第 37 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 2
2013 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2013

文章编号:1000-5862(2013)02-0187-04

一类 Calderón-Zygmund 型算子的交换子加权不等式

熊 鹏,郑雄军*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 利用交换子理论研究了当 $b \in \mathrm{BMO}(\mu)$,$\mu \in A_1(\mathbf{R}^n)$ 时,由 b 和 T 生成的交换子 $[b,T]$ 的性质,通过建立交换子 $[b,T]$ 的 sharp 极大函数的点态不等式,证明了上述交换子是 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(\mu^{1-p})$ 上的有界算子.

关键词: 交换子;加权 BMO 函数;Calderón-Zygmund 型

中图分类号: O 174.2 **文献标志码:** A

0 引言

交换子理论最初是由 R. R. Coifman 等[1-3]建立的,由于交换子理论在研究 2 阶椭圆型偏微分方程正则解的问题中起着十分重要的作用,随后许多学者都开始研究此理论,并获得许多重要的结果.

设 T 是 Calderón-Zygmund 奇异积分算子,b 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数,对 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,定义交换子 $[b,T]$ 为 $[b,T]f = bT(f) - T(bf)$.

1978 年,S. Janson 证明了交换子 $[b,T]$ 在 $L^p(1 < p < \infty)$ 上是有界的充要条件是 $b \in \mathrm{BMO}$;1995 年,M. Paluszynski 证明了 $[b,T]$ 是 (p,q) 型的充要条件是 $b \in Lip_\beta$[4],其中 $1 < p < q < \infty$,$0 < \beta < 1$ 和 $1/q = 1/p - \beta/n$.

关于交换子的更多结果,可以参见文献[5-7].

1 定义和主要结果

定义 1 设函数 $K(x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$,且满足下列 2 个条件:

(i) 当 $x \neq 0$ 时,$|K(x)| \leqslant C|x|^{-n}$;

(ii) 当 $2|y| \leqslant |x|$ 时,

$$|K(x-y) - K(x)| \leqslant y/|x|^{n+1},$$

称这样的 $K(x)$ 为经典的 Calderón-Zygmund 核,经典的 Calderón-Zygmund 算子定义为

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

定义 2 一个局部可积函数 $f(x)$ 属于加权 Lipschitz 函数空间,即 $f(x) \in Lip^p_{\beta,\mu}$,对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,$1 < \beta < \infty$,$\mu \in A_\infty(\mathbf{R}^n)$,有

$$\sup_B \frac{1}{\mu(B)^{\beta/n}}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(x) - f_B|^p \mu(x)^{1-p}\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant C < \infty,$$

其中上确界取遍 $\mathbf{R}^n$ 所有的球 B. 由这些函数生成的 Banach 空间用 $Lip^p_{\beta,\mu}$ 表示,把 $\{C\}$ 的下确界记为 $\|f\|_{Lip^p_{\beta,\mu}}$,$Lip^1_{\beta,\mu}$ 简记为 $Lip_{\beta,\mu}$,当 $\mu = 1$ 时,$Lip_{\beta,\mu}$ 空间就变为经典的 Lip_β 空间.

2007 年 Hu Bei 和 Gu Jiajun 研究当 b 为加权 Lipschitz 函数时,交换子 $[b,T]$ 的有界性[8].

定理 1 设 T 是 Calderón-Zygmund 奇异积分算子,$\mu \in A_1(\mathbf{R}^n)$,$1/q = 1/p - \beta/n$,对 $0 < \beta < 1$ 和 $1 < p < q < \infty$,其中核函数满足定义 1,若 $b \in Lip_{\beta,\mu}$,则交换子 $[b,T]$ 是 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu^{1-q})$ 上的有界算子.

定义 3 设 $S(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的速降函数空间,$S'(\mathbf{R}^n)$ 是缓增广义函数空间(速降函数的对偶空间). 设 $T: S(\mathbf{R}^n) \to S'(\mathbf{R}^n)$ 是线性算子,其核函数为 $K(\cdot,\cdot)$,T 被定义为

$$T(g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

称 T 为 Calderón-Zygmund 型算子,若下列 3 个条件同时满足:

(i) T 可以扩张为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的连续算子;

(ii) K 除对角线 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n: x = y\}$ 外是光滑的,且

收稿日期:2012-10-28

基金项目:江西省自然科学基金(2009GZS0011,20122BAB201008)和江西省教育厅科研计划课题(GJJ08169)资助项目.

通信作者:郑雄军(1968-),女,江西上饶人,教授,主要从事非线性泛函分析的研究.

$$\int_{|x-y|>2|z-y|}(|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|)\mathrm{d}x \leqslant C,$$

其中 $C>0$ 是与 y 和 z 无关的常数;

(ⅲ) 存在正常数序列$\{C_j\}$使得 $\forall j \in \mathbf{N}$,有

$$\left(\int_{2^j|z-y|\leqslant|x-y|\leqslant 2^{j+1}|z-y|}|K(x,y)-K(x,z)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C_j(2^j|z-y|)^{-n/q'},$$

$$\left(\int_{2^j|z-y|\leqslant|x-y|\leqslant 2^{j+1}|z-y|}|K(y,x)-K(z,x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C_j(2^j|z-y|)^{-n/q'},$$

其中(q,q')是固定的正数对,满足 $1/q+1/q'=1$ 且 $1<q'<2$.

最近,文献[9]给出了 Calderón-Zygmund 型算子 T 在加权的哈代空间 $H_\omega^1(\mathbf{R}^n)$ 和加权勒贝格空间 $L_\omega^p(\mathbf{R}^n)$ 上的估计.

定理A 设 T 为 Calderón-Zygmund 型算子且序列$\{C_j\}\in l^1$,则 T 可扩张为 $L^p(\mathbf{R}^n)(1<p<\infty)$ 上的有界算子,且为弱(1,1)型的.

如果对比经典的 Calderón-Zygmund 算子,其核函数 $K(x,y)$ 满足

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n},$$

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|\leqslant C|x-y|^{-n}\left(\frac{|z-y|}{|x-y|}\right)^{\varepsilon},$$

对 $|x-y|>2|x-y|$ 和某个 $\varepsilon>0$ 成立. 当 $C_j=2^{-j\varepsilon}, j\in\mathbf{N}$,且 g 可为 $1<q<\infty$ 的任意数时,文献[9]给出的算子是定义 3 中给出的 1 个 Calderón-Zygmund 型算子. 这一事实说明 Calderón-Zygmund 型算子可视为广义的 Calderón-Zygmund 算子. 当 $K(x,y)$ 退化为只有 1 个变量且 $\varepsilon=1$ 时,广义的 Calderón-Zygmund 算子就退化为经典 Calderón-Zygmund 算子. 所以 Calderón-Zygmund 算子是 Calderón-Zygmund 型算子的特殊情形.

文献[10]在研究 Calderón-Zygmund 型算子及其交换子的 sharp 极大函数估计中已经证明了下面的结论.

定理2 设 T 为 Calderón-Zygmund 型算子,q' 如定义 1 所述且序列$\{C_j\}\in l^1$,若 $b\in\Lambda_\beta$, $0<\beta<\min\{1,n(2/q'-1)\}$,则交换子$[b,T]$是 $L^{p_1}(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^{p_2}(\mathbf{R}^n)$ 上的有界算子,其中 $1<p_1<n/\beta$ 且 $1/p_2=1/p_1-\beta/n$. 进一步有

$$\|[b,T]f\|_{L^{p_2}}\leqslant C\|b\|_{\Lambda_\beta}\|f\|_{L^{p_1}},$$

其中 $C>0$ 与 f 无关.

受文献[8]和[10]的启发,若当文献[8]中的核条件变为 Calderón-Zygmund 型奇异积分算子,$b\in\mathrm{BMO}(\mu)$ 时,该类型交换子$[b,T]$是否有类似定理 1 的结论,这是本文研究的主要内容.

定理3 设 T 为 Calderón-Zygmund 型算子,q' 如定义 3 所述且序列$\{C_j\}\in l^1$, $\mu\in A_1(\mathbf{R}^n)$, $b\in\mathrm{BMO}(\mu)$, $1<q'<p<\infty$,则交换子$[b,T]$是 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(\mu^{1-p})$ 上的有界算子.

2 预备知识和引理

为了证明定理 3,需要下面的预备知识和引理.

记 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y$. 极大函数 Mf 和 sharp 函数 $M^\# f$ 定义为

$$Mf(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y,$$

$$M^\# f(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f_B|\mathrm{d}y\approx\sup_{x\in B}\inf_{c\in C}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-c|\mathrm{d}y,$$

极大函数与 sharp 极大函数的变式为

$M_\delta f(x)=M(|f|^\delta)^{1/\delta}$, $M_\delta^\# f(x)=M^\#(|f|^\delta)^{1/\delta}$.

定义4(Muckenhopt 权函数) 称一个非负局部可积函数 $\mu(x)$ 属于 $A_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 权,如果当 $1<p<\infty$,存在一个常数 $C>0$,使得下列不等式

$$\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B\mu(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\mu(x)^{1-p'}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\leqslant C$$

成立,其中 $1/p+1/p'=1$. 称 $\mu(x)\in A_1$,如果存在一个常数 $C>0$,使得 $M\mu(x)\leqslant C\mu(x)$. 称 $\mu(x)\in A_\infty$,当且仅当 $\exists p, 1\leqslant p<\infty, \mu\in A_p$,即 $A_\infty=\bigcup_{1\leqslant p<\infty}A_p$.

定义5 称一个局部可积函数 $b\in\mathrm{BMO}_p(\mu)$,如果

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_p(\mu)}:=\left\{b\,|\,b\in L_{loc}(\mu)\text{ 且 }\sup_B\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|b(y)-b_B|^p\mu(y)^{1-p}\mathrm{d}y\right)^{1/p}\leqslant C<\infty\right\},$$

当 $p=1$ 时,$\mathrm{BMO}_1(\mu)=\mathrm{BMO}(\mu)$;当 μ 是 Lebesgue 测度时,$\mathrm{BMO}_1(\mu)=\mathrm{BMO}$.

引理1 设 $0<p,\delta<\infty$ 和 $\mu\in\bigcup_{1\leqslant r\leqslant\infty}A_r(\mathbf{R}^n)$,存在常数 C,对任意光滑函数 f 有下面不等式

$$\int_{\mathbf{R}^n}M_\delta f(x)^p\mu(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}M_\delta^\# f(x)^p\mu(x)\mathrm{d}x$$

成立,其中不等式的左边的积分是有限的.

引理2(Kolmogorov 不等式) 设 T 是 $L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$ 到可测函数空间 M 上的次线性算子,如果 T 是弱(p,p)型的,则对一切有限测度集 E 和所

有 $0 < r < p$，存在常数 $C > 0$，使得

$$\int_E |Tf(x)|^r dx \leqslant C|E|^{1-r/p}\|f\|_p^r.$$

引理 3　设 $\mu \in A_1(\mathbf{R}^n)$，$b \in \mathrm{BMO}_p(\mu)$，则

$$|b_{2^{k+1}B} - b_B| \leqslant Ck\mu(x)\|b\|_{\mathrm{BMO}_p(\mu)}.$$

引理 4[11]　设 $\mu \in A_1(\mathbf{R}^n)$，则 $\forall p, 1 \leqslant p < \infty$，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_p(\mu)} \leqslant \|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}.$$

引理 5　设 T 为 Calderón-Zygmund 型算子，q' 如定义 3 所述且序列 $\{jC_j\} \in l^1$，$\mu \in A_1(\mathbf{R}^n)$，$b \in \mathrm{BMO}(\mu)$. 此外 $0 < \delta < 1$，$1 < q' < r < p$，则存在常数 $C > 0$，满足

$$M_\delta^\#([b,T]f)(x) \leqslant C\mu(x)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}(M_{\mu,r}(Tf)(x) + M_{\mu,r}(f)(x)),$$

其中 $M_{\mu,r}f(x) = \sup_{x\in B}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)|^r\mu(y)dy\right)^{1/r}$，$f$ 为有界光滑函数且 $x \in \mathbf{R}^n$.

证　对任意的常数 λ，有

$$[b,T]f(x) = (b(x)-\lambda)Tf(x) - T((b-\lambda)f)(x).$$

固定 $x \in \mathbf{R}^n$，令 $B = B(x,r)$，$f = f_1 + f_2$，这里 $f_1 = f\chi_{\bar{B}}$，$\bar{B} = B(x,4r)$，λ，c 都是常数，因为 $0 < \delta < 1$，利用不等式 $||a|^\delta - |b|^\delta| \leqslant |a-b|^\delta$，有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B ||[b,T]f(y)|^\delta - |c|^\delta|dy\right)^{1/\delta} \leqslant \left(\frac{1}{|B|}\int_B |[b,T]f(y) - c|^\delta dy\right)^{1/\delta} \leqslant$$

$$C\left(\frac{1}{|B|}\int_B \left|(b(y)-\lambda)Tf(y) - T((b-\lambda)f)(y) - c\right|^\delta dy\right)^{1/\delta} \leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y)-\lambda)Tf(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta} +$$

$$C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b-\lambda)f_1)(y)|^\delta dy\right)^{1/\delta} + C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b-\lambda)f_2)(y) - c|^\delta dy\right)^{1/\delta} = I + II + III.$$

首先估计 I，令 $\lambda = b_{\bar{B}}$，则 $\forall r > 1$ 及 $\mu \in A_1(\mathbf{R}^n)$，由引理 4 得

$$I \leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y) - b_{\bar{B}})Tf(y)|dy \leqslant C\left(\frac{1}{|\bar{B}|}\int_{\bar{B}} |b(y) - b_{\bar{B}}|^{r'}\mu(y)^{1-r'}dy\right)^{1/r'} \cdot \left(\frac{1}{|\bar{B}|}\int_{\bar{B}} |Tf(y)|^r\mu(y)dy\right)^{1/r} \leqslant$$

$$C\left(\frac{\mu(\bar{B})}{|\bar{B}|}\right)^{1/r'}\left(\frac{1}{\mu(\bar{B})}\int_{\bar{B}} |b(y) - b_{\bar{B}}|^{r'}\mu(y)^{1-r'}dy\right)^{1/r'} \cdot \left(\frac{\mu(\bar{B})}{|\bar{B}|}\right)^{1/r}\left(\frac{1}{\mu(\bar{B})}\int_{\bar{B}} |Tf(y)|^r\mu(y)dy\right)^{1/r} \leqslant$$

$$C\mu(x)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}M_{\mu,r}(Tf)(x).$$

对于估计 II，由引理 2，算子 T 的弱 $(1,1)$ 型及 I 的类似估计方法得

$$II \leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B (|b(y) - b_{\bar{B}}|)|f(y)|dy \leqslant C\mu(x)\|b\|_{\mathrm{BMO}_r(\mu)}M_{\mu,r}(f)(x).$$

最后对 III 进行估计，取 $c = (T((b-b_{\bar{B}})f_2))_B$，由定义 3 的条件(ⅲ)，有

$$III \leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b-\lambda)f_2)(y) - c|dy\right) = \frac{C}{|B|}\int_B |T((b-b_{\bar{B}})f_2)(y) - (T((b-b_{\bar{B}})f_2))_B|dy \leqslant$$

$$\frac{C}{|B|^2}\iint_{BB}\int_{\mathbf{R}^n\setminus \bar{B}} |K(y,w) - K(z,w)||(b(w) - b_{\bar{B}}) \cdot f(w)|dwdzdy \leqslant \frac{C}{|B|^2}\iint_{BB}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |K(y,w) -$$

$$K(z,w)||(b(w) - b_{2^{k+1}\bar{B}})f(w)|dwdzdy + \frac{C}{|B|^2}\iint_{BB}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |K(y,w) -$$

$$K(z,w)||(b_{2^{k+1}\bar{B}} - b_{\bar{B}})f(w)|dwdzdy \leqslant \frac{C}{|B|^2}\iint_{BB}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |K(y,w) -\right.\right.$$

$$\left.K(z,w)|^q dw\right)^{1/q} \cdot \left(\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |(b(w) - b_{2^{k+1}\bar{B}})f(w)|^{q'}dw\right)^{1/q'}dzdy \leqslant$$

$$\frac{C}{|B|^2}\iint_{BB}\sum_{k=1}^{\infty}C_k(2^{k+1}r)^{-n/q'}\left(\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |(b(w) - b_{2^{k+1}\bar{B}})f(w)|^{q'}dw\right)^{1/q'}dzdy +$$

$$\frac{C}{|B|^2}\iint_{BB}\sum_{k=1}^{\infty}C_k(2^{k+1}r)^{-n/q'}|b_{2^{k+1}\bar{B}} - b_{\bar{B}}| \cdot \left(\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |f(w)|^{q'}dw\right)^{1/q'}dzdy = III_1 + III_2.$$

下面来估计

$$\left(\int_{2^k r \leqslant |y-w| \leqslant 2^{k+1}r} |(b(w) - b_{2^{k+1}\bar{B}})f(w)|^{q'}dw\right)^{1/q'}.$$

由 Hölder 不等式，反 Hölder 不等式及 A_1 权条件得

$$\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B} |(b(w) - b_{2^{k+1}B})f(w)|^{q'}dw\right)^{1/q'} \leqslant C\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B} |b(w) - b_{2^{k+1}B}|^{q't_1}\mu(w)^{1-q't_1}dw\right)^{1/(q't_1)} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B} |f(w)|^{q't_2}\mu(w)dw\right)^{1/(q't_2)} \cdot \left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(w)^{(q'-1/t_1-1/t_2)t_3}dw\right)^{1/(q't_3)} \leqslant$$

$$C\mu(x)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}M_{\mu,r}(f)(x),$$

其中 $r = q't_2$，正数 t_1, t_2, t_3 满足 $1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 = 1$.

所以 $III_1 \leqslant C\mu(x)\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}M_{\mu,r}(f)(x)$.

由引理 3 和引理 4 得

$$III_2 \leqslant C\mu(x) \|b\|_{BMO(\mu)} M_{\mu,r}(f)(x).$$

引理 5 得证.

3 定理 3 的证明

$\forall q',1<q'<p,\exists r$,使得 $1<q'<r<p$,由引理 1,引理 5 及 $M_{\mu,r}(f)$ 的 $L^p(\mu)$ 有界性可得

$$\|[b,T]f(x)\|_{L^p(\mu^{1-p})} \leqslant \|M_\delta([b,T]f)\|_{L^p(\mu^{1-p})} \leqslant$$
$$\|M_\delta^{\#}([b,T]f)\|_{L^p(\mu^{1-p})} \leqslant$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\|\mu(x)M_{\mu,r}(Tf)(x)\|_{L^p(\mu^{1-p})} +$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\|\mu(x)M_{\mu,r}(f)(x)\|_{L^p(\mu^{1-p})} \leqslant$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\mu(x)^pM_{\mu,r}^p(Tf)(x)\mu^{1-p}(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} +$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\mu(x)^pM_{\mu,r}^p(f)(x)\mu^{1-p}(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\|M_{\mu,r}(Tf)(x)\|_{L^p(\mu)} +$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\|M_{\mu,r}(f)(x)\|_{L^p(\mu)} \leqslant$$
$$C\|b\|_{BMO(\mu)}\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

定理 3 得证.

4 参考文献

[1] Coifman R R,Rochberg R,Weiss G. Factorization theorems for Hardy space in several variables [J]. Ann of Math,1976,103(3):611-635.

[2] Janson S. Mean oscillation and commutators of singular integral operators [J]. Ark Mat,1978,16(1/2):263-270.

[3] Perez C. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators [J]. J Funct Anal,1995,128(1):163-185.

[4] Paluszynski M. Characterization of the Besv spaces via the commutator operator of Coifman,Rochberg and Weiss [J]. Indiana Univ Math J,1995,44(1):1-17.

[5] 胡伶俐,陈冬香. Bochner-Riesz 算子及其交换子在 Morrey 型空间的有界性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(4):414-416.

[6] 曾志强,陈冬香. 具有 $H(m)$-型核的奇异积分算子交换子的双权 Lipschitz 估计 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(6):601-604.

[7] 李亚楠,陈冬香. Bochner-Riesz 算子的极大交换子的双权 Lipschitz 估计 [J]. 高校应用数学学报:A 辑,2012,27(1):96-103.

[8] Hu Bei,Gu Jiajun. Necessary and sufficient conditions for boundedness of some commutators with weighted Lipschitz functions [J]. J Math Anal Appl,2008,340(1):598-605.

[9] Chang Derchen,Li Junfeng,Xiao Jie. Weighted scale estimates for Calderón-Zygmund type operators [J]. Contemporary Math,2007,445(1):61-70.

[10] 林燕. Calderón-Zygmund 型算子及其交换子的 sharp 极大函数估计 [J]. 数学物理学报,2011,31A(1):206-215.

[11] Garcia-Cuerva J. Weighted H^p space [J]. Dissertations Math,1979,162(1):1-63.

Weighted Inequalities for the Commutator of Calderón-Zygmund Type Operator

XIONG Peng,ZHENG Xiong-jun*

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: By the commutators theory,the properties of commutator $[b,T]$ when b in BMO(μ) and μ in $A_1(\mathbf{R}^n)$ are studied. Through eastablishing a pointwise inequality of sharp maximal function for the commutator,it is proved that the commutator is bounded form $L^p(\mu)$ to $L^p(\mu^{1-p})$.

Key words: commutators; weighted BMO function; Calderón-Zygmund type

(责任编辑:曾剑锋)