有界 Hölder 连续函数所构成的函数集,其 Hölder 指数为 $\beta(0<\beta<1)$. $\forall\varphi\in H(\partial\Omega,\beta)$, φ 的模定义为

$$\|\varphi\|_\beta=C(\varphi,\partial\Omega)+H(\varphi,\partial\Omega,\beta),$$

其中

$$C(\varphi,\partial\Omega)=\sup_{t\in\partial\Omega}|\varphi(t)|,$$

$$H(\varphi,\partial\Omega,\beta)=\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\partial\Omega}\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\beta},$$

因此 $H(\partial\Omega,\beta)$ 构成 Banach 空间,且有 $\|\bar{\varphi}\|_\beta=\|\varphi\|_\beta$. $\forall f,g\in H(\partial\Omega,\beta)$, 有

$$\|f+g\|_\beta\leqslant\|f\|_\beta+\|g\|_\beta,$$
$$\|fg\|_\beta\leqslant J_0\|f\|_\beta\|g\|_\beta.$$

记 C^r 类函数集合为

$$F_D^r=\{f\,|\,f:D\to A_n(\mathbf{R}),\ f(x)=\sum_A f_A(x)e_A,\ f_A(x)\in C^r(D)\},$$

其中 $r\geqslant1$, D 为 $\mathbf{R}^n$ 中非空连通开集.

定义算子

$$\bar{\partial}=\sum_{j=0}^n\frac{\partial}{\partial x_j}e_j,$$

收稿日期: 2012-09-18

基金项目: 宁夏自然科学基金(NZ1101)资助项目.

通信作者: 韩惠丽(1972-),女,河北石家庄人,教授,博士,主要从事复分析及其应用的研究.

其共轭算子为

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} e_j.$$

显然 $\partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial = \Delta_{n+1}$，$\Delta_{n+1}$ 是 $n+1$ 维 Laplace 算子.

定义 1 若 $\bar{\partial} f = 0$，则称 f 为正则函数; 若 $\bar{\partial}^k f = 0$，则称 f 为 k 正则函数.

定义 2 设 $\Omega \in \mathbf{R}^{n+1}$ 是具有光滑定向的 Liapunov 边界 $\partial\Omega$ 的无界域，其余集包含 1 个非空开集，选定位于 $\bar{\Omega}$ 的余集中的 1 个点 y，ω_{n-1} 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中单位球面的面积，$\xi \in \partial\Omega$，$x \in \Omega$，称

$$l(\xi, x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \left(\frac{\bar{\xi} - \bar{x}}{|\xi - x|^{n+1}} - \frac{\bar{\xi} - \bar{y}}{|\xi - y|^{n+1}} \right)$$

为 n 维无界域 $\partial\Omega$ 上的修正 Cauchy 核.

定义 3 称积分

$$\Phi(x) = \int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} \cdot (u_0 - x_0)^j \varphi_j(u) \right] \mathrm{d}_s(u) \quad (x \in \mathbf{R}^{n+1}/\Sigma)$$

为修正的 k-正则函数的 Cauchy 型积分.

引理 1(无界域上 k-正则函数的 Cauchy 积分公式) 设 D 如上所述，f 为 D 内的 k-正则函数，则对 $x \in D$，有

$$\int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} (u_0 - x_0)^j \bar{\partial}_u^j f(u) \right] \mathrm{d}_s(u) = f(x),$$

其中 $u = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$，$\boldsymbol{n}(u)$ 是沿 Σ 的外法线方向的单位向量，$\mathrm{d}_s(u)$ 是 Σ 上的 Lebesgue 测度.

引理 2(无界域上 k-正则函数的 Plemelj 公式)

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{\partial}^m \Phi(t))^+}{\bar{\partial}^m t} = \dfrac{\varphi_m(t)}{2} + \displaystyle\int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \cdot \left[\sum_{j=m}^{k-1} \frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!} (u_0 - t_0)^{j-m} \varphi_j(u) \right] \mathrm{d}_s(u), \\ \dfrac{(\bar{\partial}^m \Phi(t))^-}{\bar{\partial}^m t} = -\dfrac{\varphi_m(t)}{2} + \displaystyle\int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \cdot \left[\sum_{j=m}^{k-1} \frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!} (u_0 - t_0)^{j-m} \varphi_j(u) \right] \mathrm{d}_s(u), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $m = 0, 1, \cdots, k-1$. 令

$$P_m \varphi_m(x) = P.V. \int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \left[\sum_{j=m}^{k-1} \frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!} \cdot (u_0 - t_0)^{j-m} \varphi_m(u) \right] \mathrm{d}_s(u), \tag{2}$$

则有类似的 Plemelj 公式

$$\frac{(\bar{\partial}^m \Phi(d(t)))^+}{\bar{\partial}^m t} = \frac{\varphi_m(d(t))}{2} + \int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \cdot \left[\sum_{j=m}^{k-1} \frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!} (u_0 - t_0)^{j-m} \varphi_j(d(u)) \right] \mathrm{d}_s(u), \tag{3}$$

$$\frac{(\bar{\partial}^m \Phi(d(t)))^-}{\bar{\partial}^m t} = -\frac{\varphi_m(d(t))}{2} + \int_{\Sigma} L(u, x)\, \boldsymbol{n}(u) \cdot \left[\sum_{j=m}^{k-1} \frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!} (u_0 - t_0)^{j-m} \varphi_j(d(u)) \right] \mathrm{d}_s(u). \tag{4}$$

令

$$\tilde{P}_m \varphi_m(x) = P_m \varphi_m(d(x)), \quad \tilde{\varphi}_m(x) = \varphi(d(x)). \tag{5}$$

定义4 设 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$d(t)$ 和 $g(t)$ 为 $\partial\Omega$ 上的给定函数，Ω，$\partial\Omega$ 如前所述，且 $d(t)$ 为 $\partial\Omega$ 到自身的同构映射. 记 $\Omega^+ = \Omega$，$\Omega^- = \mathbf{R}^{n+1} \backslash \bar{\Omega}$，寻求1个在 $\Omega^{\pm}$ 内 k-正则、在 $\Omega^{\pm} \cup \partial\Omega$ 上连续且 $\Phi^-(y) = 0$ 的函数 $\Phi(x)$，且满足边界条件:

$$\begin{cases} a(t)\Phi^+(t) + b(t)\Phi^+(d(t)) + c(t)\Phi^-(t) = g(t), \\ a(t)\left(\dfrac{\bar{\partial}\Phi(t)}{\bar{\partial}t}\right)^+ + b(t)\left(\dfrac{\bar{\partial}\Phi(d(t))}{\bar{\partial}t}\right)^+ + c(t)\left(\dfrac{\bar{\partial}\Phi(t)}{\bar{\partial}t}\right)^- = g(t), \\ \qquad \vdots \\ a(t)\left(\dfrac{\bar{\partial}^{k-1}\Phi(t)}{\bar{\partial}t^{k-1}}\right)^+ + b(t)\left(\dfrac{\bar{\partial}^{k-1}\Phi(d(t))}{\bar{\partial}t^{k-1}}\right)^+ + c(t)\left(\dfrac{\bar{\partial}^{k-1}\Phi(t)}{\bar{\partial}t^{k-1}}\right)^- = g(t), \end{cases} \tag{6}$$

称此边值问题为无界域上 k-正则函数的带 Haseman 位移的边值问题，简称 k-正则函数的 SR 问题.

下面将此问题转化为积分方程问题，进而求解.

首先将(1) ~ (5) 式代入(6) 式得

$$a(\varphi_m/2 + P_m\varphi_m) + b(\tilde{\varphi}_m/2 + \tilde{P}_m\varphi_m) + c(-\varphi_m/2 + P_m\varphi_m) = g(t), \quad m = 0, 1, \cdots, k-1,$$

即

$$(a + c)(-\varphi_m/2 + P_m\varphi_m) + b(\tilde{\varphi}_m/2 + \tilde{P}_m\varphi_m) + (1 - a)\varphi_m - g(t) = \varphi_m. \tag{7}$$

引入算子

$$F\varphi_m = (a + c)(-\varphi_m/2 + P_m\varphi_m) + b(\tilde{\varphi}_m/2 + \tilde{P}_m\varphi_m) + (1 + a)\varphi_m - g,$$

因此方程(7) 可写为

$$F\varphi_m = \varphi_m.$$

此时已将拟求解的 k-正则函数的 SR 边值问题转化为求解上述积分方程，故有必要给出以下结论.

引理 3 引入算子 θ: $\theta\varphi = \varphi/2 - P\varphi$，其中 $\varphi \in H(\partial\Omega, \beta)$，那么存在与 φ 无关的正常数 J_1，使得

$$\| \theta\varphi \|_\beta \leqslant J_1 \| \varphi \|_\beta.$$

引理4 设位移 $d = d(x)$ ($x \in \partial\Omega$) 在 $\partial\Omega$ 上满足 Lipschitz 条件，即 $\forall x, \hat{x} \in \partial\Omega$，有 $|d(x) - d(\hat{x})| \leqslant$

$J_3 | x - \hat{x} |$，引入算子

$$\tilde{\theta}\varphi = \tilde{\varphi}/2 + \tilde{P}\varphi = \varphi(d(x))/2 + P\varphi(d(x)),$$

那么 $\forall \varphi \in H(\partial\Omega,\beta)$，存在不依赖于 φ 的常数 J'_6，使得

$$\| \tilde{\theta}\varphi \|_\beta \leqslant J'_6 \| \varphi \|_\beta.$$

引理 5　在引理 4 的条件下，存在不依赖于 φ 的常数 J_7，有

$$\| -\tilde{\varphi}/2 + \tilde{P}\varphi \|_\beta \leqslant J_7 \| \varphi \|_\beta.$$

2　主要定理及其证明

定理 1　对于算子 θ_{k-1}：$\theta_{k-1}\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}/2 - P_{k-1}\varphi_{k-1}$，其中 $\varphi_{k-1} \in H(\partial\Omega,\beta)$，有

$$\| \theta\varphi_{k-1} \|_\beta \leqslant J_1 \| \varphi_{k-1} \|_\beta.$$

证　由 Plemelj 公式和引理 3 可得到结论.

推论 1　对于算子

$$\tilde{\theta}_{k-1}\varphi_{k-1} = \tilde{\varphi}_{k-1}/2 + \tilde{P}_{k-1}\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(d(x))/2 + P_{k-1}\varphi_{k-1}(d(x)),$$

同样有

$$\| \tilde{\theta}_{k-1}\varphi_{k-1} \|_\beta \leqslant J'_6 \| \varphi_{k-1} \|_\beta.$$

定理 2　设 k-正则函数的 SR 问题中位移 $d = d(t)$ 满足 Lipschitz 条件，且 $a(t), b(t), c(t), g(t) \in H(\partial\Omega,\beta)$. 若

$$\| a + c \|_\beta < \varepsilon < 1,$$

$$\| b \|_\beta < \varepsilon < 1, \quad \| 1 + a \|_\beta < \varepsilon < 1,$$

$$0 < u = \varepsilon 2^{n-1}(J_2 + J'_6 + 1) < 1,$$

$$\| g \|_\beta < M(1 - u),$$

则 SR 问题的第 k 个方程存在唯一解，这里 M 是 1 个给定的常数.

证　设 $T = \{ \varphi_{k-1} | \varphi_{k-1} \in H(\Sigma,\beta), \| \varphi \|_\beta \leqslant M\}$ 表示 Banach 空间 $H(\Sigma,\alpha)$ 的闭子空间，则

$$\| F\varphi_{k-1} \|_\beta \leqslant 2^{n-1} \| a + c \|_\beta \| \theta_{k-1}\varphi_{k-1} \|_\beta + 2^{n-1} \| 1 + a \|_\beta \| \varphi_{k-1} \|_\beta + 2^{n-1} \| b \|_\beta \| \tilde{\theta}_{k-1}\varphi_{k-1} \|_\beta + \| g \|_\beta \leqslant 2^{n-1}\varepsilon J_2 \| \varphi_{k-1} \|_\beta + 2^{n-1}\varepsilon J'_6 \| \varphi_{k-1} \|_\beta + \| g \|_\beta \leqslant uM + \| g \|_\beta \leqslant M,$$

所以 F 是由 T 到 T 自身的映射. $\forall \varphi'_{k-1}, \varphi''_{k-1} \in H(\partial\Omega,\beta)$，则

$$F\varphi'_{k-1} - F\varphi''_{k-1} = (a + c)[-(\varphi'_{k-1} - \varphi''_{k-1})/2 + P(\varphi'_{k-1} - \varphi''_{k-1})] + b[(\tilde{\varphi}'_{k-1} - \tilde{\varphi}''_{k-1})/2 + \tilde{P}_{k-1}(\varphi'_{k-1} - \varphi''_{k-1})] + (1 + a)(\varphi'_{k-1} - \varphi''_{k-1}).$$

根据范数的定义，类似于上面的讨论，则有

$$\| F\varphi'_{k-1} - F\varphi''_{k-1} \|_\beta \leqslant u \| \varphi'_{k-1} - \varphi''_{k-1} \|_\beta.$$

因为 $0 < u < 1$，因此 F 是由 Banach 空间 T 到自身的压缩映射. 由压缩不动点原理知，存在唯一的不动点 $\varphi_{k-1}(x)$，使得 $F\varphi_{k-1}(x) = \varphi_{k-1}(x)$，因此第 k 个方程存在唯一解

$$\Phi_k(x) = \int_\Sigma L(u,x)\boldsymbol{n}(u)\varphi_{k-1}(x)\,\mathrm{d}_s(u).$$

推论 2　设 $\varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}, \cdots, \varphi_{m+1} \in H(\partial\Omega,\beta)$ 已确定，则有

$$\| \theta_m\varphi_m \|_\beta \leqslant J_2 \| \varphi_m \|_\beta, m = 0, \cdots, k - 2.$$

证　由 $P_m\varphi_m(x) = P.V.\int_\Sigma L(u,x)\boldsymbol{n}(u) \cdot \left[\sum_{j=m}^{k-1} \frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!}(u_0 - t_0)^{j-m}\varphi_j(u)\right]\mathrm{d}_s(u)$ 得

$$|\theta_m\varphi_m| = \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}_s(u) - P_m\varphi_m \right| = \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x)\left[\varphi_m(x) - \sum_{j=m}^{k-1}\frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!}(u_0 - t_0)^{j-m}\varphi_j(u)\right]\mathrm{d}_s(u) \right| = \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x) \cdot \left[(\varphi_m(x) - \varphi_m(u))\sum_{j=m+1}^{k-1}\frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!}(u_0 - t_0)^{j-m} \cdot \varphi_j(u)\right]\mathrm{d}_s(u) \right| \leqslant \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x)(\varphi_m(x) - \varphi_m(u))\,\mathrm{d}_s(u) \right| + \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x)\sum_{j=m+1}^{k-1}\frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!} \cdot (u_0 - t_0)^{j-m}\varphi_j(u)\,\mathrm{d}_s(u) \right|.$$

令

$$L_1 = \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x)(\varphi_m(x) - \varphi_m(u))\,\mathrm{d}_s(u) \right|,$$

$$L_2 = \left| P.V.\int_{\partial\Omega} L(u,x)\boldsymbol{n}(x)\sum_{j=m+1}^{k-1}\frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!}(u_0 - t_0)^{j-m}\varphi_j(u)\,\mathrm{d}_s(u) \right|,$$

由文献[7]中引理 3 的证明知，$L_1 \leqslant M_6 \| \varphi_m \|_\beta$.

而对于 L_2，因为 u_0, t_0 均为固定点，所以存在常数 M_1，使得

$$\| u_0 - t_0 \| \leqslant M_1.$$

因为 $\varphi_{k-1}, \cdots, \varphi_{m+1}$ 均确定，所以

$$L_2 \leqslant \sum_{j=m+1}^{k-1}\frac{1}{(j-m)!}|\varphi_j(u)| M_1^{j+m}/2 \leqslant \sum_{j=m+1}^{k-1} M_1^{j+m} \cdot |\varphi_j(u)| = M_1^{j+m}(|\varphi_{m+1}(u)| + \cdots + |\varphi_{k-1}(u)|) \leqslant M_1^{j+m}(k - m - 1)\max\{|\varphi_j|\} \leqslant M_1^{j+m}(k - m - 1)C(\partial\Omega,\varphi_j(u)) \leqslant M_1^{j+m}(k - m - 1)\| \varphi_j(u) \|, j = m + 1, \cdots, k + 1.$$

不妨设 $|\varphi_{m+1}| = \max\{\varphi_{m+1}, \cdots, \varphi_{k-1}\}$. 由模的定义

$$\| \varphi_{m+1} \| = C(\partial\Omega,\varphi_{m+1}(t)) + H(\partial\Omega,\beta,\varphi_{m+1}(t)) =$$

$$\sup_{t\in\partial\Omega}|\varphi_{m+1}(t)|+\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\partial\Omega}\frac{|\varphi_{m+1}(t_1)-\varphi_{m+1}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}$$

知,存在常数 M_2,M_3 使得

$$\sup_{t\in\partial\Omega}|\varphi_{m+1}(t)|=M_2\sup_{t\in\partial\Omega}|\varphi_m(t)|,$$

$$\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\partial\Omega}\frac{|\varphi_{m+1}(t_1)-\varphi_{m+1}(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}=M_3\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\partial\Omega}\frac{|\varphi_m(t_1)-\varphi_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}.$$

因此

$$\|\varphi_{m+1}\|=M_2\sup_{t\in\partial\Omega}|\varphi_m(t)|+M_3\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\partial\Omega}\frac{|\varphi_m(t_1)-\varphi_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}\leqslant$$
$$\max\{M_2,M_3\}\left(\sup_{t\in\partial\Omega}|\varphi_m(t)|+M_3\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\partial\Omega}\frac{|\varphi_m(t_1)-\varphi_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}\right)=$$
$$\max\{M_2,M_3\}\|\varphi_m\|_{\beta}\leqslant M_4\|\varphi_m\|_{\beta}.$$

所以

$$L_2\leqslant M_1^{j+m}(k-m-1)M_4\|\varphi_m\|_{\beta}\leqslant M_5\|\varphi_m\|_{\beta},$$

其中 $M_5=M_1^{j+m}(k-m-1)M_4$. 综合得

$$|\theta_m\varphi_m|\leqslant M_6\|\varphi_m\|_{\beta}+M_5\|\varphi_m\|_{\beta}.$$

类似于前面的讨论,有

$$\|\theta_m\varphi_m\|_{\beta}\leqslant J_2\|\varphi_m\|_{\beta},$$

其中 J_2 与 φ 无关.

推论3 $\forall\varphi_m\in H(\partial\Omega,\beta)$,存在不依赖于 φ_m 的常数 J_3,使得 $\|\varphi_m/2+P_m\varphi_m\|_{\beta}\leqslant J_3\|\varphi_m\|_{\beta}$.

定理 3 设位移 $d=d(x)$ $(x\in\partial\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上满足 Lipschitz 条件,引入算子

$$\tilde{\theta}_m\varphi_m=\tilde{\varphi}_m/2+\tilde{P}_m\varphi_m,$$

那么 $\forall\varphi_m\in H(\partial\Omega,\beta)$,存在不依赖于 φ_m 的常数,使得 $\|\tilde{\theta}_m\varphi_m\|_{\beta}\leqslant J_6\|\varphi_m\|_{\beta}$.

推论 4 在定理 3 的条件下,下面不等式成立

$$\|-\tilde{\varphi}_m/2+\tilde{P}\varphi_m\|_{\beta}\leqslant J_7\|\varphi_m\|_{\beta}.$$

定理 4 设 k-正则函数的 SR 问题中位移 $d=d(t)$ 满足 Lipschitz 条件,且 $a(t),b(t),c(t),g(t)\in H(\partial\Omega,\beta)$. 若

$$\|a+c\|_{\beta}<\varepsilon<1,$$
$$\|b\|_{\beta}<\varepsilon<1,\ \|1+a\|_{\beta}<\varepsilon<1,$$
$$0<u=\varepsilon 2^{n-1}(J_2+J_6+1)<1,$$
$$\|g\|_{\beta}<M(1-u),$$

其中 M 是给定的常数,则 SR 问题的第 $m+1$ 个方程存在唯一解,

证 设 $T=\{\varphi_m\mid\varphi_m\in H(\Sigma,\beta),\|\varphi\|_{\beta}\leqslant M\}$ 表示 Banach 空间 $H(\Sigma,\alpha)$ 的闭子空间.

$$\|F\varphi_m\|_{\beta}\leqslant 2^{n-1}\|a+c\|_{\beta}\|\theta_m\varphi_m\|_{\beta}+2^{n-1}\|b\|_{\beta}\|\tilde{\theta}_m\varphi_m\|_{\beta}+\|g\|_{\beta}\leqslant$$
$$2^{n-1}\varepsilon J_2\|\varphi_m\|_{\beta}+2^{n-1}\varepsilon J_6\|\varphi_m\|_{\beta}+\|g\|_{\beta}\leqslant uM+\|g\|_{\beta}\leqslant M,$$

所以 F 是由 T 到 T 自身的映射.

$\forall\varphi'_m,\varphi''_m\in H(\partial\Omega,\beta)$,则

$$F\varphi'_m-F\varphi''_m=(a+c)[-(\varphi'_m-\varphi''_m)/2+P(\varphi'_m-\varphi''_m)]+b[(\tilde{\varphi}'_m-\tilde{\varphi}''_m)/2+\tilde{P}_m(\varphi'_m-\varphi''_m)]+(1+a)(\varphi'_m-\varphi''_m),$$

从而 $\|F\varphi'_m-F\varphi''_m\|_{\beta}\leqslant u\|\varphi'_m-\varphi''_m\|_{\beta}$.

因为 $0<u<1$,因此 F 是 Banach 空间 T 到自身的压缩映射,由压缩不动点原理知,存在唯一的不动点 $\varphi_m(x)$,使得 $F\varphi_m(x)=\varphi_m$,由此第 $m+1$ 个方程存在唯一解

$$\varphi_m(x)=\int_{\Sigma}L(u,x)\boldsymbol{n}(u)\left[\sum_{j=m}^{k-1}\frac{(-1)^{j+m}}{(j-m)!}\cdot(u_0-t_0)^{j-m}\varphi_j(x)\right]\mathrm{d}_s(u).$$

3 参考文献

[1] 熊辉,金珍. 奇性 P-Laplace 方程的 Dirichlet 问题的 Nihari 流形及多解的存在性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2009,33(3):301-305.

[2] 邓义华,彭白玉. 一类高阶边值问题正解的存在唯一性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2007,31(1):34-37.

[3] 徐振远. Clifford 代数上正则函数的 Riemann 边值问题 [J]. 科学通报,1987,32(6):476-477.

[4] Brackx F,Delange R,Sommen F. Clifford analysis [M]. London:Pitman Advanced Publishing Program,1982.

[5] Wen Guochun. Clifford analysis and elliptic system,hyperbolic systems of first order equations [C]//Proceedings of International Conference on Integral Equation and Boundary Value Problems,Singapore:World Scientific,1991:230-237.

[6] 李觉友. Clifford 分析中 k-正则函数的性质及 Riemann 边值问题 [J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2007,30(4):430-433.

[7] 杨柳,曾纯一. Clifford 分析中无界域上 K 正则函数的 Riemann 边值问题 [J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2008,31(6):693-697.

[8] 张忠祥,杜金元. 关于 Clifford 分析中的某些 Riemann 边值问题与奇异积分方程 [J]. 数学年刊,2001,22A(4):421-426.

(下转第 205 页)

Relevant Properties of Approximation to Conic Sections with Cubic Hermite Curves

XU Shao-ping，LIU Xiao-ping，LI Chun-quan，HU Ling-yan，YANG Xiao-hui
(School of Information Engineering，Nanchang University，Nanchang Jiangxi 330031，China)

Abstract: By the Hermite polynomicals method，an approach to approximate Conic sections in the form of a rational Bezier curve with Hermite polynomial curves is studied. The property condition of constructed Hermite polynomial curve such as G^2-continuity with the Conic section at the end points and G^1-continuity at the parametric mid-point and shape-preserving has been proposed. Explicit error bound is also derived and discussed. The validity of the proposed method for approximating Conic sections with Hermite polynomial curves is further proved through multiples sets of different types of comparative tests.

Key words: numerical analysis; Conic sections; Herimite curves; approximation; shape preserving

(责任编辑：曾剑锋)

(上接第 178 页)

[9] 杨丕文. 复 Clifford 分析中的正则向量函数[J]. 宁夏大学学报：自然科学版，1998，19(1)：67-68.

[10] 黄沙. Clifford 分析中双正则函数的非线性边值问题[J]. 中国科学：A 辑，1996，26(3)：227-236.

[11] 李觉友，杨丕文. Clifford 分析中一类广义正则函数的非线性边值问题[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2006，29(1)：30-33.

[12] 黄沙. Clifford 分析中一个带位移的非线性边值问题[J]. 系统科学与数学，1991，11(4)：336-345.

[13] 许娜，乔玉英. Clifford 分析中无界域上正则函数带 Haseman 位移的边值问题[J]. 数学物理学报，2008，28A(5)：846-855.

The Boundary Value Problem with Haseman Shift for k-Regular Functions on Unbounded Domains in Clifford Analysis

FANG Yan-bing，HAN Hui-li*，ZHANG Yan
(School of Mathematics and Computer Science，Ningxia University，Yinchuan Ningxia 750021，China)

Abstract: By the method of integral equation and the fixed-point theorem，the boundary value problem with Haseman shift for k-regular functions on unbounded domains in Clifford analysis is discussed. Moreover，the existence and uniqueness of the solution for the problem is proved.

Key words: Clifford analysis; k-regular function; unbounded domains

(责任编辑：曾剑锋)