第 37 卷 第 2 期
2013 年 3 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 37 No. 2
Mar. 2013

文章编号:1000-5862(2013)02-0191-04

符号空间上 Takagi 函数的局部水平集

刘春苔

(武汉轻工大学数学与计算机学院,湖北 武汉 430023)

摘要: 利用符号空间上 Moran 集的维数性质,研究符号空间上 Takagi 函数水平集和局部水平集的维数,对符号空间中任意一点给出其对应局部水平集的维数,最后讨论了局部水平集 Hausdorff 维数的某种连续性.

关键词: Takagi 函数; Hausdorff 维数; 局部水平集; Moran 集

中图分类号: O 174.1　　**文献标志码:** A

0 引言

1903 年,Takagi 引入了一个处处连续而处处不可微的函数[1],它可表为

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| 2^n x \|}{2^n},$$

这里 $\| x \| = \min\{| x - n | : n \in \mathbf{Z}\}$ 表示离最近整数的距离. Takagi 函数在大量不同的文献中出现[2-7],它在不同领域有着重要应用. 本文考虑的问题涉及其函数图像$\{(x,T(x)):0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 的维数性质. 众所周知,$T(x)$ 的值域为 $[0,2/3]$,其图像的 Hausdorff 维数为 1,但是它的水平集 $L(y) = \{x: T(x) = y\}$ 的结构很复杂. 水平集的结构依赖于纵坐标 y 的选择. 对于不同的纵坐标 y 而言,水平集 $L(y)$ 可能为可数集(有限或无穷) 或为不可数集. 1984 年 Y. Baba[8] 证明了 L(2/3) 的 Hausdorff 维数为 1/2,从而它是 1 个不可数集. 而 2008 年,Z. Buczolich 证明在 Lebesgue 测度下,对 $[0,2/3]$ 中几乎所有的数,其水平集是 1 个有限集. D. E. Knuth[9] 证明了 L(1/2) 是 1 个可数无穷集.

鉴于水平集的复杂性,C. L. Jeffrey 等[10] 定义了局部水平集 $L^{loc}(x)$(这里 $x \in [0,1]$). 局部水平集是对水平集进一步的等价分类,能更深入地了解水平集的各种性质. 本文将考虑符号空间上的局部水平集维数及维数的某种连续性问题,其中符号空间$\{-1,1\}^{\infty}$ 由下一节给出定义.

问题 1 $\forall \sigma \in \{-1,1\}^{\infty}$,其局部水平集的维数是多少? 任给 $s \in [0,1/2]$,是否存在 $\sigma \in \{-1,1\}^{\infty}$ 使得局部水平集 $L^{loc}(\sigma)$ 的 Hausdorff 维数为 s?

本文借助符号空间上的 Moran 集,$\forall \sigma \in \Sigma_2^{\infty}$ 求出其局部水平集的 Hausdorff 维数[11],同时也对上述问题第 2 部分给出了一个正面回答.

1 预备知识

1.1 符号空间及其上的 Moran 集

设$\{n_k \geqslant 2\}_{k\geqslant 1}$ 为一列正整数. $\forall k \in \mathbf{N}$,记 $\Omega^k = \{i_1 \cdots i_k: 1 \leqslant i_j \leqslant n_j, 1 \leqslant j \leqslant k\}$. 约定 $\Omega^0 = \{\varnothing\}$. 记 $\Omega^* = \bigcup_{k\geqslant 0} \Omega^k$. 设 $i = i_1 i_2 \cdots i_k \in \Omega^k$,$j = j_1 j_2 \cdots j_n \in \Omega^n$,定义词的连接为 $i * j = i_1 i_2 \cdots i_k j_1 j_2 \cdots j_n$. 当 $n_k \equiv m \geqslant 2$ 时,Ω^k,Ω^* 也用记号 Σ_m^k,Σ_m^* 表示,它们的元素也用 σ 表示. 集合 Σ_m^k 中的元素 σ 也称为长是 k 的词,其词长用 $|\sigma|$ 表示. 符号 $\Sigma_m^{\infty} = \{\sigma_1 \sigma_2 \cdots: 1 \leqslant \sigma_j \leqslant m, j \geqslant 1\}$ 表示无限长的词集. 设 $\sigma = (\sigma_n) \in \Sigma_m^{\infty}$(简记为 $\sigma = (\sigma_n)$),令 $\sigma | k = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ 为 σ 的前 k 位截断,定义 Σ_m^{∞} 上 2 点 $\sigma = (\sigma_n)$,$\tau = (\tau_n)$ 的距离为

$$d(\sigma,\tau) = 2^{-\min\{n: \sigma_n \neq \tau_n\}},$$

则(Σ_m^{∞}, d) 是 1 个紧度量空间.

设$\{c_k: \exists n \geqslant 1$ 使得 $c_k = 2^{-n}\}_{k\geqslant 1}$ 为 1 列正实数. 记 $J = J_{\varnothing} = \Sigma_m^{\infty}$,称 J 的子集族 $F = \{J_i | i \in \Omega^*\}$ 为具有齐次 Moran 结构,如果满足:

(i) $\forall i \in \Omega^*$,J_i 与 J 相似;

收稿日期:2012-11-10

基金项目:华中师范大学中央高校基本科研业务费(CCNU11A01028)资助项目.

作者简介:刘春苔(1976-),女,湖北麻城人,讲师,主要从事分形几何的研究.

(ⅱ) $\forall k \geqslant 0$ 及 $\forall i \in \Omega^k$,$J_{i*1},\cdots,J_{i*n_{k+1}}$ 为 J_i 的子集,并且 $\forall m \neq n$,$J_{i*m} \cap J_{i*n} = \varnothing$;

(ⅲ) $\forall k \geqslant 1$,$i \in \Omega^{k-1}$ 及 $1 \leqslant j \leqslant n_k$ 有 $|J_{i*j}|/|J_i| = c_k$,其中 $|E|$ 表示集 E 的直径.

令 $E_k = \bigcup_{i \in \Omega^k} J_i$ 及 $E = \bigcap_{k \geqslant 0} E_k$,则 E 为非空紧集. 称 $E = E(F,\{n_k\},\{c_k\})$ 为满足($\{n_k\},\{c_k\}$)的齐次 Moran 集. 相应的 Moran 集族记为 $M(\{n_k\},\{c_k\})$. $\forall i \in \Omega^k$,记号 $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+1}(i)$ 表示诸 $J_{i*1},J_{i*2},\cdots,J_{i*n_{k+1}}$ 间的最小距离,δ_k 表示第 k 阶基本元的长度.

定义 1 称齐次 Moran 集 $E \in M(\{n_k\},\{c_k\})$ 为近齐次 Cantor 集(其全体记为 $C = C(\{n_k\},\{c_k\})$),如果 $\exists N > 0$,使得 $\forall k \geqslant 0$ 和 $\forall i \in \Omega^k$,有

$$\delta_k \leqslant 2^N \varepsilon_{k+1}. \tag{1}$$

命题 1 设 $\forall E \in M(\{n_k\},\{c_k\})$,则

$$\dim_H E \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(n_1\cdots n_k)}{-\log(c_1\cdots c_k)}.$$

证 令 $s_k = \log(n_1\cdots n_k) / [-\log(c_1\cdots c_k)]$. 注意到 $\forall k \in \mathbf{N}$,k 阶基本元集合 $\{J_i\}_{i\in\Omega^k}$ 是 E 的一个自然覆盖. 设 $t > s_* = \liminf_{k\to\infty} s_k$,则对足够小的 $\varepsilon > 0$,存在单调上升的正整数序列 $\{k_i\}$,使得 $t > s_{k_i} + \varepsilon$. 由齐次 Moran 集的构造(ⅲ),$\forall i = i_1\cdots i_k \in \Omega^k$,$|J_i| = c_1c_2\cdots c_k := c_i$. 从而有

$$\sum_{i\in\Omega^k} |J_i|^t < \sum_{i\in\Omega^k} c_i^{s_{k_i}+\varepsilon} = n_1\cdots n_{k_i}(c_1\cdots c_{k_i})^{s_{k_i}+\varepsilon} = (c_1\cdots c_{k_i})^{\varepsilon}.$$

由于 $\max\{|J_i|: i \in \Omega^k\} = c_1c_2\cdots c_k \to 0 (k \to \infty)$,所以 $H^t(E) \leqslant \lim_{i\to\infty} \sum_{i\in\Omega^k} |J_i|^t = 0$,因此 $\dim_H E \leqslant t$. 由 $t > s_*$ 的任意性得 $\dim_H E \leqslant s_*$.

定理 1 设 $C = C(\{n_k\},\{c_k\})$ 为近齐次 Cantor 集,则

$$\dim_H C = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(n_1\cdots n_k)}{-\log(c_1\cdots c_k)}.$$

证 由命题 1 知,只需证 $\dim_H C \geqslant s_*$. 如果 $s_* = 0$,结论显然成立. 下面假定 $s_* > 0$. 由 s_* 的定义,$\forall \alpha(0 < \alpha < s_*)$,$\exists k_0 \in \mathbf{N}$,使得 $\forall k \geqslant k_0$ 均有

$$n_1\cdots n_k\delta_k^\alpha > 1. \tag{2}$$

设集 U 是任意满足 $|U| < \delta_{k_0}$ 的集合,取 $k \geqslant k_0$ 为满足 $\delta_{k+1} \leqslant |U| < \delta_k$ 的唯一正整数. 设 μ 为 C 上的自然细分测度,即 $\mu(J_i) = (n_1n_2\cdots n_k)^{-1}$,$\forall i \in \Omega^k$. 分 2 种情形估计 $\mu(U)$.

情形 1 $|U| \leqslant \varepsilon_{k+1}$,则 U 最多与 1 个 $k+1$ 阶基本元相交,即

$$\mu(U) \leqslant (n_1\cdots n_{k+1})^{-1} = \delta_{k+1}^\alpha \leqslant |U|^\alpha.$$

情形 2 $|U| > \varepsilon_{k+1}$,则 U 最多与 n_{k+1} 个 $k+1$ 阶基本元相交,即 $\mu(U) \leqslant (n_1\cdots n_k)^{-1}$. 注意到(1)式,(2)式和条件 $|U| \geqslant \varepsilon_{k+1}$,所以有 $\mu(U) \leqslant \delta_k^\alpha \leqslant 2^{N\alpha}(\varepsilon_{k+1})^\alpha \leqslant 2^{N\alpha}|U|^\alpha$. 再注意到 $2^{N\alpha}$ 是与 $|U|$ 无关的常数,因此由质量分布原理得 $\dim_H C \geqslant s_*$.

定理 1 得证.

1.2 符号空间上的 Takagi 函数

下面考虑 2 个字符的符号空间,即 $\Sigma_2 = \{-1,1\}$,$\Sigma_2^\infty = \{-1,1\}^\infty$. $\forall \sigma \in \Sigma_2$,记 $\bar{\sigma} = -\sigma$. $\forall \sigma = (\sigma_n) \in \Sigma_2^\infty$,根据 $\sigma_1 = -1$ 或 1,令 $\varphi(\sigma) = \sigma$ 或者 $\bar{\sigma}$,同时记号 $S(\sigma)$ 表示移位运算,$\bar{\sigma}$ 表示按位取反运算,$\pi(\sigma)$ 表示 Σ_2^∞ 到 $\mathbf{R}$ 的自然投射,即

$$S(\sigma) = \sigma_2\sigma_3\cdots,\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\cdots,\pi(\sigma) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma_n}{2^n}.$$

在有限词集 Σ_2^* 也类似定义移位运算,按位取反运算,映射 φ 和自然投射 π,此时约定 $S(\sigma_2^1) = \{\varnothing\}$,$\pi(\varnothing) = 0$. 记 $D_j(\sigma) = \sum_{n=1}^j \sigma_n$,$Z(\sigma) = \{j: D_j(\sigma) = 0\}$,称 $Z(\sigma)$ 为 σ 的平衡点集. 当 $Z(\sigma)$ 为有限集且 $k > \#Z(\sigma)$ 时,规定 $d_k = \infty$,则平衡点集可写作 $Z(\sigma) = \{d_1,d_2,\cdots,d_k,\cdots\}$,此处 $\#E$ 表示集 E 的势. 约定 $d_0 = d_0(\sigma) = 0$. 设 $\sigma = (\sigma_n) \in \Sigma_2^\infty$,称 $B_k(\sigma) = \sigma_{d_{k-1}+1}\sigma_{d_{k-1}+2}\cdots\sigma_{d_k}$ 为词 σ 的第 k 个平衡块.

定义 2 设 $\sigma,\tau \in \Sigma_2^\infty$. 如果它们的平衡点集相同并且 k 阶平衡块相等,或者按位取反,即 $B_k(\sigma) = B_k(\tau)$ 或者 $B_k(\sigma) = \bar{B}_k(\tau)$,则称 σ 和 τ 等价,记作 $\sigma \sim \tau$.

Σ_m^∞ 上的 Takagi 函数定义为

$$f(\sigma) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\pi\varphi(S^n\sigma)}{2^n},\forall \sigma \in \Sigma_2^\infty,$$

它的水平集定义为 $L(y) = \{\sigma: f(\sigma) = y,\sigma \in \Sigma_2^\infty\}$. 称 $L^{loc}(\sigma) = \{\tau: \tau \sim \sigma\}$ 为关于 σ 的局部水平集.

引理 1 $\forall \sigma \in \Sigma_2^\infty$,有 $L^{loc}(\sigma) \subset L(f(\sigma))$,即如果 $\sigma \sim \tau$,则 $f(\sigma) = f(\tau)$.

证 $\forall \sigma = (\sigma_n) \in \Sigma_2^\infty$,记 $w_n(\sigma) = \sigma_n$ 并定义函数

$$g_k: \Sigma_2^\infty \to \mathbf{R},g_k(\sigma) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{k-n} \frac{w_i(\varphi S^n\sigma)}{2^i}.$$

注 1 如果 $k \in Z(\sigma)$,$\sigma \in \Sigma_2^\infty$,则

$$g_k(\sigma) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\pi\varphi(S^n\sigma)}{2^n}.$$

事实上,直接计算可得

$$\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\pi\varphi(S^n\sigma)}{2^n}=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{w_i(\varphi S^n\sigma)}{2^i}=$$
$$\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{k-n}\frac{w_i(\varphi S^n\sigma)}{2^i}+\sum_{i>k-n}\frac{w_i(\varphi S^n\sigma)}{2^i}\right)=$$
$$g_k(\sigma)+\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{2^n}\sum_{i>k-n}\frac{w_i(\varphi S^n\sigma)}{2^i}=g_k(\sigma)+$$
$$\sum_{i>k}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{w_{i-n}\varphi(S^n\sigma)}{2^i}=g_k(\sigma)+\sum_{i>k}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\sigma_i(2l_k-k)}{2^i},$$

其中 $l_k=\#\{\sigma_i=-1:1\leqslant i\leqslant k\}$. 由于 k 为平衡点，所以 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k$ 中有 $k/2$ 个 1 和 -1，即 $2l_k=k$. 因而，当 $i>k$ 时，有 $\sum_{n=0}^{k-1}\sigma_i(2l_k-k)=0$. 从而

$$g_k(\sigma)=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\pi\varphi(S^n\sigma)}{2^n}.$$

即注 1 成立.

设 $\sigma=(\sigma_n)$，$\sigma'=(\sigma'_n)\in\Sigma_2^\infty$，并且 $\sigma\sim\sigma'$. 为证 $f(\sigma)=f(\sigma')$，只需验证 $f(\sigma)$ 和 $f(\sigma')$ 求和公式中的关于 $1/2^n$ 的求和相等，即

$$A=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{n-k}(\varphi(S^k\sigma))}{2^n},$$
$$A'=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w_{n-k}(\varphi(S^k\sigma'))}{2^n},A=A'.$$

为此假定 σ_n 所在的平衡块为 B_k，记 $t=\#\{\sigma_i=-1:d_k+1\leqslant i\leqslant n\}$，则由注 1 可知，

$$A=\sum_{i=d_k+1}^{n}\frac{w_{n-i}(\varphi(S^i\sigma))}{2^n}=$$
$$\frac{t\sigma_n-(n-t-d_k)\sigma_n}{2^n}=\frac{(2t+d_k-n)\sigma_n}{2^n}.$$

当 $B_k(\sigma)=B_k(\sigma')$ 时，$A=A'$；而当 $B_k(\sigma)=\bar{B}_k(\sigma')$ 时，$\sigma_n=-\sigma_n$，且 $\#\{\sigma_i=-1:d_k+1\leqslant i\leqslant n\}=-t$，从而也有 $A=A'$. 以上表明 $f(\sigma)=f(\sigma')$.

2　局部水平集的维数

$\forall E$，若它的 s 维 Hausdorff 测度（记为 $H^s(E)$）为正有限集，则称 E 为 s 集. 此时集 E 的 Hausdorff 维数为 s.

定理 2（局部水平集维数）　设 $\sigma=(\sigma_n)\in\Sigma_2^\infty$，$Z(\sigma)$ 为其平衡点集，则

（ⅰ）若 $Z(\sigma)$ 有限，则 $\#L^{loc}(\sigma)=2^{\#Z(\sigma)}$；

（ⅱ）若 $Z(\sigma)=\{d_1,d_2,\cdots\}$ 为无穷集，则

$$\dim_H L^{loc}(\sigma)=\underline{\lim}_{k\to\infty}k/d_k.$$

证　（ⅰ）若 $\#Z(\sigma)=a<\infty$，则与 σ 等价的元素共有 2^a 个，从而 $\#L^{loc}(\sigma)=2^a$.

（ⅱ）此时可设 $\sigma=B_1B_2\cdots$，其中 B_k 为 σ 的第 k 个平衡块. 记 $l_k=d_k-d_{k-1}$. 局部水平集的定义表明

$$L^{loc}(\sigma)=\{\tau=B_1B_2\cdots:B_k=B_k\text{ 或 }B_k=\bar{B}_k\},$$

它是 1 个近齐次 Cantor 集，其中 $n_k=2$，$c_k=2^{-l_k}$. 直接验证可知 $\delta_k=\varepsilon_{k+1}=2^{-d_k}$，故由定理 1 知，其维数为

$$\dim_H L^{loc}(\sigma)=\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{k}{\sum_{i=1}^{k}l_i}=\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{k}{d_k}.$$

推论 1　设 $\sigma\in\Sigma_2^\infty$ 是周期的且每个周期都是由平衡块组成的，即 $\sigma=(B_1B_2\cdots B_k)^\infty$，则 $L^{loc}(\sigma)$ 是 $s(=k/t)$ 集，其中 t 为词 $B_1B_2\cdots B_k$ 的长度.

证　维数结论是定理 2 的直接推论，这里给出一个直接证明，同时此证明也表明 $H^{k/t}(L^{loc}(\sigma))$ 正有限. 有限词 $B_1\cdots B_k$ 的等价元共有 2^k 个，分别记为 $C_1,C_2,\cdots,C_{2^k}$. 定义 Σ_2^∞ 到 Σ_2^∞ 的压缩函数 $F_i(\sigma)=C_i*S^k(\sigma)$，$i=1,2,\cdots,2^k$. 直接验算可知

$$L^{loc}(\sigma)=\bigcup_{i=1}^{2^k}F_i(L^{loc}(\sigma)),$$

并且上式右端的并是不交的. 故迭代函数系统 $\{F_1,F_2,\cdots,F_{2^k}\}$ 满足强分离条件，其吸引因子 $L^{loc}(\sigma)$ 是 1 个 s 集，由文献 [12] 知，此吸引因子的 Hausdorff 维数 s 满足 $\sum_{i=1}^{2^k}(2^{-t})^s=1$，即 $\dim_H L^{loc}(\sigma)=s=k/t$.

注 2　在推论 1 的条件下，可以证明

$$H^s(L^{loc}(\sigma))=1.$$

设 $\sigma\in\sigma_2^*$，记号 σ^n 表示 n 个 σ 相乘，即 $\sigma^n=\sigma\times\sigma\times\cdots\times\sigma$.

定理 3　$\forall\sigma\in\Sigma_2^\infty$，则

$$0\leqslant\dim_H L^{loc}(\sigma)\leqslant 1/2.$$

进一步，$\forall s\in[0,1/2]$，$\exists\sigma\in\Sigma_2^\infty$，使得

$$\dim_H L^{loc}(\sigma)=s.$$

证　设 $\sigma\in\Sigma_2^\infty$ 的零点集 $Z(\sigma)=\{d_1,d_2,\cdots\}$ 为无穷集，由定理 2 知，$\dim_H L^{loc}(\sigma)=\underline{\lim}_{k\to\infty}k/d_k$. 因为每个平衡块的长度至少为 2，所以 $2k\leqslant d_k$，从而局部水平集的维数不超过 1/2. 当 $s=0$ 时，取 $\sigma=(\sigma_n=1)$，则 $\#L^{loc}(\sigma)=2$，故其 Hausdorff 维数为 0.

当 $s>0$ 时，由有理数在实数中稠密可知，存在单调上升数列 $\{s_n=p_n/q_n\}$，$2\leqslant p_n,q_n\in\mathbf{N}^+$，使得 $s_n\to s(n\to\infty)$，显然 $2p_n\leqslant q_n$. 取快速上升序列 $\{k_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ik_i}{k_{n+1}}=0.$$

令 $B_n=((-1,1)^{2p_n-1}(-1)^{q_n-2p_n+1}1^{q_n-2p_n+1})$，

$\sigma = B_1^{k_1} B_2^{k_2} \cdots B_n^{k_n} \cdots$,则由定理 2 可知,

$$\dim_H L^{loc}(\sigma) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i q_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = s.$$

3 参考文献

[1] Takagi T. A simple example of the continuous function without derivative [J]. Phys Math Soc Japan Ser II,1903(1):176-177.

[2] Kaplan J L,Mallet-Paret J,Yorke J A. The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus [J]. Ergod Th Dynam Sys,1984,4(2):261-281.

[3] Delange H. Sur la fonction sommatoir de la fonction "somme des chiffres" [J]. Enseign Math,1975,21(2):31-47.

[4] Buczolich Z. Irregular 1-sets on the graphs of continuous functions [J]. Acta Math Hungar,2008,121(4):371-393.

[5] Hata M,Yamaguti M. The Takagi function and its generalization [J]. Japan J Appl Math,1984,1(1):183-199.

[6] Trollope J R. An explicit expression for binary digital sums [J]. Math Mag,1968,41(1):21-25.

[7] Mirsky L. A theorem on representation of integers in the scale of r [J]. Scripta Math,1949,15(1):11-12.

[8] Baba Y. On maxima of Takagi-van der Waerden functions [J]. Proc Amer Math Soc,1984,91(3):373-376.

[9] Knuth D E. The art of computer programming,volume 4,fascicle 3: generating all combinations and partitions [M]. Upper Saddle River,New Jersey: Addison-Wesley,2005.

[10] Jeffrey C L,Maddock Z. Level sets of the Takagi function: local level sets [J]. Monatshefte für Mathematik,2012,166(2):201-238.

[11] 刘爱萍. 自相似集迭代函数系统的分离性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(6):594-596.

[12] Falconer K J. 分形几何:数学基础及其应用 [M]. 曾文曲,刘世耀,戴连贵,等,译. 沈阳:东北大学出版社,2001.

The Local Level Sets of Takagi on Symbol Space

LIU Chun-tai

(School of Mathematics and Computer Science,Wuhan Polytechnic University,Wuhan Hubei 430023,China)

Abstract: With Moran set on symbol space,the Hausdorff dimension of the level sets and the local level set of Takagi function $f(\sigma)$ on the symbol space are discussed. Exact Hausdorff dimension of the local level set for any point in symbol space is obtained. At last,the continuity of Hausdorff dimension on the local level sets is studied.

Key words: Takagi function; Hausdorff dimension; the local level set; Moran set

(责任编辑:曾剑锋)