第 37 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 3
2013 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2013

文章编号:1000-5862(2013)03-0221-04

BR_0 代数中的* 理想及其诱导的商代数

牛超慧,吴洪博*

(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

摘要:通过在 BR_0 代数中引入了新的运算*,首先定义了 BR_0 代数中的* 理想、素* 理想、生成* 理想、极大* 理想,并研究了对应理想的一些性质;其次,通过(素)* 理想构造出 1 个同余关系,并证明了 1 个 BR_0 代数在该同余关系下的商代数还是(全序)BR_0 代数.

关键词:逻辑代数;BR_0 代数;* 理想;素* 理想;极大* 理想;商代数

中图分类号:O 141.1 **文献标志码**:A

0 引言

逻辑代数作为模糊命题逻辑系统的语义理论已形成一个重要的代数分支和研究方向. 早期的逻辑代数有 Gödel 逻辑代数、乘积逻辑代数、MV 代数等[1-3]. 1998 年,P. Hájek 经过对 3 种逻辑代数结构的分析和总结在文献[4]中以 3 种代数为特例建立了基础逻辑代数—BL 逻辑代数. 2000 年,王国俊根据模糊推理逻辑基础的需要创立了模糊命题演算的形式演绎系统 L^* 和与之在语义上相匹配的逻辑代数—R_0 代数[5-7]. R_0 代数是独立于 BL 代数的逻辑代数,因而在逻辑代数的研究中发挥着重要作用,从而吸引了众多学者对 R_0 代数研究的关注[8-16]. 吴洪博通过对 R_0 代数深入研究,在文献[8]中建立了模糊逻辑代数的另一个基础代数—BR_0 代数. BR_0 逻辑代数以 MV 代数和 R_0 代数作为其特例,是与 BL 逻辑代数既相互联系又相对独立的基础逻辑代数,因而对 BR_0 代数的研究具有重要意义.

在模糊命题逻辑系统和逻辑代数的研究中,滤子是非常重要的工具,特别是在模糊命题逻辑系统的完备性证明方面滤子发挥着十分关键的作用[1-8,16-17]. 本文在文献[8-12,18]的基础上对 BR_0 代数进一步地研究. 首先在 BR_0 代数中引入了新的运算*,定义了 BR_0 代数中* 理想、素* 理想、生成* 理想、极大* 理想,并讨论对应理想的一些性质. 其次,通过(素)* 理想构造出 1 个同余关系,并证明了 1 个 BR_0 代数在该同余关系下的商代数还是(全序)BR_0 代数. 本文的研究结果是对 BR_0 代数研究内容的一个有益补充.

1 基本知识

定义 1 设 $(M,(\,',\vee,\to))$ 是 $(1,2,2)$ 型代数,如果 M 上有偏序 $\leqslant$ 使 $(M,\leqslant)$ 为有界分配格,$\vee$ 是关于序 $\leqslant$ 的上确界运算,$'$ 是关于序 $\leqslant$ 的逆序对合对应,且

(M1) $a'\to b'=b\to a$;

(M2) $1\to a=a,a\to a=1$;

(M3) $b\to c\leqslant(a\to b)\to(a\to c)$;

(M4) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$;

(M5) $a\to b\vee c=(a\to b)\vee(a\to c),a\to b\wedge c=(a\to b)\wedge(a\to c)$,

其中 1 是 $(M,\leqslant)$ 的最大元,则称 M 为 BR_0 代数.

本文在 BR_0 代数 M 中再引入以下 2 种 2 元运算:$\forall a,b\in M,a\oplus b=a'\to b,a*b=(a\to b')'$.

引理 1 设 M 是 BR_0 代数,$a,b,c\in M$,则

(P1) $a\to b=1$ 当且仅当 $a\leqslant b$;

(P2) $a\leqslant b\to c$ 当且仅当 $b\leqslant a\to c$;

(P3) $(a\to b)\vee(b\to a)=1$;

(P4) $a\vee b\leqslant((a\to b)\to b)\wedge((b\to a)\to a)$;

(P5) $a\oplus b=(a'*b')',a*b=(a'\oplus b')'$;

(P6) $(M,\oplus,0)$ 是以 0 为单位的交换半群;

(P7) $(M,*,1)$ 是以 1 为单位的交换半群;

(P8) $a*b\leqslant a\wedge b\leqslant a\vee b\leqslant a\oplus b$;

收稿日期:2013-03-20

基金项目:国家自然科学基金(11171196)资助项目.

通信作者:吴洪博(1959-),男,陕西咸阳人,教授,博士,主要从事格上拓扑学与非经典数理逻辑的研究.

(P9) $a * a' = 0$, $a \oplus a' = 1$;

(P10) $a * (b \vee c) = (a * b) \vee (a * c)$;

(P11) $\oplus$ 与 $*$ 都是单调算子;

(P12) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

2　BR_0 代数中 $*$ 理想的定义及性质

定义 2　设 M 是 BR_0 代数, $I \subseteq M$, 如果满足

(i) $0 \in I$;

(ii) 若 $b \in I$, $a * b' \in I$, 则 $a \in I$,

则称 I 为 $*$ 理想. 若 I 是 M 的真子集, 则称 I 为真 $*$ 理想. M 的全体 $*$ 理想集合记为 $I(M)$.

例 1　设 $M = \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$, 在 M 中定义 1 个 1 元运算 $'$ 和 2 个 2 元运算 $\vee$, $\rightarrow$ 如下:

$$a' = 1 - a, a \vee b = \max\{a, b\}, a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b; \\ a' \vee b, & a > b. \end{cases}$$

由定义 1 可证在自然序下 $(M, (', \vee, \rightarrow))$ 是 BR_0 代数, 且 $I = \{0, 1/4, 2/4, 3/4\}$ 是 M 的 1 个理想. 但是

(i) $0 \in I$;

(ii) $1/4 \in I$, $1 * (1/4)' = 1 * (3/4) = (1 \rightarrow (3/4)')' = (1 \rightarrow 1/4)' = 3/4 \in I$, 而 $1 \notin I$,

所以 I 不是 M 的 $*$ 理想.

定理 1　设 M 是 BR_0 代数, $I \subseteq M$,

(i) I 是 $*$ 理想当且仅当 $I \neq \varnothing$, I 是下集(即当 $b \in I$, $a \leqslant b$ 时, $a \in I$), 且 I 对 $\oplus$ 封闭;

(ii) $*$ 理想对 $\vee$ 封闭, 且包含 0; 从而它是通常意义下的理想.

证　(i) 充分性　设 I 是 $*$ 理想. 由 $0 \in I$ 知 $I \neq \varnothing$. 又设 $b \in I$, 当 $a \leqslant b$ 时, 由(P1)知 $a * b' = (a \rightarrow b)' = 1' = 0 \in I$, 结合定义 2(ii)知 $a \in I$, 所以 I 为下集. 再设 $a, b \in I$, 由(P5), (P6)和(P9)以及 $((a \oplus b) * a') * b' = ((a \oplus b)' \oplus a)' * b' = (((a \oplus b)' \oplus a) \oplus b)' = ((a \oplus b)' \oplus (a \oplus b))' = 1' = 0 \in I$ 知 $((a \oplus b) * a') * b' \in I$, 由 $b \in I$ 和定义 2 知 $(a \oplus b) * a' \in I$, 进而由 $a \in I$ 得 $a \oplus b \in I$, 故 I 对 $\oplus$ 封闭.

必要性　设 $I \neq \varnothing$. 由 I 为下集知 $0 \in I$. 设 $b \in I$, $a * b' \in I$, 则 $(a * b') \oplus b \in I$. 因为 $(a * b') \oplus b = (a \rightarrow b)' \oplus b = (a \rightarrow b) \rightarrow b$, $a \rightarrow b \leqslant a \rightarrow b$, 从而由(P2)得 $a \leqslant (a \rightarrow b) \rightarrow b \in I$, 且由 I 为下集知 $a \in I$, 从而 I 是 $*$ 理想.

(ii) 由(P8)知 $a \vee b \leqslant a \oplus b$. 因此, 由 $*$ 理想为下集以及对 $\oplus$ 封闭知 I 对 $\vee$ 封闭, 所以 $*$ 理想为通常意义下的理想.

定义 3　设 M 是 BR_0 代数, $I \subseteq M$, 如果 I 是 $*$ 理想, 且当 $a \wedge b \in I$ 时, $a \in I$ 或者 $b \in I$, 则称 I 为素 $*$ 理想.

定理 2　设 M 是 BR_0 代数, $I \subseteq M$, $*$ 理想 I 是素 $*$ 理想当且仅当 M 中的任意 2 个元素 a 与 b, 有 $a * b' \in I$ 或 $b * a' \in I$.

证　充分性　设 I 为素 $*$ 理想, 由(P3)知 $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) = 1$, 又由(P12)得

$$(a \rightarrow b)' \wedge (b \rightarrow a)' = 0 \in I,$$

即 $(a * b') \wedge (b * a') = 0 \in I$, 由定义 3 知, $a * b' \in I$ 或 $b * a' \in I$.

必要性　设 I 是 $*$ 理想且对 M 中任意 2 个元素 a 与 b 有 $a * b' \in I$ 或 $b * a' \in I$. 如果 $a \wedge b \in I$, 则由(P4)知 $(a \vee b)' \geqslant ((a \rightarrow b) \rightarrow b)' \vee ((b \rightarrow a) \rightarrow a)'$, 即 $a' \wedge b' \geqslant ((a \rightarrow b) \rightarrow b)' \vee ((b \rightarrow a) \rightarrow a)'$. 用 a 与 b 分别替换 a' 与 b', $a \wedge b \geqslant ((a' \rightarrow b') \rightarrow b')' \vee ((b' \rightarrow a') \rightarrow a')' = ((a' \rightarrow b') * b) \vee ((b' \rightarrow a') * a) = ((a' * b)' * b) \vee ((b' * a)' * a)$, 由于 $*$ 理想为下集, 故 $(a' * b)' * b \in I$, $(b' * a)' * a \in I$. 由定义 2 知, 若 $a' * b = b * a' \in I$, 则 $b \in I$; 若 $b' * a = a * b' \in I$, 则 $a \in I$. 所以 I 为素 $*$ 理想.

引理 1　设 M 是 BR_0 代数, $\{I_i\}_{i \in \Gamma} \subseteq I(M)$, 其中 $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 则 $\cap \{I_i\}_{i \in \Gamma} \in I(M)$.

注 1　由引理 1 知, 1 个 BR_0 代数 M 中的 $*$ 理想构成的非空集族, 在集合的包含序下构成偏序集. M 的 $*$ 理想链是指 $*$ 理想的非空集族中任何 2 个 $*$ 理想 I 和 J, 有 $I \subseteq J$ 或者 $J \subseteq I$.

定义 4　设 M 是 BR_0 代数, $A \subseteq M$, 则所有包含 A 的 $*$ 理想之交显然是包含 A 的最小 $*$ 理想, 称它为由 A 生成的 $*$ 理想, 记作 $[A]$.

定理 3　设 M 是 BR_0 代数, A 是 M 的非空子集, 则

$$[A] = \{x \in M \mid \exists n \in \mathbf{N}, a_1, \cdots, a_n \in A, \text{ s.t. } a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \geqslant x\}. \tag{1}$$

此处, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, $1a = a$, $na = (n-1)a \oplus a$, 并约定 $0a = a$.

证　(1)式右边的集合显然是下集且对运算 $\oplus$ 封闭, 由定理 1(i)知(1)式右边的集合是 $*$ 理想. 又任一包含 A 的 $*$ 理想都包含这个集, 所以它就是 $[A]$.

特别地, 当 $A = \{a\}$ 时, $[a] = \{x \in M \mid na \geqslant x, n \in \mathbf{N}\}$.

定理 4　设 M 是含有最大元 1 的 BR_0 代数, M 上任何 1 个真 $*$ 理想链的并集仍然是 M 上的 1 个真 $*$ 理想.

证　设 M 上 1 个真 $*$ 理想链的并集为 $I =$

$\cup\{I_i \mid i\in\Gamma\}$. 显然 $0\in I$. 设 $b\in I$,$a * b'\in I$,则 $\exists i'\in\Gamma$,使得 $b\in I_{i'}$ 且 $a * b'\in I_{i'}$,所以 $a\in I_{i'}\subseteq I$. 因而由定义 2 知 I 是 1 个* 理想. 又 $\forall i\in\Gamma$,$1\notin I_i$,所以 $1\notin I$. 由此可得 I 是 1 个真* 理想.

定义 5　称 BR_0 代数 M 的真* 理想 I 为极大* 理想,若对于 M 的任何其它真* 理想 J 满足 $I\subseteq J\subseteq M$,则 $J=M$ 或 $J=I$.

定理 5　设 M 是含有最大元 1 的 BR_0 代数,M 上任何 1 个真* 理想都包含在 1 个极大* 理想中.

证　设 P 是 M 中的所有真* 理想构成的偏序集. 由定理 4 知,P 中的每条真* 理想链都含有 1 个 P 中的上界. 由 Zorn's 引理知,$\forall J\in P$,存在 1 个极大* 理想 $I\in P$,使得 $J\subseteq I$.

定理 6　设 M 是含有最大元 1 的 BR_0 代数,$\forall a\in M$,且 $a\neq 1$,则 M 中存在 1 个极大* 理想 I,使得 $a\in I$.

证　令 $J=[a]=\{x\in M \mid \exists n\in\mathbf{N}, \text{s.t. } na\geqslant x\}$,则 J 是 M 中的 1 个真* 理想. 由定理 5 得,存在 1 个极大* 理想 I,使得 $J\subseteq I$,故 $a\in I$.

3　BR_0 代数中* 理想诱导的商代数

定义 6　设 M 是 BR_0 代数,称 2 元关系 $\approx\subseteq M\times M$ 是 M 上的同余关系,如果 $\approx$ 满足

(i) $\approx$ 是 M 上的等价关系,即具有自反性,对称性和传递性;

(ii) $\approx$ 保持运算 $'$,$\vee$ 与 $\to$,即当 $a\approx b$ 且 $c\approx d$ 时,$a'\approx b'$,$a\vee c\approx b\vee d$,$a\to c\approx b\to d$.

引理 2　设 M 是 BR_0 代数,I 是 M 中的* 理想. 在 M 上定义 2 元关系 $\approx_I$ 如下

$$a\approx_I b \text{ 当且仅当 } a * b'\in I \text{ 且 } b * a'\in I, \quad (2)$$

则 $\approx_I$ 是 M 上的同余关系.

证　首先证明 $\approx_I$ 是 M 上的等价关系. 由(P9)知,$a * a'=0\in I$,所以 $a\approx_I a$. 设 $a\approx_I b$,即 $a * b'\in I$ 且 $b * a'\in I$,所以 $b\approx_I a$. 现设 $a\approx_I b$,$b\approx_I c$,则 $a * b'\in I$,$b * c'\in I$. 由(M3)知,$(a\to b)\to(a\to c)\geqslant(b\to c)$,由逆序对应知,

$$((a\to b)\to(a\to c))'\leqslant(b\to c)',$$

即 $(a\to b) * (a\to c)'\leqslant b * c'$,从而 $(a * b')'' * (a * c')\leqslant b * c'$. 因为 $b * c'\in I$ 且 I 为下集,所以 $(a * b')'' * (a * c')\in I$. 又因为 $a * b'\in I$,由定义 2 知 $a * c'\in I$,同理可证 $c * a'\in I$,因此,$a\approx_I c$.

下证 $\approx_I$ 在 M 上保持运算 $'$,$\vee$ 与 $\to$. 设 $a\approx_I b$,$c\approx_I d$,由 $a'' * (b')'=a'' * b\in I$ 和 $b'' * (a')'=b'' * a\in I$ 知 $a'\approx_I b'$. 因为 $b\leqslant b\vee d$,所以 $b'\geqslant(b\vee d)'$. 由(P11)知,$a * b'\geqslant a * (b\vee d)'$. 同理 $c * d'\geqslant c * (b\vee d)'$. 由 I 为下集以及(P7)得

$$a * (b\vee d)'=(b\vee d)'' * a\in I,$$

$$c * (b\vee d)'=(b\vee d)'' * c\in I.$$

从而由 I 关于 $\vee$ 封闭以及(P10)得

$$(a\vee c) * (b\vee d)'=(b\vee d)'' * (a\vee c)=$$

$$((b\vee d)'' * a)\vee((b\vee d)'' * c)\in I.$$

同理可证 $(b\vee d) * (a\vee c)'\in I$,所以 $a\vee c\approx_I b\vee d$. 又 $a\approx_I b$,则 $a * b'\in I$. 因为 $b'\to a'\leqslant(c'\to b')\to(c'\to a')$,即 $(b'\to a')'\geqslant((c'\to b')\to(c'\to a'))'$,由(M1)知 $(a\to b)'\geqslant((b\to c)\to(a\to c))'$,即 $a * b'\geqslant(b\to c) * (a\to c)'$,由 I 为下集知 $(b\to c) * (a\to c)'\in I$. 类似地,$(a\to c) * (b\to c)'\in I$,所以有 $(a\to c)\approx_I(b\to c)$. 同理可证 $(b\to c)\approx_I(b\to d)$,所以 $(a\to c)\approx_I(b\to d)$. 这就证明 $\approx_I$ 是 M 上的 $(',\vee,\to)$ 同余关系.

定理 7　设 M 是 BR_0 代数,I 是 M 中* 理想,$\approx_I$ 是 M 上形如(2)式所定义的同余关系,则商代数 $M/I=M/\approx_I=\{[a]_I \mid a\in M\}$ 是 BR_0 代数,其中 $[a]_I=\{b\in M \mid a\approx_I b\}$ 且偏序由下式确定

$$[a]_I\leqslant[b]_I \text{ 当且仅当 } a * b'\in I. \quad (3)$$

证　先证(3)式关于 $\leqslant$ 的定义是合理的. 事实上,设 $c\in[a]_I$,$d\in[b]_I$,即 $c\approx_I a$ 且 $d\approx_I b$. 由同余关系知 $(c\to d)'\approx_I(a\to b)'$,即 $c * d'\approx_I a * b'$,再由(2)式知 $(a * b')'' * (c * d')'\in I$ 且 $(c * d')'' * (a * b')'\in I$,由定义 2(ii)知,若 $c * d'\in I$,则 $a * b'\in I$;若 $a * b'\in I$,则 $c * d'\in I$. 所以 $a * b'\in I$ 当且仅当 $c * d'\in I$. 由此可知(3)式中的定义与 $[a]_I$,$[b]_I$ 中代表元的选取无关.

其次证明 $(M/I,\leqslant)$ 是偏序集. 由(P9)知,$[a]_I\leqslant[a]_I$,即 $\leqslant$ 是自反的. 设 $[a]_I\leqslant[b]_I$ 且 $[b]_I\leqslant[a]_I$,则由(3)式得 $a * b'\in I$ 且 $b * a'\in I$,所以 $a\approx_I b$,即 $[a]_I=[b]_I$,故 $\leqslant$ 是反对称的. 又设 $[a]_I\leqslant[b]_I$,$[b]_I\leqslant[c]_I$,则 $a * b'\in I$,$b * c'\in I$,类似于引理 2 中的证明可知 $a * c'\in I$,所以 $[a]_I\leqslant[c]_I$,即 $\leqslant$ 是传递的. 故 $(M/I,\leqslant)$ 是偏序集.

最后,由 $a * (a\vee b)'=(a\to(a\vee b))'=1'=0\in I$ 知 $[a]_I\leqslant[a\vee b]_I$. 同理可证 $[b]_I\leqslant[b\vee a]_I=[a\vee b]_I$. 设 $[a]_I\leqslant[c]_I$,$[b]_I\leqslant[c]_I$,则 $a * c'\in I$,$b * c'\in I$,由(P7),(P10)和* 理想对 $\vee$ 封闭知,

$$(a\vee b) * c'=c'' * (a\vee b)=(c'' * a)\vee(c'' * b)=$$

$$(a * c')\vee(b * c')\in I,$$

所以 $[a\vee b]_I\leqslant[c]_I$. 这就证明了 $[a\vee b]_I$ 是 $[a]_I$ 与 $[b]_I$ 的上确界. 类似可证 $[a\wedge b]_I$ 是 $[a]_I$ 与 $[b]_I$ 的

下确界. 易证 $[1]_I$ 与 $[0]_I$ 分别是$(M/I, \leqslant)$的最大元和最小元. 又由 $\approx_I$ 是$(\,',\vee,\rightarrow)$的同余关系知条件(M1)~(M5)成立. 所以 M/I 是 BR_0 代数.

定理8 设 M 是 BR_0 代数, I 是 M 中的素* 理想, $\approx_I$ 是 M 上形如(2)式所定义的同余关系,则 M/I 是全序的 BR_0 代数.

证 设 $[a]_I, [b]_I \in M/I$,若 I 为 BR_0 代数中的素* 理想,则 $a * b' \in I$ 或 $b * a' \in I$,从而由(3)式知 $[a]_I \leqslant [b]_I$ 或 $[b]_I \leqslant [a]_I$. 所以 M/I 是全序的 BR_0 代数.

4 参考文献

[1] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 2版. 北京: 科学出版社,2006.

[2] 王国俊. 非数理逻辑与近似推理[M]. 2版. 北京: 科学出版社,2008.

[3] Xu Yang, Ruan Da, Qin Keyun, et al. Lattice-valued logic: an alternative approach to treat fuzziness and incomparability[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[4] Hájek P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Dordredt: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[5] 王国俊. MV-代数、BL-代数、R_0-代数与多值逻辑[J]. 模糊系统与数学,2002,16(2):1-15.

[6] 王国俊. 模糊命题演算的一种形式演绎系统[J]. 科学通报,1997,42(10):1041-1045.

[7] Wang Guojun. On the logic foundation of fuzzy reasoning[J]. Information Sciences, 1999, 117(1/2): 47-88.

[8] 吴洪博. 基础 R_0-代数与基础 L^* 系统[J]. 数学进展,2003,32(5):565-576.

[9] 吴洪博,王娜. WBR_0-代数的两种弱化形式及其性质[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版,2012,40(4):1-5.

[10] 吴洪博,王昭海. BR_0-代数的无序表示形式及 WBR_0-代数的性质[J]. 工程数学学报,2009,26(3):456-460.

[11] 李小杰,吴洪博. BR_0-代数中⊕理想及其性质[J]. 模糊系统与数学,2009,23(2):93-97.

[12] 程国胜. R_0-代数中滤子与理想[J]. 模糊系统与数学,2001,15(1):58-61.

[13] 韩诚. 关于 R_0-代数公理系统的简化与独立性的修正[J]. 西北大学学报: 自然科学版,2005,35(6):669-672.

[14] 覃锋. R_0-代数的理想与其定义的简化[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版,2004,32(3):18-21.

[15] 吴洪博,乔希民. BR_0-代数定义的简化形式[J]. 四川大学学报: 自然科学版,2008,45(6):1281-1284.

[16] 张小红. 模糊逻辑及其代数分析[M]. 北京: 科学出版社,2008.

[17] Yang Jinbo. Completely prime filters on complete lattice[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,1999,23(3):195-197.

[18] Feng Jianwen, Huang Fusheng. Nilpotent ideals over hemirings[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2005,29(4):305-308.

The * Ideals and Induced Quotient Algebras in BR_0 Algebras

NIU Chao-hui, WU Hong-bo*

(College of Mathematics and Informatics, Shanxi Normal University, Xi'an Shanxi 710062, China)

Abstract: The * ideal, prime * ideal, generate * ideal and maximal * ideal are all defined by introducing * operation in BR_0 algebras. Then the properties related to those ideals are studied respectively. What's more, a congruence relation based on the notion of (prime) * ideals in BR_0 algebras is structured. It is proved that the quotient algebra of a BR_0 algebra under this congruence relation is still a (totally) BR_0 algebra.

Key words: logic algebra; BR_0 algebra; * ideal; prime* ideal; maximal * ideal; quotient algebra

(责任编辑: 曾剑锋)