第 37 卷 第 2 期
2013 年 3 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 37 No. 2
Mar. 2013

文章编号:1000-5862(2013)02-0179-04

正则区域的对数导数单叶性内径

罗 贤,杨宗信*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究了单位圆到正则区域的共形映射的对数导数,讨论了对数导数范数的一些性质,得到了带凸角的正则区域在对数导数意义下的单叶性内径的一个下界估计,并推导出椭圆内部区域的对数导数意义下的单叶性内径为 1.

关键词:正则区域;对数导数;单叶性内径

中图分类号:O 174.51 **文献标志码**:A

0 引言和主要结果

用 C 表示复平面,$\overline{C}$ 表示扩充复平面,B 表示复平面上的单位圆,即 $B=\{z:|z|<1\}$,D 表示 $\overline{C}$ 上任一边界多于 2 点的单连通区域,角域 $A_\alpha=\{z:z\in\overline{C},0<\arg z<\alpha\pi\}$.

对于扩充复平面 $\overline{C}$ 上边界多于 2 点的区域 D,可以用单位圆 B 作为其万有覆盖,D 为双曲型黎曼曲面,从而 D 具有双曲度量(Poincaré 度量). 双曲度量是共形不变量,用 $\rho_D(z)$ 表示区域 D 的双曲度量密度. 特别地,对于 $z\in B$,有 $\rho_B(z)=(1-|z|^2)^{-1}$. 对于一般的单连通区域 $D\subset\overline{C}$,根据黎曼映照定理,任何边界多于 1 点的单连通区域都与单位圆共形等价,设 $f(z)$ 是单连通区域 D 到单位圆 B 的共形映射,则 $\forall z\in D$,有 $\rho_D(z)=|f'(z)|/(1-|f(z)|^2)$,且 $\rho_D(z)$ 与 f 的选取无关.

定义 1[1] 设 $f(z)$ 为单连通区域 D 内的局部单叶的解析函数,定义 $f(z)$ 对数导数为 $T_f(z)=f''(z)/f'(z)$.

定义 2 单连通区域 D 内局部单叶的解析函数 $f(z)$ 的对数导数范数为 $\|T_f\|_D=\sup\limits_{z\in D}|T_f(z)|\cdot\rho_D^{-1}(z)$,区域 D 的对数导数意义下单叶性内径为 $\sigma_1(D)=\sup\{a:\|T_f\|_D\leqslant a\Rightarrow f$ 在 D 内单叶$\}$.

单叶性内径问题是复分析学者感兴趣的一个研究内容,是单叶函数的拟共形延拓、万有 Teichmuller 空间中的重要问题之一. 与定义 2 相对应的是 Schwarz 导数意义下的单叶性内径 $\sigma(D)$:对于单连通区域 D 内局部单叶的亚纯函数 $f(z)$,其 Schwarz 导数 $S_f(z)=(f''(z)/f'(z))'-(f''(z)/f'(z))^2/2$,$\|S_f\|_D=\sup\limits_{z\in D}|S_f(z)|\rho_D^{-2}(z)$,$\sigma(D)=\sup\{a:\|S_f\|_D\leqslant a\Rightarrow f$ 在 D 内单叶$\}$. 由于 Schwarz 导数的范数具有 Möbius 变换下的不变性,关于 $\sigma(D)$ 及其应用的研究结果较多[2-3],但相关研究表明 $\sigma_1(D)$ 与 $\sigma(D)$ 有许多对应的结果. J. Becker[4] 首先证明了 $\sigma_1(B)\geqslant 1$,J. Becker 等[5] 随后证明了对于右半复平面 H 有 $\sigma_1(H)\leqslant 1$,I. V. Zhuravlev[6] 证明了上半平面的对数导数意义下的单叶性内径至少是 1,K. Astala 等[7] 证明了任意的圆域和半平面的对数导数意义下的单叶性内径都是 1. 陈纪修和魏寒柏在文献[8]中证明了上半平面的对数导数意义下的单叶性内径为 1. D. Stowe[9] 证明了凸区域的对数导数意义下的单叶性内径不大于 1,非凸区域的对数导数意义下的单叶性内径小于 1. 程涛等在文献[10]中通过构造拟共形反射的方法得到了任意区域对数导数意义下单叶性内径下界的几个估计式,作为其应用得到了角域和强星象区域的对数导数意义下的单叶性内径的下界估计. 但是对于圆域和半平面以外的区域,关于它们的对数导数意义下单叶性内径的准确值尚未有任何结果.

本文根据单位圆到正则区域的 Schwarz-Christoffel 变换,研究其对数导数范数的性质,得到了带凸角的正则区域的对数导数意义下的单叶性内径的一个下界估计,最后利用 C. Pommerenke[11] 研

收稿日期:2012-12-25

基金项目:国家自然科学基金(11071063,11261022)和江西省教育厅科研课题(GJJ12175)资助项目.

通信作者:杨宗信(1966-),男,江西兴国人,教授,博士,主要从事单复变几何函数论研究.

究区域边界的方法,得到了正则的拟圆在一列相似变换下的收敛区域的对数导数意义下的单叶性内径.

定义 3 对于实函数 $\beta(t)$,$t\in[a,b]$,如果 $\forall t\in(a,b)$,单侧极限 $\beta(t-)=\lim\limits_{\tau\to t-}\beta(\tau)$ 和 $\beta(t+)=\lim\limits_{\tau\to t+}\beta(\tau)$ 都存在,而且在 a,b 两点分别存在右极限和左极限,则称 β 是 $[a,b]$ 上的正则函数(regulated function).

定义4 设 D 是 Jordan 区域,$h:B\to D$ 为共形映射,则 h 可以同胚延拓到 $\overline{B}$,即 $h:\overline{B}\to\overline{D}$ 为同胚,如果 $\lim\limits_{t\to\xi+}\arg[h(e^{it})-h(e^{i\xi})]=\beta$,$\lim\limits_{t\to\xi-}\arg[h(e^{it})-h(e^{i\xi})]=\beta+\alpha\pi$,$h(e^{i\xi})\neq\infty$,$0\leqslant\alpha\leqslant 2$,则称 ∂D 在点 $h(e^{i\xi})$ 有大小为 $\alpha\pi$ 的开角. 如果 ∂D 是处处光滑的 Jordan 曲线,相当于处处有 $\alpha=1$.

定义5 若 D 是 Jordan 区域,h 是 B 到 D 的共形映射,令

$$\beta(t)=\begin{cases}\lim\limits_{\tau\to t+}\arg[h(e^{i\tau})-h(e^{it})], & h(e^{it})\neq\infty,\\ \lim\limits_{\tau\to t+}\arg[h(e^{i\tau})]+\pi, & h(e^{it})=\infty,\end{cases}$$

如果此时 $\beta(t)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的正则函数,则称 D 为正则区域(regulated domain). 当 $\beta(t)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的正则函数时,$\beta(t)$ 可以写成 $\beta(t)=\beta_c(t)+\beta_j(t)$,其中 $\beta_c(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续,$\beta_j(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 上除去(至多可数个)跳跃间断点之外的点取常值,而这些跳跃点正好对应的是 ∂D 的开角的顶点. 如果 D 是正则区域,而且 ∂D 的开角是向外凸的,则称 D 是带凸角的正则区域.

引理1 设 h 是 B 到正则区域 D 上的共形映射,则

$$\log h'(z)=\log|h'(0)|+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\cdot\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt,z\in B.$$

由引理 1,通过对等式两边同时关于 z 求导得

$$T_h(z)=\frac{h''(z)}{h'(z)}=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\cdot\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt,\ z\in B.$$

引理2 设 D 是单连通区域,h 是 B 到 D 上的共形映射,则 $\sigma_1(D)\geqslant 1-\|T_h\|_B$.

证 假设 f 是 D 内的局部单叶解析函数,且 $\|T_f\|_D\leqslant 1-\|T_h\|_B$. 显然 $f\circ h$ 是 B 内的局部单叶解析函数,又因为 $\|T_{f\circ h}\|_B=\|T_f-T_{h^{-1}}\|_D\leqslant\|T_f\|_D+\|T_{h^{-1}}\|_D=\|T_f\|_D+\|T_h\|_B\leqslant 1$,所以 $f\circ h$ 是 B 内的单叶解析函数,因此 f 也是 D 内的单叶解析函数. 从而由 $\sigma_1(D)$ 的定义,$\sigma_1(D)\geqslant 1-\|T_h\|_B$.

引理 3 设 D 是正则区域,$\forall\varepsilon\in(0,\pi)$,$h(e^{it})\neq\infty$,$t\in I\subset(-\infty,+\infty)$,$|\beta(t)-\gamma|<\varepsilon$,$\beta(t)$ 如定义 5,则 $|\arg[h(e^{i\tau})-h(e^{it})]|<\varepsilon$,$t$,$\tau\in I$,$t<\tau$.

本文的主要结果有:

定理 1 设 D 是正则区域,h 是 B 到 D 的共形映射,$\beta(t)$ 如定义5,$\xi\in[0,2\pi]$,若 $\beta(t)$ 在点 ξ 连续,则 $\lim\limits_{z\to e^{i\xi}}|T_h(z)|(1-|z|^2)=0$.

定理 2 设 D 是有凸角的正则区域,h 是 B 到 D 的共形映射,$\beta(t)$ 如定义5,$\beta(t)=\beta_c+\beta_j$,β_j 在 $t_k\in[0,2\pi]$ 处跳跃度为 $\sigma_k\pi$,$k=1,2\cdots$(至多可数个),则

$$\limsup_{|z|\to 1}|T_h(z)|(1-|z|^2)=\sup_k|2\sigma_k|,$$

其中 $\sigma_k=1-\alpha_k$.

定理 3 设 D 是带(有限个)凸角的正则区域,∂D 的开角的大小分别为 $\alpha_k\pi$,h 是 B 到 D 上的共形映射,若 $\limsup\limits_{|z|\to 1}|T_h(z)|(1-|z|^2)=\|T_h\|_B$,则 $\sigma_1(D)\geqslant 1-2\sup\limits_k|\sigma_k|$,其中 $\sigma_k=1-\alpha_k$.

定理 4 设 D 是正则的拟圆,$\{\lambda_n(z)\}$ 是定义在 D 上的一列相似变换,而且存在 2 点 z_1,z_2 位于所有 $\lambda_n(D)$ 的外部,且 $\lambda_n(D)$ 关于点 $z_0\in D_0$ 核收敛于区域 D_0,则 $\sigma_1(D_0)=\sigma_1(D)$,或者 $\sigma_1(D_0)=1$,或者 $\sigma_1(D_0)=\sigma_1(A_\alpha)$,其中 ∂D 的开角大小为 $\alpha\pi$.

1 定理的证明

定理 1 的证明 作一个旋转,使得 $\xi\in(0,2\pi)$,由引理 1,

$$T_h(z)=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt,$$

现在要证明

$$\lim_{z\to e^{i\xi}}\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt=0.$$

设 $c=\beta(\xi)$,先证 $\lim\limits_{z\to e^{i\xi}}\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\cdot(\beta(t)-c)\,dt=0$.

因为 $\beta(t)$ 在 ξ 点连续,所以 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $\xi-\delta<t<\xi+\delta$ 时,使得 $|\beta(t)-c|<\varepsilon/(4\pi)$. 因为 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}dt=2\pi$,所以

$$\left|\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)\,dt\right|\leqslant$$

$$\left|\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\frac{(1-|z|^2)}{|e^{it}-z|^2}|\beta(t)-c|\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot 2\pi=\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $A_\delta=[0,\xi-\delta]\cup[\xi+\delta,2\pi]$,当 $t\in A_\delta$,$z\in B$ 时,因为 $\lim\limits_{z\to e^{i\xi}}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)=0$,从而 $\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)$ 一致有界,由勒贝格有界收敛定理得

$$\lim_{z\to e^{i\xi}}\int_{A_\delta}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)\,dt=0.$$

由极限的定义,$\exists\delta'>0$,$z\in B$,当 $|z-e^{i\xi}|<\delta'$ 时,有 $\left|\int_{A_\delta}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$,再由三角不等式,有 $\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)\,dt\right|<\varepsilon$. 由 ε 的任意性,

$$\lim_{z\to e^{i\xi}}\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-c)\,dt=0. \quad (1)$$

又由 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-z}dt=0$ 和分部积分公式,

$$0\leqslant\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\left(c-t-\frac{\pi}{2}\right)dt\right|=$$

$$(1-|z|^2)\left|-\frac{2\pi i}{1-z}-i\int_0^{2\pi}\frac{dt}{e^{it}-z}\right|=2\pi\frac{1-|z|^2}{|1-z|},$$

所以

$$\lim_{z\to e^{i\xi}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\left(c-t-\frac{\pi}{2}\right)dt=0. \quad (2)$$

由(1) ~ (2) 式得

$$\lim_{z\to e^{i\xi}}\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt=0,$$

所以

$$\lim_{z\to e^{i\xi}}|T_h(z)|(1-|z|^2)=0.$$

定理 2 的证明　作一个旋转,使 $t_k\in(0,2\pi)$,令

$$\beta_k(t)=\begin{cases}\beta(t), & t\in(0,t_k),\\ \beta(t)-\sigma_k(t)\pi, & t\in[t_k,2\pi).\end{cases}$$

因为 β 在 $[0,2\pi]$ 是正则的,所以 $\beta_k(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 也是正则的,而且在 t_k 处连续. 令 $\beta_{\sigma_k}=\beta(t)-\beta_k(t)$,$t\in[0,2\pi]$,又因为

$$T_h(z)=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt,$$

$$T_h(z)(1-|z|^2)=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\cdot$$

$$\left(\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{i}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\beta_k(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt+\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta_{\sigma_k}(t))\,dt\right),$$

由定理 1 知

$$\lim_{z\to e^{it_k}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\left(\beta_k(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt=0.$$

现在讨论 $\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta_{\sigma_k}(t))\,dt=\frac{i}{\pi}\left(\int_0^{t_k}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}(\beta(t)-\beta_k(t))\,dt+\int_{t_k}^{2\pi}\frac{e^{it}(1-|z|^2)}{(e^{it}-z)^2}\cdot(\beta(t)-\beta_k(t))\,dt\right)=\sigma_k(1-|z|^2)\left(\frac{1}{e^{it_k}-z}-\frac{1}{1-z}\right)$,因为 $(1-|z|^2)/|e^{it_k}-z|\leqslant 2$,而且当 z 沿着径向趋于 e^{it_k} 时,$(1-|z|^2)/|e^{it_k}-z|$ 趋于 2,所以

$$\limsup_{z\to e^{it_k}}\sigma_k\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1}{e^{it_k}-z}\right|(1-|z|^2)=2\sigma_k.$$

从而 $\limsup\limits_{|z|\to 1}|T_h(z)|(1-|z|^2)=\sup\limits_k|2\sigma_k|=\sup\limits_k|2-2\alpha_k|(\sigma_k=1-\alpha_k)$.

定理 3 的证明　由定理 2 有 $\limsup\limits_{|z|\to 1}|T_h(z)|\cdot(1-|z|^2)=\sup\limits_k|2\sigma_k|$,其中 $\sigma_k=1-\alpha_k$,又由引理 2,所以有 $\sigma_1(D)\geqslant 1-2\sup\limits_k|\sigma_k|$ 成立,因此定理 3 得证.

这样就得到了带有限个凸角的正则区域对数导数意义下单叶性内径,这个下界估计式形式比较简单,在假设条件满足的情况下,从区域 D 的边界开角大小去计算就可以直接估计出该区域对数导数意义下单叶性内径的下界.

当 D 是圆域或椭圆内部区域时,∂D 是处处光滑的 Jordan 曲线,相当于处处有 $\alpha=1$,此时有 $\sigma_1(D)\geqslant 1$,结合文献[9]关于凸区域的结果,得到如下结论: 当 D 是圆域或椭圆内部区域时,$\sigma_1(D)=1$.

定理 4 的证明　由黎曼映照定理,存在单位圆 B 到正则拟圆 D 的共形映射 h,使 $h(B)=D$. 又因为 $\{\lambda_n(z)\}$ 是 D 上的正规族,所以存在一列 $\{\lambda_{n_i}(z)\}$,当 $n_i\to\infty$ 时,λ_{n_i} 局部一致收敛于相似变换 λ 或者收敛于复常数 c.

如果 λ_{n_i} 局部一致收敛于相似变换 λ,容易知道 $D_0=\lambda(D)$,又因为对数导数在相似变换下不变性,则有 $\sigma_1(D_0)=\sigma_1(D)$.

如果 λ_{n_i} 局部一致收敛于复常数 c,此时对 λ_{n_i} 重新编号,编号后的相似变换列还用 λ_n 表示. 设 $\lambda_n(z)=a_nz+b_n$,$a_n\neq 0$,b_n 是复常数,则当 $n\to\infty$ 时有一列 a_n 使得 $\arg a_n\to\theta\pi$,$\theta\in[0,2]$. 因为 D 是拟圆,共形映射 h 可以同胚延拓到边界,所以 h 是 $\overline{B}$ 到 $\overline{D}$ 上的同胚映射. 设 $\omega_0\in\partial B$,则存在一列映射使得 $h^{-1}\circ\lambda_n^{-1}(z)\to\omega_0$,$z\in D_0$.

由黎曼映照定理,存在一列共形映射 g_n: $B\to$

$\lambda_n(D)$ 且 $g_n(B)=\lambda_n(D)$，使得(i) $g_n(0)=z_0$；(ii) $g_n(\omega_0)=\lambda_n(h(\omega_0))$ 成立. 同时存在一列 g_{n_k} 在 B 内局部一致收敛于共形映射 g，且有 $g(B)=D_0$. 现在作 $\mu_n(z)=h^{-1}\circ\lambda_n^{-1}\circ g_n(z)$，$z\in B$，显然 μ_n 是单位圆 B 到单位圆 B 的分式线性变换，而且 $\mu_n(B)=B$，$\mu_n(\omega_0)=\omega_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(0)=\omega_0$. 设 $e^{it_0}=\omega_0$，不失一般性，设 $t_0\neq 0$ 在单位圆 $\overline{B}$ 内存在一列 $\mu_n(z)\to\omega_0(n\to\infty)$，而且 $\mu_n(e^{it_0})=e^{it_0}$，$n\in\mathbf{N}^+$.

下面设 $\xi_0=\sup\{\xi:\xi\in[t_0,t_0+2\pi)$，$\exists\{n_k\}$，使得 $\arg(\mu_{n_k}(e^{i\xi}))\to t_0+\}$. 由 ξ_0 的定义和 μ_n 的保向性有如下2个结论：(i) $\forall t,\tau,t_0<t<\tau<\xi_0$，一定存在一列数 $\{n_k\}$ 使得 $t_0\leqslant\arg(\mu_{n_k}(e^{it}))\leqslant\arg(\mu_{n_k}(e^{i\tau}))$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty}\arg(\mu_{n_k}(e^{i\tau}))=t_0+$ 成立；(ii) 若 $\xi_0<t<t_0+2\pi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\arg(\mu_n(e^{it}))=t_0-$. 又因为区域 D 是正则的，由引理3有

$$\lim_{t_0<t<\tau<2\pi,t\to t_0+}\arg[h(e^{i\tau})-h(e^{it})]=\beta(t_0+)=\beta\pi,$$

$$\lim_{0<t<\tau<t_0,t\to t_0-}\arg[h(e^{i\tau})-h(e^{it})]=\beta(t_0-)=\gamma\pi,$$

其中 $\gamma,\beta\in[0,2\pi)$. 综合以上结论，$\forall t,\tau,t_0<t<\tau<\xi_0$，$\exists\{n_k\}$，使得 $\arg[g(e^{i\tau})-g(e^{it})]=\lim\limits_{k\to\infty}\arg[g_{n_k}(e^{i\tau})-g_{n_k}(e^{it})]=\lim\limits_{k\to\infty}\arg[a_{n_k}h(\mu_{n_k}(e^{i\tau}))-h(\mu_{n_k}(e^{it}))]$. 因为 $\arg a_n\to\theta\pi$，所以 $\arg[g(e^{i\tau})-g(e^{it})]=\beta\pi+\theta\pi$(或者 $\beta\pi+\theta\pi-2\pi$). 类似地，对于 $\xi_0<t<\tau<t_0+2\pi$，$\arg[g(e^{i\tau})-g(e^{it})]=\gamma\pi+\theta\pi$(或者 $\gamma\pi+\theta\pi-2\pi$). 因为 $\partial D_0=\partial g(B)$ 是 Jordan 曲线，所以当 $\beta=\gamma$ 时，D_0 是半平面，此时 $\sigma_1(D_0)=1$；当 $\beta\neq\gamma$ 时 ∂D 有一开角为 $\alpha\pi$，D_0 是角域 A_α 在相似变换下的像，$\alpha=1-(\beta-\gamma)$，此时由对数导数在相似变换下的不变性有 $\sigma_1(D_0)=\sigma_1(A_\alpha)$. 综合以上3种情况，定理4得证.

2 参考文献

[1] Lehto O. Univalent functions and Teichmüller spaces[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[2] 吴发族，杨宗信. 等腰梯形的单叶性内径[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2008, 32(3): 313-316.

[3] 刘新斌，杨宗信. 平行四边形及等腰梯形的单叶性内径[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(3): 267-270.

[4] Becker J. Löwnersche differentialgleichung und quasikon-form fortsetzbare schlichte Funktionen[J]. J Reine Math, 1972, 255(1): 23-43.

[5] Becker J, Pommerenke Ch. Schlichttheitskriterien and Jordangebiete[J]. J Reine Math, 1984, 354(1): 74-79.

[6] Zhuravlev I V. Model of the universal Teichmüller space[J]. Sib Math J, 1986, 27(3): 691-697.

[7] Astala K, Gehring F W. Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space[J]. J Analyse Math, 1986, 46(1): 16-57.

[8] Chen Jixiu, Wei Hanbai. Some geometric properties on a model of universal Teichmüller space[J]. Chin Ann of Math, 1997, 18B(3): 309-314.

[9] Stowe D. Injectivity and the pre-Schwarzian derivative[J]. Michigan Math J, 1998, 45(3): 537-546.

[10] Cheng Tao, Chen Jixiu. On the inner radius of univalency by pre-Schwarzian derivative[J]. Sci Chin Ser A: Math, 2007, 50(7): 987-996.

[11] Pommerenke C. Boundary behaviour of conformal maps[M]. Berlin: Springer-Varlag, 1992.

The Inner Radius of Univalence by Pre-Schwarzian Derivative of Regulated Domain

LUO Xian, YANG Zong-xin*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Making use of integral representation of a conformal map from the unit disk onto a regulated domain, the pre-Schwarzian derivative of the conformal map is discussed. A new estimation of lower bound of the inner radius of univalence by pre-Schwarzian derivative of a regulated domain with convex corners is obtained.

Key words: regulated domain; pre-Schwarzian derivative; the inner radius of univalence

(责任编辑：曾剑锋)