第 37 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 37 No. 2
2013 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2013

文章编号:1000-5862(2013)02-0206-04

停止损失再保险与风险模型的有限时间破产概率

王丙参[1],魏艳华[1],戴　宁[2]

(1. 天水师范学院数学与统计学院,甘肃 天水　741001;2. 郑州大学数学系,河南 郑州　450002)

摘要:利用线性规划证明了停止损失再保险的最优性,在保费收取次数为负二项随机过程下,研究保险公司利用停止损失再保险最小化其破产概率的问题,用鞅方法得到破产概率的解析表达式及上界.

关键词:再保险;停止损失序;负二项分布;破产概率

中图分类号:O 211.9　　　**文献标志码**:A

0　引言

当保险公司自身无力承担某保单风险,但又不想失去此单业务时,再保险是其分散风险的有效方法. 因此,根据实际情况,建立具有再保险因素的风险模型,进而研究再保险对破产概率的影响具有重要现实意义[1-4]. 在经典风险模型中,假设保险公司按照常数速率收取保单且每张保单的保费相等,但在实际中,所收取保单过程常常是一个随机过程,而非确定过程,目前许多学者对这方面进行了讨论,得到了一些可靠性指标[5-9]. 本文首先利用线性规划理论证明了停止损失再保险的最优性,在保费收取次数为负二项随机过程下,研究保险公司利用停止损失再保险最小化其破产概率的问题,用鞅方法得到破产概率的解析表达式及上界,给保险公司提供有价值的建议.

1　停止损失再保险的最优性

停止损失再保险承保保单约定损失超出指定免赔额的超额部分,如果保险事故造成损失为 X,则再保险人理赔支付为 $(X-d)_+=\max\{X-d,0\}$,而原保险人只支付剩余部分. 可见,保险人只承担了风险小于 d 的部分,则其损失一定不会超过 d,因此这种形式的保险保障称为停止损失再保险也合情合理,纯保费 $\pi_X(d)=E[(X-d)_+]$ 称为停止损失保费.

定理 1　当保险事故损失 $X\geqslant 0$ 时,某再保险合同约定的理赔支付为 $I(X)$,假定 $\forall x, 0\leqslant I(x)\leqslant x$,则 $E[I(X)]=E[(X-d)_+]\Rightarrow \mathrm{Var}[X-I(X)]\geqslant \mathrm{Var}[X-(X-d)_+]$.

文献[2]已利用随机序对定理 1 进行证明,其实定理 1 也可采用线性规划法证明.

事实上,考虑数学规划问题:

$$\max_y g(y)=u(w-p-x+y)-\lambda y,$$
$$\text{s.t}\quad 0\leqslant y\leqslant x,$$

其中 $\lambda\in\mathbf{R}$,显然 $g(y)$ 连续可导. 由于 $u'(w)>0$,$u''(w)<0$,所以 $u(x)$ 是严格凹函数,从而 $g(y)$ 也是严格凹函数.

令 $g'(y)=0$ 可得 $u'(w-p-x+y)-\lambda=0$,于是 $g(y)$ 在 $\hat{y}=x-w+p+u'^{-1}(\lambda)$ 处取得最大值. 令 $\delta=w-p-u'^{-1}(\lambda)$,则 $\hat{y}=x-\delta$,又因为 $0\leqslant y\leqslant x$,所以 $\hat{y}=(x-\delta_+)_+$. 令 $d=\delta_+$ 可得数学规划的最优解 $\hat{y}=(x-d)_+$. 令 $I^*=(X-d)_+$,$p=h(I(X))$ 为再保险保费函数. $E[u(w-p-X+I^*)]-E[u(w-p-X+I)]=\{E[u(w-p-X+I^*)]-\lambda h^{-1}(P)\}-\{E[u(w-p-X+I)]-\lambda h^{-1}(P)\}=\{E[u(w-p-X+I^*)]-\lambda EI^*\}-\{E[u(w-p-X+I)]-\lambda EI\}=E[u(w-p-X+I^*)-\lambda I^*]-E[u(w-p-X+I)-\lambda I]\geqslant 0$,所以 $I^*=(X-d)_+$ 使期望效用达到最大.

注 1　期望效用最优准则的基本思想是决策的优劣由期望效用函数值的大小决定.

2　建立模型

定义 1　在 Bernoulli 试验序列中,若每次试验事件 A 成功的概率为 p,则恰好出现 n 次成功所需的

收稿日期:2012-12-15

基金项目:国家自然科学基金(61104045)和甘肃省自然科学基金(096RJZE106)资助项目.

作者简介:王丙参(1983-),男,河南南阳人,讲师,硕士,从事随机过程和金融数学研究.

失败次数 $Y \sim NB(n,p)$, $P(Y=k)=C_{n+k-1}^{k}p^{n}\cdot(1-p)^{k}$, $k\in\mathbf{N}$.

显然矩母函数 $M_Y(t)=E(e^{tY})=[p/(1-qe^{t})]^{n}$,利用 $EY^{k}=M_Y^{(n)}(0)$ 得 $EY=nq/p$, $\mathrm{Var}(Y)=nq/p^{2}$. 在非寿险中常将 $NB(n,p)$ 推广为 $NB(r,\beta)$,即 $P(Y=n)=C_{n+r-1}^{n}[1/(1+\beta)]^{r}[\beta/(1+\beta)]^{n}$, $n\in\mathbf{N}$, $r>0$, $\beta=q/p>0$,此时 r 未必是整数,可取小数. 当投保次数 $N\sim P(\lambda)$, $EN=\mathrm{Var}(N)$,这意味着投保集体同质,而在实际中,理赔经历往往具有正向传染性,即一旦发生理赔便失去了保费优待条款,从而以后更可能漫不经心,增加发生事故的可能性,这时投保集体便非同质,这为负二项分布的应用创造了条件[10]. 如果第 n 次理赔发生的频率强度 $\theta_n=a+b(n-1)$, $b>0$,已发生 n 次理赔再经过时间 h 发生理赔的次数记为 N,则 $P(N=k)=p_{n,n+k}(h)=e^{-\theta_{n+k+1}h}\dfrac{\theta_{n+1}\cdots\theta_{n+k}}{b\cdot(2b)\cdots(kb)}(e^{bh}-1)^{k}$. 如果令 $P_h=e^{-hb}$, $a_n=\theta_{n+1}/b$,则有

$$P(N=k)=(1-P_h)^{k}e^{-\theta_{n+k+1}h}\cdot\frac{\theta_{n+1}(\theta_{n+1}+b)\cdots(\theta_{n+k}+(k-1)b)}{b^{k}\cdot k!}=$$

$$\frac{\frac{\theta_{n+1}}{b}\left(\frac{\theta_{n+1}}{b}+1\right)\cdots\left(\frac{\theta_{n+k}}{b}+k-1\right)}{k!}e^{-\theta_{n+k+1}h}(1-P_h)^{k}=C_{a_n+k-1}^{k}P_h^{a_n}(1-P_h)^{k}.$$

可见 $N\sim NB(a_n,P_h)$,即负二项分布是一种正向传染模型,如在汽车保险中单个投保人的理赔次数可能更加接近于负二项分布,因此汽车保险中在拟合理赔次数时常用负二项分布. 容易看出,负二项分布的方差大于均值,二者差异越大则投保集体的非同质性越显著.

定义 2　设 $\{N_n,n\in\mathbf{N}\}$ 为取自然数值的随机变量序列且 $\forall n_2>n_1$, $N_{n_2}-N_{n_1}\sim NB(n_2-n_1,p)$,则称 $\{N_n,n\in\mathbf{N}\}$ 为参数为 (n,p) 的负二项随机过程,简记为 $NBRP(n,p)$.

显然负二项随机过程具有平稳独立增量.

模型 1: 设初始资本 $u\geqslant0$,给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$, $n(\geqslant0)$ 为整数,令 $U_n=u+cN_n-\sum_{i=1}^{M_n}X_i$, $Y_n=\sum_{i=1}^{M_n}X_i$, $S_n=cN_n-\sum_{i=1}^{M_n}X_i$,其中常数 $c(>0)$ 表示每次投保保费收入, $\{N_n,n\in\mathbf{N}\}$ 是 $NBRP(n,p)$,它表示在时间 $[0,n]$ 内的投保次数, $\{M_n,n\in\mathbf{N}\}$ 是参数为 λ 的泊松过程 $(PP(\lambda))$,它表示在时间 $[0,n]$ 内理赔次数, X_i i. i. d. 于 X, cdf 为 $G(x)$, $EX=\mu_1$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma_1^{2}$, $E(e^{rX})<\infty$, $\lim\limits_{r\to l}E(rX)=\infty$, $r<l<\infty$. 随机过程 $\{N_n,n\geqslant0\}$, $\{M_n,n\geqslant0\}$ 与 $\{X_n,n\in\mathbf{N}\}$ 相互独立. 为保证保险公司正常运营,假设 $\theta=cq/(p\lambda\mu_1)-1>0$,称为安全系数,否则,若 $\theta<0$,由大数定律可知,保险公司破产的概率为 1,没有讨论的必要.

注 2　理赔额独立性假设在很多情况下并不满足,如当地震、水灾发生时的理赔,丈夫和妻子的死亡风险也存在明显的正相关,因为双方的任一方死亡都会使对方过度伤心,并且物以类聚、人以群分,即双方的环境和个性相似影响死亡率. 独立性假设只是使得数学上的处理比风险联合分布的其它结构更容易. 如果风险是正相依的,独立性假设可能会低估资产风险,即低估保险公司破产概率,尤其极端正相依时,总理赔额的风险最大.

模型 2: 在模型 1 中,如果保险公司无力承担某保单风险,可通过签订再保险合同将其所承受的部分风险转给再保险公司. 设 X 是保险公司承受的理赔额,通过再保险方式,保险人赔偿 $0\leqslant h(X)\leqslant X$,再保险人赔偿 $X-h(X)$,考虑停止损失再保险,则 $h(X)=\min(X,M)$,其中 $M>0$ 为自留额,并假定保险公司按照期望保费原理厘定保费,保险人与再保险人的安全系数分别为 θ 和 ξ 且 $\theta<\xi$. 保险公司签订再保险合同后在时刻 n 的盈余 $U_n=u+(c-A(M))N_n-\sum_{i=1}^{M_n}h(X_i)$, $S_n=(c-A(M))N_n-\sum_{i=1}^{M_n}h(X_i)$,其中 $A(M)=(1+\xi)\int_M^{\infty}(1-G(x))\mathrm{d}x$ 为再保险费,为保证保险公司的稳定经营,假定 $cq/p-A(M)-\lambda E[h(X)]>0$.

定义 3　记 $T=\inf\{n:U_n<0\}$,它表示当保险公司破产时,即 T 为首次到达负资产,若 $T=\inf\{\varnothing\}=+\infty$,可认为破产不会发生,则称 $\varphi(u)=P\{T<\infty|U_0=u\}$ 为破产概率, $\varphi(u,t)=P\{T<t|U_0=u\}$ 为有限时间内破产概率,即在时间 $(0,t)$ 内保险人破产的概率.

注 3　H. U. Gerber 定义 $T=\inf\{n:U(n)\leqslant0\}$,不过目前大多文献采用定义 3 的形式.

从定义 3 可知,对于 $u_1\leqslant u_2$ 和 $0<t_1\leqslant t_2<\infty$ 有以下结论:

(i) $\forall t>0$, $\varphi(u_2,t)\leqslant\varphi(u_1,t)$;

(ii) $\varphi(u_2)\leqslant\varphi(u_1)$;

(iii) $\varphi(u,t_1)\leqslant\varphi(u,t_2)\leqslant\varphi(u)$;

(iv) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(u,t)=\varphi(u)$.

定理 2　矩母函数 $M_{Y_n}(t)=M_{M_n}(\log M_X(t))$, $EY_n=$

$EXEM_n$, $\mathrm{Var}(Y_n)=EM_n\mathrm{Var}(X)+(EX)^2\mathrm{Var}(M_n)$.

证 $M_{Y_n}(t)=E(\mathrm{e}^{tY_n})=E[E(\mathrm{e}^{tY_n}\mid M_n)]=E[E(\mathrm{e}^{tY_n}\mid M_n=n)]\mid_{n=M_n}=E[M_X(t)^{M_n}]=M_{M_n}(\log M_X(t))$, $M'_{Y_n}(t)=M'_{M_n}(\log M_X(t))M'_X(t)/M_X(t)$,令 $t=0$ 得 $EY_n=EXEM_n$.

因为 $M''_{Y_n}(0)=M''_{M_n}(0)M'_X(0)^2+M'_{M_n}(0)\cdot\{M''_X(0)-M'_X(0)^2\}$,所以 $EY_n^2=EM_n^2(EX)^2+EM_n\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y_n)=E(M_n)\mathrm{Var}(X)+(E(X))^2\cdot\mathrm{Var}(M_n)$.

定理 3 在模型 1 中盈余过程 $\{S_n,n\geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量,且 $S(0)=0$; $EU_n=u+cnq/p-\lambda n\mu_1$, $\mathrm{Var}(U_n)=nc^2q/p^2+n\lambda(\sigma^2+\mu_1^2)$,其中 $\mu_1=EX$, $\sigma_1^2=\mathrm{Var}(X)$, $p+q=1$.

证 显然盈余过程具有平稳独立增量; $EU_n=u+cnq/p-\lambda n\mu_1$, $\mathrm{Var}(U_n)=nc^2q/p^2+EM_n\mathrm{Var}(X)+(EX)^2\mathrm{Var}(M_n)=nc^2q/p^2+n\lambda(\sigma^2+\mu_1^2)$.

3 破产概率

若理赔额 X 的矩母函数存在,通常称为轻尾分布,反之,称为重尾分布. 在假设 X 为轻尾分布的前提下,可得如下定理.

定理 4 在模型 1 中,对于盈余过程 $\{S_n,n\geqslant 0\}$,存在函数 $g(r)=\mathrm{Ln}[p/(1-q\mathrm{e}^{-cr})]+\lambda M_X(r)-\lambda$, $r\geqslant 0$,使得 $E[\exp(-rS_n)]=\exp(ng(r))$,且方程 $g(r)=0$ 存在唯一正根 R,称 R 为调节系数.

证 $E[\exp(-rS_n)]=E[\exp(-crN_n)]\cdot E[\exp(r\sum_{i=1}^{M_n}X_i)]=\left(\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{-cr}}\right)^n\exp[(\lambda M_X(r)-\lambda)n]=\exp\left[n\left(\mathrm{Ln}\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{-cr}}+\lambda M_X(r)-\lambda\right)\right]=\exp(ng(r))$,

$g(0)=0$, $g''(r)=\frac{c^2q\mathrm{e}^{-cr}}{(1-q\mathrm{e}^{-cr})^2}+\lambda M''_X(r)>0$,故 $g(r)$ 是下凸函数,因而方程 $g(r)=0$ 有 2 个解,其中 $r=0$ 是平凡解.

又因为 $g'(r)=-cq\mathrm{e}^{-cr}/(1-q\mathrm{e}^{-cr})+\lambda M'_X(r)$,且 $\lim\limits_{r\to\infty}g(r)=\infty$, $g'(0)=-cq/p+\lambda\mu<0$,故 $g(r)=0$ 必存在 1 个非平凡根,即存在唯一的正根 R.

定理 5 在模型 2 中,对于盈余过程 $\{S_n,n\geqslant 0\}$,存在函数 $g(r)=\mathrm{Ln}[p/(1-q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r})]+\lambda M_{h(X)}(r)-\lambda$, $r\geqslant 0$,使得 $E[\exp(-rS_n)]=\exp(ng(r))$,且方程 $g(r)=0$ 存在唯一正根 R.

证 $E[\exp(-rY_n)]=E[\exp(-(c-A(M))\cdot rN_n)]E[\exp(r\sum_{i=1}^{M_n}h(X_i))]=\left[\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r}}\right]^n\cdot\exp[(\lambda M_{h(X)}(r)-\lambda)n]=\exp\left[n\left(\mathrm{Ln}\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r}}+\lambda M_{h(X)}(r)-\lambda\right)\right]=\exp(ng(r))$, $g(0)=0$, $g''(r)=\frac{(c-A(M))^2q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r}}{(1-q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r})^2}+\lambda\int_0^\infty h^2(x)\mathrm{e}^{rh(x)}\mathrm{d}G(x)>0$,故 $g(r)$ 是下凸函数,因而方程 $g(r)=0$ 有 2 个解,其中 $r=0$ 是平凡解.

又因为 $g'(r)=-(c-A(M))q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r}/(1-q\mathrm{e}^{-(c-A(M))r})+\lambda\int_0^\infty h(x)\mathrm{e}^{rh(x)}\mathrm{d}G(x)$,且 $g'(0)=-cq/p+A(M)+\lambda E[h(X)]<0$ 及 $\lim\limits_{r\to\infty}g(r)=\infty$,故 $g(r)=0$ 必存在 1 个非平凡根,即存在唯一的正根 R.

对于盈余过程 $\{S_n,n\geqslant 0\}$,定义事件流 $\mathscr{F}^S=\{\mathscr{F}_n^S,n\geqslant 0\}$,其中 $\mathscr{F}_n^S=\sigma\{S_{n_1},n_1\leqslant n\}$,事件流就是信息流,$\sigma$ 代数的递增意味着信息只能变多. 显然 T 是 $\mathscr{F}^S$ 停止时刻,即 T 为停止的规则,只需观察盈余过程到 n 时刻就可判断随机事件 $\{T<n\}$ 是否发生.

定理 6 $\{M_u(n)=\exp(-RU_n),\mathscr{F}_n^S;n\geqslant 0\}$ 是鞅.

证 显然 $M_u(n)$ 是 $\mathscr{F}_n^S$ 可测的,

$E[M_u(n)]=\exp(-Ru)<+\infty$, $\forall v$, $0\leqslant v<n$,

$E[M_u(n)\mid\mathscr{F}_v^S]=E[\exp(-Ru+RS_n)\mid\mathscr{F}_v^S]=E[\exp(-Ru+RS_v-R(S_n-S_v))\mid\mathscr{F}_v^S]=M_u(v)E[\exp(-R(S_n-S_v))]=M_u(v)$,

显然结论成立.

由于 R 是使得 $\{M_u(n),\mathscr{F}_n^S;n\geqslant 0\}$ 为鞅的唯一实数,所以命名 R 为调节系数. 鞅意味着随机过程 $\{M_u(n),\mathscr{F}_n^S;n\geqslant 0\}$ 为均值相等过程,即存在等价鞅测度使得盈余为 0. 显然由鞅理论及控制收敛定理可得如下结论.

定理 7 在模型 1 和模型 2 中,令 R 为调节系数, $\forall u\geqslant 0$,则有

$$\varphi(u)=\frac{\mathrm{e}^{-Ru}}{E[\exp(-RU(T))\mid T<\infty]}. \quad (1)$$

推论 1 (i) 若 $\theta\to 0$,则 $\varphi(u)\to 1$; 若 $\theta\leqslant 0$,则 $\varphi(u)=1$,即在不考虑投资收益的情况下,保费期望收入小于等于理赔支出,则保险公司一定破产,只是生存长短有区别;

(ii) 若 $T<\infty$,则 $U(T)<0$,从而(1)式的分母大于或等于 1,即 Lundberg 不等式 $\varphi(u)<\mathrm{e}^{-Ru}$ 成立;

(iii) 若理赔额不超过 b,则 $U(T)\geqslant -b$,即 $\varphi(u)\geqslant\mathrm{e}^{-R(u+b)}$,因此制定理赔上限可降低破产概率下限;

（ⅳ）若 $u \to \infty$，则（1）式的分母有 1 个有限的极限 f 且 $f > 1$. 当 u 取大值时，有 $\varphi(u) \approx e^{-Ru}/f$，也称为破产概率的渐近逼近公式，即提高初始资本可降低破产概率.

显然，破产概率 $\varphi(u)$ 随调节系数 R 的增大而减小，但 R 随保单保费的增大而增大，随着自留额增加而增大，随着理赔额增大而减小，不过增加自留额会降低期望盈余，只能在盈余和破产之间找到适合自己的平衡点，因此合理厘定保费和选取恰当自留额至关重要[11]. 保险公司的本质就是通过风险交换，使得投保人风险可控且保险人赚取适当的利润，从而达到整个社会帕累托最优. 若保险公司破产概率高，则不能给投保人安全感，即投保人不会投保，进而保险业萎缩，因此，这时保险人必须采取措施降低破产概率，如再保、提高保费或者设法吸收一些额外的资本金（发行新股、政府注资等）.

4　参考文献

[1] 邓国华，风险非同质时索赔次数的统计研究[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2004，28（3）：228-231.

[2] 魏艳华，王丙参. 风险交换与停止损失再保险[J]. 河北北方学院学报：自然科学版，2011，27（1）：68-70.

[3] 何远兰. 最优停止损失再保险研究[D]. 广州：暨南大学，2010.

[4] 张茂军，南江霞. 再保险与有限时间的破产概率[J]. 高校应用数学学报，2007，22（4）：411-415.

[5] 赵金娥，轩素梅，穆凤. 退保因素下保费收入为复合 Poisson 过程的风险模型[J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31（7）：53-57.

[6] 郑丹，章溢，温利民. 具有时间变化效应的信度模型[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36（5）：249-252.

[7] 魏丽. 风险投资和大额索赔下更新模型的破产概率[J]. 中国科学 A 辑：数学，2009，39（8）：933-938.

[8] 聂高琴，刘次华，徐立霞. 随机保费率下带干扰风险模型的破产概率[J]. 华中师范大学学报：自然科学版，2005，39（3）：301-303.

[9] 王丙参，魏艳华. 保费收取次数为负二项随机过程的风险模型[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2010，34（6）：604-608.

[10] 王丙参，何万生，戴宁. 负二项分布的优良特性及其在风险管理中的应用[J]. 延安大学学报：自然科学版，2011，21（4）：14-18.

[11] 刘琳. 停止损失再保险最优自留额的确定及存在性讨论[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2011，35（6）：614-616.

The Stop-Loss Reinsurance and the Finite Time Ruin Probability of Risk Model

WANG Bing-can[1]，WEI Yan-hua[1]，DAI Ning[2]

（1. School of Mathematics and Statistics，Tianshui Normal University，Tianshui Gansu 741001，China；
2. Department of Mathematics，Zhengzhou University，Zhengzhou Henan 450002，China）

Abstract: A concision proof of optimal reinsurance theorem by linear programming is given. The insurance for taking negative binomial random process of risk model is discussed. A problem for minimizing the ruin probability by stop-loss reinsurance，the upper boundary and analyze expression of ruin probability are given in terms of the martingale method.

Key words: reinsurance；stop-loss order；negative binomial distribution；ruin probability

（责任编辑：曾剑锋）